Современная экономическая наука и образование
в России

Российская
экономическая
школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ПРОГРАММУ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» В РЭШ В 2015 ГОДУ

Москва 2015

Бремзен А. С., Головань С. В., Катышев П. К., Хейфец И. Л., Шибанов О. К.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в Российскую экономическую школу в 2015 году. — М., 2015 — 83 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ на программу «Магистр экономики» в 2015 году.

Содержание

1 Программа вступительного экзамена **5**

1.1 Математический анализ . . . 5

1.2 Литература . . . 9

1.3 Линейная алгебра . . . 10

1.4 Литература . . . 13

2 Вступительный экзамен 2012 г. **15**

2.1 Тест . . . 15

2.2 Ответы и решения теста . . . 31

3 Вступительный экзамен 2013 г. **35**

3.1 Тест . . . 35

3.2 Ответы и решения теста . . . 51

4 Вступительный экзамен 2014 г. **56**

4.1 Тест . . . 56

4.2 Ответы и решения теста . . . 72

5 Формат вступительного экзамена 2015 г. **80**

6 Подготовительные курсы по математике **82**

7 Подготовительные курсы по математике на видео **82**

8 Календарь абитуриента 2015 г. **83**

8.1 Заполнение анкеты с приложениями online . . . 83

8.2 Вступительные экзамены . . . 83

8.3 Прием документов для прошедших по конкурсу . . . 83

9 Приемная комиссия РЭШ **83**

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене на программу «Магистр экономики».

Содержание и форма экзамена в течение ряда лет оставались неизменными.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена по математике.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2012—2014 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

   Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. **Предел последовательности**

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. **Предел функции. Непрерывность функций (отображений)**

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в $\mathbb{R}^1$

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbb{R}^n$)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$**

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. **Степенные ряды**

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**
Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М., Наука, 1984.

5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1987.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1989.

7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

8. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Наука, 1982.

9. Рудин У., *Основы математического анализа*. М., Мир, 1976.

10. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М., Наука, 1979.

11. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

12. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

13. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

   Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

   Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. **Определитель матрицы**

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. **Линейные операторы**

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. **Евклидовы пространства**

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1974.

5. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. М., Наука, 1966.

6. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.

7. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., Наука, 1970.

8. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1984.

10. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.

11. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., Наука, 1963.

12. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

13. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., Наука, 1980.

14. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа.* (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

15. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М., Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2012 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{R}$ и точка $x \in \mathbf{R}$. Тогда

A если x — изолированная точка множества A, то x граничная точка множества A

B если x — граничная точка множества A, то x изолированная точка множества A

C если x — предельная точка множества A, то x граничная точка множества A

D если x — граничная точка множества A, то x предельная точка множества A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть A — ограниченное счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A A — открытое множество

B A — замкнутое множество

C A — компактное множество

D A — не является ни открытым, ни замкнутым множеством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Дана система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что каждый из векторов $x_1, \ldots, x_m$ линейно выражается через остальные векторы системы. Через $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, и через $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m)$ — ее размерность. Тогда

A $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = m - 1$

B если $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = n$, то $m = n + 1$

C если $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = n$, то любые n векторов системы $\{x_1, \ldots x_m\}$ линейно независимые

D если $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = m - 1$, то любые $m - 1$ векторов системы $\{x_1, \ldots x_m\}$ линейно независимые

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Даны две ненулевые матрицы A и B размера $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, где $m, n \geqslant 2$. Обозначим через a столбец длины m, через b столбец длины n и через x и y искомые столбцы подходящей длины. Тогда

A если система $ABx = Ab$ имеет решение при любом b, то система $Bx = b$ имеет решение при любом b

B если система $ABx = Ab$ при любом b имеет не более одного решения, то система $Bx = b$ при любом b имеет не более одного решения

C если система $ABx = a$ имеет решение при любом a, то система $BAy = b$ имеет решение при любом b

D если система $ABx = a$ при любом a имеет не более одного решения, то система $BAy = b$ при любом b имеет не более одного решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, α — вещественное число. Через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A $\det(A+B) = \det A + \det B$

B $\det(A-B) = \det A - \det B$

C $\det(\alpha A) = \alpha \det A$

D $\det(AB) = \det A \det B$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$. Известно, что $\mathbf{BA} = 0$. Через $\operatorname{Ker}\mathbf{X}$ и $\operatorname{Im}\mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im}\mathbf{A} \subset \operatorname{Ker}\mathbf{B}$

B $\operatorname{Im}\mathbf{A} \subset \operatorname{Im}\mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker}\mathbf{A} \subset \operatorname{Im}\mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker}\mathbf{A} \subset \operatorname{Ker}\mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A + B = I$, где I — единичная матрица. Найдите ***ложное*** утверждение

A если A — матрица проектирования, то B — матрица проектирования

B если A — матрица проектирования, то $AB = 0$

C если $AB = 0$, то A и B — матрицы проектирования

D если $AB = 0$, то $BA = 0$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

8. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, трактуемые как линейные операторы в пространстве $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Обозначим через B^T матрицу, транспонированную к B, через $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение к подпространству L и через $\operatorname{Im} X$ — образ матрицы X. Тогда

A если $B^T A = 0$, то $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$

B если $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$, то $B^T A = 0$

C если $B^T A = 0$, то $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^{\perp}$

D если $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^{\perp}$, то $B^T A = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если матрица A перестановочна с транспонированной A^T, то A симметричная

B если существует невырожденная матрица B, такая что $B^{-1}AB$ диагональная, то матрица A симметричная

C если существует скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$, такое что матрица A при этом скалярном произведении задает самосопряженный оператор, то A симметричная

D если существует невырожденная матрица B, такая что B^TAB диагональная, то A симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Даны две симметричные матрицы A и B порядка $n \geqslant 2$, причем матрица A является положительно определенной. Тогда

A если все собственные числа матрицы AB неотрицательные, то матрица B положительно полуопределена

B многочлен $\det(\lambda A + B)$ не имеет вещественных корней (через $\det X$ обозначается определитель матрицы X)

C если все элементы матрицы B неотрицательные, то матрица $A + B$ положительно определена

D если матрица $A + B$ положительно определена, то у матрицы B существует неотрицательный элемент

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функции $f(x)$, $g(x)$ заданы на всей числовой прямой и являются периодическими. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Функция $h(x) = f(x) + g(x)$ является периодической.

II. Функция $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ является ограниченной.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не являются постоянными, то на каждом конечном отрезке $[a, b]$ уравнение $f(x) + g(x) = 0$ имеет конечное число решений.

A только I

B только I и III

C только III

D I, II и III

E все утверждения I, II и III являются ложными

12. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, где $a < b$, и $x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A при любых a и b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является монотонной последовательностью

B существуют такие числа a, b, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится

C при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3a+4b}{7}$

D при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2a+3b}{5}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Предел $\lim\limits_{x\to 4}\left(3 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+4}}$ равен

A $1/\sqrt[6]{e}$

B $1/\sqrt[3]{e}$

C $1/\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, уменьшается со скоростью, пропорциональной площади треугольника. В момент времени $t = 0$ площадь треугольника равна 2, в момент времени $t = 1$ площадь треугольника равна 1/2. Площадь треугольника в момент времени $t = 3$ равна

A 1/4

B 1/6

C 1/8

D 1/10

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

15. Функция $f(x)$ задана на множестве $[0, +\infty)$, дифференцируема на $(0, +\infty)$, и ее график имеет наклонную асимптоту $y = a + bx$, $b \neq 0$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = B$, то $b = B$.

II. Существуют точки $0 < x_1 < x_2$, такие что $b = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

III. Если $f'(x) < b$ при любом $x > 0$, то существует такое число $N > 0$, что $f(x) <$ $< a + bx$ при любом $x > N$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

16. Предел $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\sqrt[6]{n^6 + 6n^5} - \sqrt{n^2 + 2n} \right)$ равен

A 0

B -2

C -1

D 1

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Если $f(x)$ является четной функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является нечетной функцией.

II. Если $f(x)$ является периодической функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является периодической функцией.

III. Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ не существует первообразной на $\mathbf{R}$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

18. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1 + x + x^2)}{e^x + e^{-x} - 2}$ равен

A $-1/2$

B -1

C -2

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеет радиус сходимости R_2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ равен

A $\min\{R_1, R_2\}$

B $\max\{R_1, R_2\}$

C $\sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

D $\dfrac{R_1 + R_2}{2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Пусть b — вещественное число. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ называется b-странной, если существует такое натуральное число N, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$. Тогда

A существует такое число b, для которого не существует b-странных последовательностей

B существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность является неограниченной

C существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность имеет предел

D любая b-странная последовательность является монотонной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$ равен

A 1

B e

C $\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

22. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$ равен

A $(a+b)^{ab}$

B $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$

C $\dfrac{ab}{a+b}$

D $(ab)^{1/(a+b)}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{5\,dx}{x^2 - x - 6}$ равен

A $\ln\dfrac{4}{9}$

B $\ln\dfrac{9}{4}$

C $5\ln\dfrac{9}{4}$

D $-5\ln\dfrac{9}{4}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

24. Интеграл $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\,dx}{x^2 - 2x + 2}$ равен

A $2\,\mathrm{arctg}(\pi + 1)$

B $2\ln\dfrac{1}{2}$

C $2(\mathrm{arctg}(\pi - 1) + \mathrm{arctg}(\pi + 1))$

D $2\cos\dfrac{9\pi}{16}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

25. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x \sin x}{x^2-3x+2}\,dx$ равен

A $\ln\frac{1}{2}$

B $3\ln\frac{1}{2}$

C $\pi/2-3$

D $3/2-\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

26. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (\cos^2 x+\cos x+1)dx$ равен

A 0

B $1+3\pi/4$

C $-1+\pi/4$

D $1-\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

27. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (2\sin^2 x+\cos^2 x)dx$ равен

A $\pi/2$

B $1+3\pi/4$

C $3\pi/4$

D $1+\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

28. Интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^7 x-1)dx$ равен

A $-\pi/2$

B $-\pi/4$

C $-\pi$

D $-\pi^7+1$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

29. Неопределенный интеграл $\int \frac{2x-1}{x^2-x-12}\,dx$ равен

A $\ln\left|x^2-x-12\right|+C$

B $\ln\left|\frac{x-4}{x+3}\right| + C$

C $\ln\left|\frac{x+4}{x-3}\right| + C$

D $\ln\left|\frac{x^2-x-12}{2x-1}\right| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

30. Значение максимального решения задачи Коши $y' = 5 - \frac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = 2$ в точке $x = 4$ равно

A $4/9$

B $79/8$

C $23/7$

D $17/9$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

31. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны при всех вещественных x. Тогда

A если $f(g(x))$ и $f(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $g(x)$ дифференцируема при всех x

B если $f(g(x))$ и $g(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

C если $f^2(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

D если $f(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f^2(x)$ дифференцируема при всех x

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает на нем значения между нулем и единицей. Тогда

A если $f(x)$ не возрастает, причем $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, то решение уравнения $f(x) = x$ существует и единственно

B если $f(x)$ непрерывна, строго возрастает на отрезке $[0, a]$, причем $f(0) > 0$ и $f(a) = 1$, и уравнение $f(x) = x$ имеет конечное число n решений на отрезке $[0, a]$, то n четно

C если уравнение $f(f(x)) = x$ имеет не более одного решения, то и уравнение $f(x) = x$ имеет не более одного решения

D если $f(f(x))$ непрерывна и не убывает, то и $f(x)$ не убывает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ на множестве $|x| + 2|y| = 2$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

34. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а производная $f'(x)$ существует и непрерывна на интервале $(0, 1)$, причем $f(0) = 0$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

B если функция $f(x) \cdot f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

C если функция $f(x) \cdot f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

D если функция $\sqrt{f^2(x) + f'^2(x)}$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $y^6 - y^5 + x = 1$ в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$. Тогда ее производная в точке $x = 1$

A равна 0

B равна 1

C равна -1

D не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + 9}}$, $y(0) = 3$. Тогда значение $y(4)$

A $\quad$ равно 1

B $\quad$ равно 4

C $\quad$ равно 9

D $\quad$ равно $\ln 13$

E $\quad$ равно числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

37. Производная функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{2n}\right)^n$ в точке $x = 1$

A $\quad$ равна 1

B $\quad$ равна e

C $\quad$ равна $\sqrt{e}$

D $\quad$ равна $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

E $\quad$ равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Производная функции $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$ в точке $x = 0$

A $\quad$ равна 1

B $\quad$ равна 0

C $\quad$ равна $\ln(\pi/2)$

D $\quad$ равна $(\pi/2)^{\pi/2}$

E $\quad$ равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

39. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и принимает положительные значения на полупрямой $[0, +\infty)$ вместе со своей производной, причем $f(0) = e$ и для любого $x > 0$ выполнено неравенство $f'(x) < f(x)$. Тогда

A $\quad$ $f(1) < e$

B $\quad$ $f(e) < e^e$

C $\quad$ $f(2e) < e^8$

D $\quad$ $f(e^2) < e^{e^2}$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть $f(x) = x^2 \sin(x^3)$ и M — множество ее критических точек (точек, в которых производная $f'(x) = 0$). Тогда

A множество M состоит из изолированных точек

B множество M компактно

C функция $f(x)$ достигает локального экстремума в каждой точке множества M

D функция $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2.1.2 Вторая часть теста

1. Пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму двух ненулевых подпространств L_1 и L_2 размерностей n_1 и n_2 соответственно. Матрица P задает оператор проектирования на L_1 параллельно L_2, матрица Q задает оператор проектирования на L_2 параллельно L_1. Квадратная матрица A размера $2n \times 2n$ определяется равенством

$$A = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где через I обозначается единичная матрица, а через 0 — нулевая. Обозначим через x, y столбцы длины n. Тогда

а) матрица A ортогональная;

Да Нет

б) матрица A задает оператор проектирования;

Да Нет

в) ранг матрицы A равен $2n_1$;

Да Нет

г) ранг матрицы A равен $2n_2$;

Да Нет

д) ранг матрицы A равен n;

Да Нет

е) если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

ж) если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

з) если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где $x \neq y$ и $x \neq -y$, является собственным вектором матрицы A, то $x-y$ является собственным вектором матрицы P или $x+y$ является собственным вектором матрицы Q.

Да Нет

2. Даны функция $f(x,y) = y - 4x^2 + 2x^4$ и множество $M = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

в) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

д) в точке $(0,1)$ функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

е) в точке $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) точка $(0,-1)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M.

Да Нет

3. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx}$, где α — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$. Тогда

а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является ограниченным;

Да Нет

в) существует α, для которого функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве M;

Да Нет

г) для любого α на множестве M ряд не сходится равномерно;

Да Нет

д) если $\alpha < 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) если $\alpha > 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) для любого α существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) существует α, для которого существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд не сходится равномерно.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \cos^3 t + f(t), \;\; x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр, а $f(t)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной прямой. Тогда

а) функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) если $f(t)$ ограничена на всей числовой прямой, то $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) если $f(t)$ периодическая с периодом 2π, то и $x(t)$ периодическая с периодом 2π;

Да Нет

г) если $f(\pi/2) = 0$, то и $x(\pi/2) = 0$;

Да Нет

д) если $x_0 = 1$ и $f(t) < 1$ при всех t, то $x(\pi) \leqslant \pi + 1$;

Да Нет

е) если $x_0 = 1$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(\pi) = e^{2/3}$;

Да Нет

ж) если $f(t) = e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$, то $x(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$;

Да Нет

з) если $x_0 = \sqrt{e}$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(t) \geqslant 1$ для всех $t > 0$.

Да Нет

5. Пусть $a > 0$ и $f(x) = \displaystyle\int_0^a t \cdot |t - x| dt$ при $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в одной точке;

Да Нет

б) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в двух точках;

Да Нет

в) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ возрастает на множестве $(1, +\infty)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, 0)$;

Да Нет

ж) точка $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

з) функция $f(x)$ является выпуклой функцией на $\mathbf{R}$.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. A. **2.** E. **3.** D. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** E. **8.** D. **9.** D. **10.** A. **11.** E. **12.** C. **13.** A. **14.** C. **15.** A. **16.** B. **17.** A. **18.** A. **19.** E. **20.** C. **21.** E. **22.** B. **23.** A. **24.** C. **25.** E. **26.** B. **27.** C. **28.** C. **29.** A. **30.** B. **31.** D. **32.** C. **33.** C. **34.** D. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** B. **39.** C. **40.** A.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Так как $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму подпространств L_1 и L_2, то $P + Q = I$, откуда следует, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} P^2 & PI + IQ \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix} = A,$$

и матрица A задает оператор проектирования. Так как $A^T \neq A$, то $A \neq I$, следовательно, A не является ортогональной матрицей (только единичная матрица задает проектор и является ортогональной одновременно). Ответы на вопросы а) — нет, б) — да.

Так как матрица A является блочно-треугольной, то $\det(A - \lambda I) = \det(P - \lambda I)\det(Q - \lambda I)$. Поскольку число 0 является собственным числом матриц P (алгебраической кратности n_2) и Q (алгебраической кратности n_1), то оно является собственным числом матрицы A алгебраической кратности $n_1 + n_2 = n$. Так как алгебраическая кратность собственных чисел проектора совпадает с геометрической, то отсюда следует, что матрица A имеет ранг $2n - n = n$. Ответы на вопросы в) — нет, г) — нет, д) — да.

Если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $Px = x$ и $Qx = 0$. Отсюда

$$A \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + x \\ Qx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос е) — нет).

Если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $Qy = y$ и $Py = 0$. Отсюда

$$A \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Py + y \\ Qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос ж) — да).

Если

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + y \\ Qy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то y является собственным вектором матрицы Q. При этом возможны два случая:

1. Пусть $Qy = 0$ (и $Py = y$). Тогда $\lambda = 0$ и $0 = Px + y = P(x + y)$, т. е. $x + y$ — собственный вектор матрицы P, а значит и матрицы Q.

2. Пусть $Qy = y$ (и $Py = 0$). Тогда $\lambda = 1$ и $Px + y = x = x + Py$, откуда $P(x - y) = x - y$.

Таким образом, ответ на вопрос з) — да.

Задача 2. Подставим выражение $x^2 = 1 - y^2$ из уравнения для множества M в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(y) = y - (1 - y^2) + 2(1 - y^2)^2 = 2y^4 + y - 2$. Так как множество M представляет собой окружность радиуса 1 с центром в нуле, то функцию $g(y)$ нужно исследовать на множестве $[-1, 1]$.

Производная $g'(y) = 8y^3 + 1$, откуда следует, что у уравнения $g'(y) = 0$ решение единственное ($y = -1/2 \in [-1, 1]$). Левее этой точки функция $g(x)$ убывает, правее — возрастает. Поэтому на множестве $[-1, 1]$ у функции $g(y)$ один локальный (он же глобальный) минимум $y = -1/2$ и два локальных максимума $y = -1$ и $y = 1$. Так как $g(-1) = -1$, а $g(1) = 1$, то последняя точка является и точкой глобального максимума. Заметим, что точке $y = -1/2$ соответствуют две точки исходного множества M ($x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$), а точкам $y = -1$ и $y = 1$ — по одной ($x = 0$, $y = -1$ и $x = 0$, $y = 1$).

Таким образом, функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в двух точках, а наибольшего — в одной (ответы на вопросы а) — нет, б) — да, в) — да, г — нет). Точка глобального максимума $x = 0$, $y = 1$ (ответ на вопрос д) — да). Точки $x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ — точки глобального минимума (ответы на вопросы е) — нет, ж) — да). Точка $x = 0$, $y = -1$ — действительно точка локального максимума (ответ на вопрос з) — да).

Задача 3. Точка $\alpha \in M$ и $f(\alpha) = 0$ (все члены ряда равны нулю). Если $x < \alpha$, то $x \notin M$ (четные члены ряда не определены).

Пусть $x > \max\{\alpha, 0\}$, тогда $(x - \alpha)^{1/n} \leqslant \max\{1, x - \alpha\}$, и исходный ряд (с положительными слагаемыми) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x - \alpha)^{1/n} e^{-nx}$ сходится, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\max\{1, x - \alpha\} \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Пусть $\alpha < x \leqslant 0$, тогда для всех n выполняется неравенство $(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \geqslant$ $\geqslant \min\{x-\alpha, 1\}$ в котором правая часть не стремится к нулю, а значит ряд не сходится.

В итоге получаем $M = [\alpha, +\infty)$ при $\alpha \geqslant 0$ и $M = \alpha \cup (0, +\infty)$ при $\alpha < 0$, поэтому ответы на вопросы а) — нет, б) — нет.

При $\alpha > 0$ и $x \in M$

$$f(x) \leqslant e^{-\alpha}\frac{\max\{1, x-\alpha\}}{e^{x-\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} < \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}},$$

откуда следует, что $f(x)$ ограничена, и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом. Получаем ответы на вопросы в) — да, г) — нет, е) — да.

Для любого α при $x \in [a, b]$, где $\max\{\alpha, 0\} < a < b$, выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \leqslant \max\{1, b-\alpha\}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na},$$

и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом, ответ на вопрос ж) — да.

Если $\alpha < 0$ и $x \in (0, 1)$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \geqslant \min\{(x-\alpha)^{1/m}, 1\}\sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} \geqslant$$
$$\geqslant \min\{(-\alpha)^{1/m}, 1\}\frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \to +\infty \quad \text{при } x \to 0 \text{ справа.}$$

Значит для любого m существует $x \in (0, 1)$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $(0, 1)$ не сходится равномерно, т. е. д) — нет.

Если $\alpha = 0$ и $x \in [0, 1]$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} x^{1/n}e^{-nx} \geqslant x^{1/m}\sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} = x^{1/m}\frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \sim \frac{1}{x^{1-1/m}}$$

при $x \to 0$ справа. Значит для любого $m > 1$ существует $x \in [0, 1]$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $[0, 1]$ не сходится равномерно, т. е. з) — да.

Задача 4. Найдем решение данного дифференциального уравнения. Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(t)\cdot\cos^3 t$$

может быть легко проинтегрировано, его общим решением является функция $x(t) = C \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$. Решение исходного уравнения может быть найдено с помощью метода вариации постоянной: если подставить $x(t) = C(t) \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$ в исходное уравнение, то после упрощения получим

$$\frac{dC}{dt}\cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3} = f(t),$$

откуда нетрудно вывести решение исходной задачи:

$$x(t) = \left[x_0 + \int_0^t f(\tau)e^{-\sin\tau+(\sin^3\tau)/3}d\tau\right] e^{\sin t-(\sin^3 t)/3}.$$

Из явного вида решения немедленно следуют ответы на вопросы: а) — да, б) — нет, в) — нет, г) — нет, д) — да (подынтегральное выражение может быть оценено сверху величиной $e^{-\sin\tau+(\sin^3\tau)/3}$, которая на отрезке $[0,\pi]$ не превосходит единицу), е) — нет (на самом деле тогда $x(\pi) = 1$), ж) — нет (у указанной величины нет предела при $t \to +\infty$), з) — нет (например, $x(3\pi/2) = e^{-1/6}$).

Задача 5. Рассмотрим три случая:

1. Пусть $x \leqslant 0$. Тогда $|t-x| = t-x$ при $t \in [0,a]$ и $f(x) = \displaystyle\int_0^a t(t-x)dt = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x}{2}$.
2. Пусть $0 < x \leqslant a$. Тогда $f(x) = \displaystyle\int_0^x t(x-t)dt + \int_x^a t(t-x)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^2x}{2} + \frac{a^3}{3}$.
3. Пусть $x > a$. Тогда $f(x) = \displaystyle\int_0^a t(x-t)dt = \frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{3}$.

Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и $f'(x) = -a^2/2$ при $x < 0$, $f'(x) = x^2 - a^2/2$ при $0 < x < a$, $f'(x) = a^2/2$ при $x > a$. В точках $x = 0$, $x = a$ производные слева и справа совпадают, значит, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой. Ответы на вопросы а), б) нет.

Из пунктов 1 и 3 следует, что при $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ является линейной, поэтому ответ на вопрос в) да.

Функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, a/\sqrt{2})$ и возрастает на множестве $(a/\sqrt{2}, +\infty)$. Значит, в точке $x = a/\sqrt{2}$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения. Кроме того, например, при $a = 1$ функция $f(x)$ возрастает на $(1, +\infty)$. Таким образом, ответы на вопросы г), д), е) да, на вопрос ж) нет.

Поскольку $f''(x) = 2x > 0$ при $0 < x < a$, то на интервале $(0, a)$ функция $f(x)$ является выпуклой. При $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ линейна, и графики этих линейных частей являются касательными, проведенными к графику функции $f(x)$ в точках с абсциссами $x = 0$, $x = a$. Поэтому график функции $f(x)$ лежит не ниже любой касательной, проведенной к этому графику. Значит, $f(x)$ является выпуклой функцией. Ответ на вопрос з) да.

3 Вступительный экзамен 2013 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

- правильный ответ — «$+1$»
- неправильный ответ — «-0.25»
- отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- правильный ответ — «$+1$»
- неправильный ответ — «-1»
- отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Пусть M — счетное множество на числовой прямой, $P = \mathbf{R} \setminus M$ — дополнение множества M. Тогда

A у множества P существует внутренняя точка

B у множества P существует внешняя точка

C у множества P существует изолированная точка

D у множества P существует граничная точка

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x^4}dx$ равен

A $-x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

B $-x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

C $-x + \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg} x^2 + C$

D $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

3. Пусть M — подмножество числовой прямой и P — множество его изолированных точек. Тогда

A множество P непустое

B множество P открытое

C множество P замкнутое

D множество P ограниченное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Для подмножества M числовой прямой обозначим через ∂M множество его граничных точек, а через $\overline{M}$ — его замыкание. Тогда

A $\partial(M \cup N) = \partial M \cup \partial N$

B $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

C если множество M не содержит изолированных точек, то ∂M совпадает с множеством предельных точек множества M

D $M = \overline{M} \setminus \partial M$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4}{x+1}\,dx$ равен

A $-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + C$

B $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$

C $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$

D $\frac{(x+1)^4}{4} - x + \ln|x+1| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

6. Пусть A, B — ограниченные подмножества числовой прямой, $A + B = \{x + y, x \in \in A, y \in B\}$, $A - B = \{x - y, x \in A, y \in B\}$, $A \cdot B = \{x \cdot y, x \in A, y \in B\}$. Тогда

A $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

B $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$

C $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$

D $\sup(A + B) = \sup A + \inf B$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}, \ n = 1, 2, \ldots,$$

где $a \geqslant 0$. Тогда

A при любом $a \geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ строго возрастает

B существует такое $a \geqslant 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ не ограничена

C существуют такие числа a_1, $a_2 \geqslant 0$, что соответствующие последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходятся к разным пределам

D при любом $a \geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет предел

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^n$. Обозначим через M множество его сходимости и через $S(x)$, $x \in M$, его сумму. Тогда

A множество M замкнутое

B множество M ограниченное

C функция $S(x)$ является неограниченной функцией

D интервал $(4, 5) \subset M$ и на $(4, 5)$ ряд сходится равномерно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Даны функция двух переменных $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 + + y^2 = 2\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке

B функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке

C точка $(1, 1)$ есть точка локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D точка $(0, -\sqrt{2})$ есть точка локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Предел $\lim\limits_{x \to 2} \left(2 - \dfrac{x}{2}\right)^{1/(x^3 - 8)}$ равен

A $\dfrac{1}{\sqrt[24]{e}}$

B $\sqrt[24]{e}$

C $\dfrac{1}{\sqrt[12]{e}}$

D $\sqrt[6]{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

11. Концы стержня AB, длина которого равна 5 м, закреплены на двух взаимно перпендикулярных направляющих и могут скользить по ним. Пусть O — точка пересечения направляющих. Точка A движется от точки O с постоянной скоростью 1 м/с. Чему равно абсолютное значение скорости точки B в момент времени, когда длина отрезка AO равна 3 м?

A 0.50 м/с

B 0.75 м/с

C 1.00 м/с

D 1.25 м/с

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

12. Предел $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{2x} (\sin t)^t dt$ равен

A 1

B 2

C 3

D 4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt[7]{n^7+7n^6}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ равен

A $\quad -1$

B $\quad -5/2$

C $\quad -4$

D $\quad -5$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. $\sup\limits_{|x|\leqslant 1}\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x^n$ равен

A $\quad -\pi/4$

B $\quad \pi/4$

C $\quad 1$

D $\quad \pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{4n}\right)\sin(xn)$ равна

A $\quad (-1,1)$

B $\quad [-1,1)$

C $\quad (-1,1]$

D $\quad [-1,1]$

E множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Тогда

A последовательность $\{(-1)^n|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

B последовательность $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

C последовательность $\{\sqrt{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

D последовательность $\{a_n+k(n-k)a_{n-k}\}_{n=k+1}^{\infty}$ сходится при некотором натуральном k

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\left(1+x/2+x^2/4\right)}{x^2}$ равен

A $\quad -1/4$

B $1/4$

C $-1/8$

D $1/8$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

18. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{2n+3k}{n}\right)^2$ равен

A 0

B 30

C 39

D 62

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, не постоянная и четная, а функция $g(x)$ определена на всех числовой оси, не постоянная и периодическая. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существуют функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что функция $f(x)g(x)$ периодическая.

II. Функция $f(x) + xg(x)$ не периодическая.

III. Функция $f(x) + g(x) + x$ не является четной.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

20. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$, не убывает и принимает на нем значения между нулем и единицей. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Решения уравнения $f(x) = x$ существуют, и их конечное число.

II. Если $f(1) = 1$, то у уравнения $f(x) = x$ существует не менее двух решений.

III. Если $f(f(x))$ непрерывна, то и $f(x)$ непрерывна.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E все утверждения I, II, III ложные

21. Пусть функция двух переменных задана следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} a + 2x^2 - b(y-c), & \text{если } x^2 > 2 + x \text{ и } y < 6, \\ 3 + cx - y, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция является непрерывной на всей плоскости, если

A $a = 3,\ b = 1,\ c = 2$

B $a = 3,\ b = 0,\ c = 2$

C $a = 2,\ b = 0,\ c = 1$

D $a = -3,\ b = 1,\ c = 2$

E таких значений параметров не существует

22. Пусть $f(x) = -\exp\left(-\dfrac{a}{x}\right) + 1 - \dfrac{a}{x}$, где $a > 0$. Тогда

A функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$

B функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $a > 1$, и только при таких значениях параметра a

C функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $0 < a \leqslant 1$, и только при таких значениях параметра a

D функция $f(x)$ положительна при всех $x > 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть функция $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. У функции $f(x)$ существует первообразная, являющаяся всюду непрерывной функцией.

II. Существует функция $f(x)$, у которой в точке разрыва существует производная.

III. Множество значений функции $f(x)$ является выпуклым множеством.

A только I

B только II

C только III

D только I и III

E все утверждения I, II, III ложные

24. Функции $f(x), g(x)$ определены и непрерывны на числовой прямой $\mathbf{R}$, и не равны тождественно нулю. Пусть точка $x_0 \in \mathbf{R}$. Тогда

A если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, а у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

B если у функции $f(x)$ не существует производной в точке x_0, и у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

C если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, то у функции $f(x)$ существует производная в некоторой окрестности точки x_0

D если у функций $f(x)$, $g(x)$ существуют производные в точке x_0, то у функции $f(g(x))$ существует производная в точке x_0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой и обладает свойством: $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^\alpha$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $\alpha > 1$, то функция $f(x)$ постоянная.

II. Если $\alpha = 1$, то функция $f(x)$ дифференцируемая.

III. Если $0 < \alpha < 1$, то функция $f(x)$ непрерывная.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

26. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $x^2 + xy - y^2 = x$ в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$. Тогда ее производная в точке $x = 1$

A равна -1

B равна 0

C равна 1

D не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y^2x^3$, $y(0) = 8$. Тогда значение $y(1)$ равно

A $1/8$

B $8/3$

C 8

D -8

E другому числу или не существует

28. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{\cos x}$, $y(0) = 2$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

29. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-1, 1)$ и дважды дифференцируема в каждой точке $(-1, 1)$. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на $(-1, 1)$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет не менее двух решений

B если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) < 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

C если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) > 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

D если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наибольшего, либо наименьшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Функция $f(x, y) = \sin(\pi xy)$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

31. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ принимает не менее двух значений. Тогда

A множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть открытым

B множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть замкнутым

C если множества точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения, оба конечны, то количества элементов в них различаются не более чем на 1

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на интервале $(0, 1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x, y)$ определена в окрестности точки $(0, 0)$. Тогда

A если для любого t функция $g(x) = f(x, tx)$ непрерывна в точке $x = 0$, то функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

B если для любого t функция $g(x) = f(x, tx)$ дифференцируема в точке $x = 0$, то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$

C если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, то функция $h(x, y) = xyf(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$

D если функция $u(x, y) = \sin f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, то и функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Дана система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что вектор x_{m+1} линейно выражается через $x_1, \ldots, x_m$. Через $\mathscr{L}(z_1, \ldots, z_k)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{z_1, \ldots, z_k\}$, а через $\dim \mathscr{L}(z_1, \ldots, z_k)$ — ее размерность. Тогда

A система $\{x_1, \dots, x_m\}$ линейно зависимая

B $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = m$

C $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_{m+1}) = m$

D если система $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ линейно независимая, то $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_{m+1}) \leqslant$ $\leqslant m$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

34. Пусть L_1 — множество решений системы $Ax = 0$, L_2 — множество решений системы $Bx = 0$, где A и B — матрицы размера $m \times n$ (m, $n \geqslant 2$), а x — неизвестный столбец подходящей длины. Тогда

A $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $A^T B x = 0$ (через A^T обозначается матрица, транспонированная к A)

B $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$

C $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} x = 0$

D $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $(A + B)x = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначим определитель матрицы X. Тогда

A если $\det(AB) = \det(BA)$, то $AB = BA$

B если $A^2 = B^2$, то $A = B$ или $A = -B$

C если $(A - B)^2 = 0$, то $A = B$

D если $\det A = \det B \neq 0$, то матрица AB^{-1} ортогональная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Дан *нильпотентный* линейный оператор $\mathbf{A}$, действующий из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$ (т. е. $\mathbf{A}^m = 0$ для некоторого $m \geqslant 1$). Через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A} > 0$

B если $\mathbf{A} \neq 0$, то $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}^2 > \dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}$

C $\mathbf{A}^n = 0$

D пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в сумму подпространств $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{A}$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

37. Число инвариантных подпространств матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

равно

A 1

B 2

C 3

D 4

E бесконечно много

38. Пусть A — симметричная матрица третьего порядка, а x — неизвестный столбец длины 3. Тогда

A если множество $\{x\colon x^{\mathsf{T}}Ax = a\}$ неограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A знакопеременная (не является ни положительно, ни отрицательно полуопределенной)

B если множество $\{x\colon x^{\mathsf{T}}Ax = a\}$ ограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A положительно определенная

C если множество $\{x\colon x^{\mathsf{T}}Ax = a\}$ при всех $a \geqslant 0$ содержит в себе прямую, то матрица A положительно полуопределенная

D уравнение $x^{\mathsf{T}}Ax = a$ имеет решение при всех $a \in \mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A^2 = I$, где I — единичная матрица. Пусть $L_1 = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = x\}$ и $L_{-1} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = -x\}$. Тогда

A Числа 1 и -1 оба являются собственными числами матрицы A

B подпространства L_1 и L_{-1} ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$

C пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму L_1 и L_{-1}

D матрица A симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть P и Q — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, задающие проекторы на одно и то же подпространство $L \subset \mathbf{R}^n$. Через $\operatorname{Ker} X$ и $\operatorname{Im} X$ обозначим ядро и образ оператора, заданного матрицей X, соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $PQ = Q$

B $QP = P$

C $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$

D $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} Q$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

3.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть $f(x) = \int_{4x}^{x^2+3} e^{-t^2} dt$, где $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) при всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$;

Да Нет

б) уравнение $f(x) = 0$ имеет четное число корней;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) функция $f(x)$ имеет локальный минимум, который принадлежит интервалу $(1, 3)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ не убывает на множестве $[3, +\infty)$;

Да Нет

ж) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту с ненулевым углом наклона;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

Да Нет

2. Для семейства функций $f(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \in \mathbf{R}$, рассмотрим предел

$$\lim_{\mu\to 0}\left\{\lim_{\nu\to 0}\frac{f(\mu+\nu+x)-f(\mu+x)-f(\nu+x)+f(x)}{\mu\nu}\right\}.$$

Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество, где он существует и конечен, и через $g(x)$ — его значение для $x \in M$. Тогда

а) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv 0$ на M;

Да Нет

б) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv \gamma$ на M;

Да Нет

в) если $g(x) \not\equiv \gamma$ на M, то число решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четное;

Да Нет

г) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) > 0$ на M;

Да Нет

д) существуют более одного значения γ, при которых $g(x)$ не ограничена на M;

Да Нет

е) существуют более одного значения γ, при которых $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

ж) существуют более одного значения γ, при которых $M \neq \mathbf{R}$;

Да Нет

з) если $\gamma = 2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, то $g(x)$ не равно 0 ни в одной точке M.

Да Нет

3. Даны функция $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2|x|y^3$ и множество $M = \{(x,y)\colon |x| + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке $\left(1/2, 1/\sqrt{2}\right)$;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в точке $(16/25, -3/5)$;

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

е) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

ж) точка $(0, -1)$ является точкой локального минимума функцим $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{\sqrt{16 - t^2}}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) существует x_0 такое, что функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) при любом x_0 функция $x(t)$ определена в точке $t = 3$;

Да Нет

в) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) при любом $x_0 \neq 0$ функция $x(t)$ монотонно возрастает на своей области определения;

Да Нет

д) для любого $\tau > 0$ существует $x_0 > 0$ такое, что $x(t)$ не определена в точке τ;

Да Нет

е) если $x_0 > 1$ и $x(t)$ определена в точке $t = 2$, то $x(2) > 2$;

Да Нет

ж) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t) - x_0$ является нечетной;

Да Нет

з) если $x_0 < 1$, то $x(t)$ определена в точке $t = 7/2$.

Да Нет

5. Три вектора

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 1+\alpha \end{pmatrix},$$

являются собственными векторами симметричной матрицы A третьего порядка. Известно, что

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5\alpha \\ 1+2\alpha \\ 2-5\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда

а) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

б) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ матрица A является ортогональной матрицей;

Да Нет

г) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

д) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

е) при $\alpha = -1$ существует бесконечно много матриц A;

Да Нет

ж) при $\alpha = -1$ существует единственная матрица A;

Да Нет

з) при $\alpha = -1$ не существует матрицы A.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** A. **3.** E. **4.** E. **5.** B. **6.** C. **7.** D. **8.** C. **9.** C. **10.** A. **11.** B. **12.** B. **13.** D. **14.** B. **15.** E. **16.** C. **17.** D. **18.** C. **19.** C. **20.** E. **21.** E. **22.** A. **23.** E. **24.** E. **25.** C. **26.** A. **27.** E. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** A. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** E. **36.** D. **37.** B. **38.** A. **39.** C. **40.** D.

3.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Для начала заметим, что подынтегральная функция положительная и непрерывная на всем $\mathbf{R}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff x^2+3 > 4x \iff x \notin [1,3], \\ f(x) = 0 &\iff x^2+3 = 4x \iff x \in \{1,3\}, \\ f(x) < 0 &\iff x^2+3 < 4x \iff x \in (1,3). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x) = 0$ в двух точках $x = 1$ и $x = 3$, вопрос б) — да. При $x \in (1,3)$ функция $f(x) < 0$, поэтому вопрос а) — нет.

Так как $f(x) \leqslant 0 \iff x \in [1,3]$ и функция $f(x)$ непрерывна, то она достигает наименьшего значения на $[1,3]$, и это значение является наименьшим значением на всем $\mathbf{R}$ (вопрос г) — да). Достигается оно внутри отрезка (где значения функции отрицательные), и так как глобальный минимум является локальным, то д) — да.

Теперь заметим, что если $x > 0$, то $f(-x) > f(x)$ (поскольку подынтегральная функция положительная и $[4(-x), 3(-x)^2+3] \supset [4x, 3x^2+3]$). Поэтому при $x > 0$ наибольшее значение достигаться не может. Если же $x \leqslant 0$, то

$$f'(x) = 2xe^{-(x^2+3)^2} - 4e^{-(4x)^2} < 0,$$

что означает, что $f(x)$ убывающая, и локальных, а значит и глобальных максимумов при $x \leqslant 0$ у нее нет. Поэтому вопрос в) — нет.

Далее, поскольку подынтегральная функция e^{-t^2} очень быстро стремится к нулю при $t \to \pm\infty$, то $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (так как оба предела интегрирования стремятся к $+\infty$) и $f(x) \to A > 0$ при $x \to -\infty$ (здесь нижний предел стремится к $-\infty$, а верхний — к $+\infty$). Поэтому у функции $f(x)$ есть две горизонтальные асимптоты и нет наклонных (вопросы ж) — нет, з) — да).

Если же предположить, что $f(x)$ не убывает на $[3, +\infty)$, то так как при $x > 3$ функция $f(x) > 0$, то и предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ (предел неубывающей ограниченной функции). Это вступает в противоречие с тем, что предел на самом деле равен нулю (вопрос е) — нет).

Задача 2. Заметим, что предел в условии задачи является определением второй производной, соответственно, множество M — множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует $f''(x)$. Для заданной функции $f(x)$ вторая производная равна $g(x) = f''(x) = \gamma(\gamma-1)|x|^{\gamma-2}$ при $x \in M$.

При $\gamma \in \{0, 1\}$, $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому а) — да.

При $\gamma = 0$, $g(x) \equiv 0$ на $M = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, при $\gamma = 2$, $g(x) \equiv 2$ на $M = \mathbf{R}$. Поэтому б) — да.

При всех $\gamma \geqslant 2$ вторая производная существует на всей прямой, то есть $M = R$. Поэтому е) — да.

При всех $\gamma \leqslant 0$ сама функция $f(x)$, а значит и ее вторая производная не существует в нуле, поэтому $M \neq \mathbf{R}$ и ж) — да.

Заметим, что при $\gamma \notin \{0, 1\}$ функция $g(x)$ может равняться нулю только в точке $x = 0$. Поэтому при всех $\gamma < 0$ и $x \in M$ $g(x) > 0$, а значит г) — да.

При всех $\gamma > 2$ вторая производная существует на всей прямой и не ограничена. Поэтому д) — да.

Если $\gamma = 1$, то $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому з) — нет.

Наконец заметим, что $g(x)$ — четная функция, поэтому количество ненулевых решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четно. Нулевое решение могло бы быть возможно только при $\gamma = g(0) = 0$, однако тогда $M = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому в) — да.

Задача 3. Выразим $|x| = 1 - y^2$ из определения множества M и подставим в функцию $f(x, y)$:

$$g(y) = (1-y^2)^2 + 2y^2 + 2(1-y^2)y^3 = -2y^5 + y^4 + 2y^3 + 1,$$

где $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Исследуем функцию $g(y)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Возьмём производную и посмотрим, в каких точках $g'(y)$ обращается в ноль:

$$g'(y) = -10y^4 + 4y^3 + 6y^2 = 2y^2(3 + 2y - 5y^2) = 2y^2(1-y)(3+5y).$$

Это означает, что точки, которые могут быть экстремумами функции $f(x, y)$ — это $y = 0, x = \pm 1$, $y = 1, x = 0$ и $y = -3/5, x = \pm 16/25$. Также возможно, что существует экстремум на границе области определения $[-1, 1]$ функции $g(y)$, то есть в точке $y = -1, x = 0$ для функции $f(x, y)$.

Вторая и третья производные функции $g(y)$ равны

$$g''(y) = -40y^3 + 12y^2 + 12y = 4y(3 + 3y - 10y^2),$$
$$g'''(y) = -120y^2 + 24y + 12 = 12(1 + 2y - 10y^2).$$

Найдем знаки второй производной функции $g(y)$ в точках экстремума, знак третьей производной в точке $(1, 0)$, а также значения функции $g(y)$ в этих точках:

$$g''(0) = 0,\ g'''(0) > 0,\ g''\left(-\frac{3}{5}\right) > 0,\ g''(1) < 0,\ g''(-1) > 0,$$
$$g(0) = 1,\ g\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2666}{3125} \approx 0.853,\ g(1) = 2,\ g(-1) = 2.$$

Следовательно, точки $y = 0, x = \pm 1$ являются точками локального минимума функции $f(x, y)$, точки $y = \pm 1, x = 0$ являются точками локального и глобального максимума функции $f(x, y)$, точки $y = -3/5, x = \pm 16/25$ являются точками локального и глобального минимума функции $f(x, y)$. Отсюда следуют ответы на вопросы задачи: а) нет, б) нет, в) да, г) да, д) да, е) нет, ж) нет, з) нет.

Задача 4. Правая часть дифференциального уравнения не определена при $t \geqslant 4$, так что никакое решение задачи Коши не может быть определено при всех t (ответ на вопрос а) — нет).

Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{\sqrt{16 - t^2}},$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = \arcsin\frac{t}{4},$$

так что

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 - \arcsin(t/4)}.$$

Видно, что при $x_0 > 1/\arcsin(3/4)$ знаменатель обращается в ноль при подходящем $t < 3$ (ответ на вопрос б) — нет). Напротив, при малых x_0 (меньших $2/\pi$) знаменатель положителен и отделен от нуля при всех $t < 4$, так что решение ограничено (ответ на вопрос в) — да). Положительный ответ на вопрос г) следует из явного вида решения задачи Коши. Ответ на вопрос д) — да (достаточно выбрать $x_0 = 1/\arcsin(\tau/4)$). Далее, для того, чтобы было определено $x(2)$, требуется $x_0 < 2/\pi < 1$ и значит посылка в утверждении е) никогда не выполнена, таким образом, ответ на вопрос е) — да. Из явного вида функции $x(t)$ имеем

$$x(t) - x(0) = \frac{x_0^2 \arcsin(t/4)}{1 - x_0 \arcsin(t/4)},$$

так что ответ на вопрос ж) — нет. Наконец, нетрудно видеть, что при $x_0 = 3/\pi < 1$ решение задачи Коши существует только при $t < 2\sqrt{3} < 7/2$, так что ответ на вопрос з) — нет.

Задача 5. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что все три вектора попарно ортогональны, поэтому они образуют базис и могут соответствовать разным собственным числам матрицы A. Обозначим эти собственные числа через λ_1, λ_2 и λ_3 соответственно. Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$. Следовательно,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, откуда следует, что матрица A ортогональная (вопросы а) нет, б) нет, в) да).

Пусть $\alpha = 0$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что в этом случае векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3x_1 + x_2 + 3x_3$. Следовательно,

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = 3Ax_1 + Ax_2 + 3Ax_3 = 3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 3\lambda_1 x_3 =$$

$$= 3\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + 3\lambda_1\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\lambda_1 - 2\lambda_2\\ \lambda_2\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, откуда следует, что матрица A задает проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором x_2 (вопросы г) да, д) нет).

Пусть $\alpha = -1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Аналогично случаю $\alpha = 0$ векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = -3x_1 + x_2 - 3x_3$. Следовательно,

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = -3Ax_1 + Ax_2 - 3Ax_3 = -3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 3\lambda_1 x_3 =$$

$$= -3\lambda_1\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} - 3\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\lambda_1 - 2\lambda_2\\ \lambda_2\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-1\\7\end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что эта система не имеет решений (вопросы е) нет, ж) нет, з) да).

4 Вступительный экзамен 2014 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$.

II. Если $f(x)$ имеет разрыв первого рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

III. Если $f(x)$ имеет разрыв второго рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

2. Пусть A — счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A множество внутренних точек A счетное

B множество граничных точек A счетное

C множество внешних точек A не более, чем счетное

D множество внешних точек A имеет мощность континуума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — подмножества вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если среди множеств A_n есть хотя бы одно открытое, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

B если среди множеств A_n есть хотя бы одно замкнутое, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

C если все множества A_n открытые, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

D если все множества A_n замкнутые, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Пусть A и B — непустые ограниченные подмножества $\mathbf{R}$. Обозначим через $A-B$ множество $\{x-y\colon x\in A, y\in B\}$, а через $\sup X$ и $\inf X$ — точную верхнюю и точную нижнюю грань множества X соответственно. Найдите *ложное* утверждение

A если $\sup A > \sup B$, то $\sup(A-B) > 0$

B если $\sup A < \sup B$, то $\sup(A-B) < 0$

C если $\sup A > \inf B$, то $\sup(A-B) > 0$

D если $\sup A < \inf B$, то $\sup(A-B) < 0$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

5. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — две системы векторов в $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$, а L_X и L_Y — их линейные оболочки соответственно. Тогда

A если сумма $L_X + L_Y$ прямая, то системы X и Y линейно независимые

B если системы X и Y линейно независимые, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

C если объединенная система $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ линейно независимая, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

D если объединенная система $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ линейно зависимая, то сумма $L_X + L_Y$ не прямая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$, где $n, m \geqslant 2$, x — столбец длины n, y и b — столбцы длины m. Через A^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Тогда

A система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $BAx = Bb$

B система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $A^T Ax = A^T b$

C система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $ABy = b$

D система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $AA^T y = b$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — ортогональные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $\det A = 1$, $\det B = -1$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ ортогональная

B при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ невырожденная

C существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ задает оператор проектирования

D существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ вырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, где $n, m \geqslant 2$. Обозначим через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Im} \mathbf{A} + \operatorname{Im} \mathbf{B}$

B $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \supset \operatorname{Im} \mathbf{A} \cap \operatorname{Im} \mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker} \mathbf{A} \cap \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker}\mathbf{A} + \operatorname{Ker}\mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$, для которой выполнено равенство $A^2 + 2A = 0$. Тогда

A матрица A вырожденная

B у матрицы A существует положительное собственное число

C у матрицы A существует отрицательное собственное число

D матрица $-A$ задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть A и B — симметричные положительно определенные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A \neq B$ и $\det A = \det B$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Обозначим также через x^{T} транспонированный столбец x. Тогда

A множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ пустое

B множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ непустое ограниченное

C множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ неограниченное, не совпадающее с $\mathbf{R}^n$

D множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ — все пространство $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Определим в $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение и обозначим через A^{T} матрицу, транспонированную к A. Тогда

A если $A^{\mathsf{T}}A$ задает ортопроектор в стандартном базисе, то A тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

B если A задает ортопроектор в стандартном базисе, то $A^{\mathsf{T}}A$ тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

C если $A^{\mathsf{T}}A$ задает проектор в стандартном базисе, то A тоже задает проектор в стандартном базисе

D если A задает проектор в стандартном базисе, то $A^{\mathsf{T}}A$ тоже задает проектор в стандартном базисе

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A — симметричная матрица порядка $n \geqslant 2$. Известно, что для любого столбца $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется равенство $x^T A x = 0$ (здесь через x^T обозначена строка, транспонированная к x). Тогда

A матрица A невырожденная

B матрица A ортогональная

C матрица A задает ортопроектор в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении

D матрица A задает проектор, но не ортопроектор, в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = (y^2 + 1)x$, $y(0) = 0$. Тогда значение $y(\pi)$ равно

A 0

B 1

C $\operatorname{arctg} \sqrt{\pi}$

D $\operatorname{tg} \dfrac{\pi^2}{2}$

E другому числу или не определено

14. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2}$, $y(1) = 1$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

15. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех вещественных чисел, причем функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ непрерывны в каждой точке. Тогда

A функция $f(g(f(x)))$ непрерывна в каждой точке

B функция $g(f(g(x)))$ дифференцируема в каждой точке

C функция $f^2(x) + g^2(x)$ непрерывна в каждой точке

D — функция $f(g(f(g(x))))$ непрерывна в каждой точке

E — все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-1, 1)$. Тогда

A — если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1, 1)$, то и функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1, 1)$

B — если существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наименьшего, либо наибольшего значения на интервале $(-1, 1)$

C — если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1, 1)$, то существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$

D — если существуют конечные предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ и предел справа $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1, 1)$

E — все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x, y) = \sin^4(\pi xy) + \cos^4(\pi xy)$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A — достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B — достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C — достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D — достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E — не достигает наибольшего значения

18. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках. Тогда

A — множество точек, в которых $f(x)$ достигает наименьшего значения, содержит изолированные точки

B — функция $f^3(x) - f^2(x) + 5f(x) - 14$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках

C — на отрезке $[0, 1]$ содержится не менее пяти точек, в которых производная $f'(x)$ существует и равна нулю

D — если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E — все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Числовая функция $f(x)$ определена в окрестности точки 0 на вещественной прямой. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то она непрерывна и в некоторой окрестности точки 0

B если функция $f(x)$ дифференцируема в точке 0, то она дифференцируема и в некоторой окрестности точки 0

C если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то функция $g(x, y) = f(xy)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

D если функция $f^2(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $f^3(x)$ непрерывна в точке 0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{1/x} - x^2 - x - \alpha)$ при $\alpha > 0$

A равен 0

B равен $1 - \alpha$

C равен $-\alpha$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{672} - 2\cos(x^{1007}) - \sin(x^{672}) + 2}{x^{2014}}$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

22. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - (\cos x)^{\ln(x+1)}}{x^4}$

A равен 0

B равен 5

C равен 10

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}$

A равен 1

B равен 2

C равен $\ln 2$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

24. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

A равен 0

B равен 1

C равен $1/e$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

25. Сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

равна

A $3/2$

B $3\ln(2)$

C $2\ln(3)$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

26. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2014}{2^n}$$

равна

A -2012

B -2011

C -2010

D -2009

E -2008

27. Сумма ряда

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+3}$$

равна

A $1/4$

B $1/2$

C $3/4$

D 1

E $3/2$

28. Точка A движется по прямой $4x = 3y$ с постоянной скоростью 5 м/сек, точка B движется по прямой $5x = 12y$ с постоянной скоростью 13 м/сек. Обе точки движутся в направлении увеличения координат. В начальный момент точка A имеет координаты $(6\,\text{м}, 8\,\text{м})$, точка B в начальный момент находится в начале координат. Через сколько секунд после начала движения расстояние между точками A и B будет наименьшим?

A через 11/13 секунды

B через 31/41 секунды

C через 23/25 секунды

D через 12/17 секунды

E через число секунд, отличное от указанных в A, B, C, D

29. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два числовых ряда. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если оба ряда сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

II. Если оба ряда абсолютно сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

III. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ абсолютно сходится.

A только I

B только I и II

C	только I и III

D	только II и III

E	I, II и III

30. Числовая функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A	если функция $f(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является ограниченным множеством

B	если функция $f(x)$ не ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является неограниченным множеством

C	если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ компактно, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является компактным множеством

D	если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не является открытым, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ не является открытым множеством

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. К графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ проведена касательная в точке $\left(a, \dfrac{1}{a^2}\right)$, $a > 0$. Пусть $S(a)$ — площадь треугольника, образованного отрезком касательной между осями координат и отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат. Тогда производная $S'(3)$ равна

A	$-1/4$

B	$3/2$

C	$-2/3$

D	$1/6$

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

32. Пусть

$$f(x) = \int_1^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt, \ x \in \mathbf{R}.$$

Через $f^{-1}(x)$ обозначим функцию, обратную к $f(x)$. Тогда

A	$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

B	$(f^{-1})'(0) = 2\sqrt{2}$

C	$(f^{-1})'(0) = 2$

D	$(f^{-1})'(0) = 0$

E производная $(f^{-1})'(0)$ равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует.

33. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^2+y^3-6y^2+9y=8$. Через точку $(2,1)$ проведена касательная к этой кривой. Тогда

A касательная пересекает ось Oy в точке $(0,5)$

B касательная пересекает ось Oy в точке $(0,-5)$

C касательная пересекает ось Oy в точке $(0,3)$

D касательная не пересекает ось Oy

E в точке $(2,1)$ не существует касательной к этой кривой

34. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и $c \leqslant f(x) \leqslant d$ при любом $x \in [a,b]$, а функция $g(x)$ задана на отрезке $[c,d]$. Найдите *ложное* утверждение

A если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и функция $g(x)$ непрерывна на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

B если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и функция $g(x)$ интегрируема на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

C если функция $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и функция $g(x)$ возрастает на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

D если функция $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и функция $g(x)$ убывает на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

35. Последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1}=\sqrt{x_n^2+1}$ при $n \geqslant 1$. Тогда

A существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ ограничена

B существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ сходится

C существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ не убывает

D существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ не возрастает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ равен

A -1

B 0

C 1

D e

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

37. Предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2(1/x)(1-\cos x)}{x}$ равен

A 0

B 1

C $1/e$

D e

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Область сходимости функционального ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}(x-4)^n$ равна

A $(4-1/e, 4+1/e)$

B $(4-1/e, 4+1/e]$

C $[4-1/e, 4+1/e)$

D $[4-1/e, 4+1/e]$

E множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

39. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\pi\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-1/k)\right)^n$ равен

A 0

B 1

C π^e

D e^π

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

40. Интеграл $\displaystyle\int_0^{2x}|t-x|dt$ при $x\geqslant0$ равен

A 0

B 1

C x

D x^2

E выражению, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

4.1.2 Вторая часть теста

1. Матрица P задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^4$, и два вектора

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

являются ее собственными векторами. Известно, что ранг матрицы P равен двум, и матрица $2P - I$, где через I обозначается единичная матрица, ортогональная. Тогда

а) матрица P симметричная;

Да Нет

б) матрица P не симметричная;

Да Нет

в) существует ровно две матрицы P, удовлетворяющие поставленным условиям;

Да Нет

г) существует ровно шесть матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

д) существует бесконечно много матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

е) сумма элементов матрицы P равна 2;

Да Нет

ж) матрица P имеет ровно шесть положительных элементов;

Да Нет

з) матрица P имеет ровно шесть отрицательных элементов.

Да Нет

2. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n + x|^{\alpha}},$$

где $\alpha \geqslant 0$ — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости, а через $f(x)$ — сумму этого ряда для всех $x \in M$. Тогда

а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является открытым;

Да Нет

в) существует α, для которого множество M содержит изолированную точку;

Да Нет

г) для любого α ряд на множестве M сходится равномерно;

Да Нет

д) при $\alpha = 2$ множество M является замкнутым;

Да Нет

е) при $\alpha = 3$ ряд на множестве $M \cap [1, +\infty)$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет более 2014 решений на множестве M;

Да Нет

з) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет не более одного решения на множестве M.

Да Нет

3. Дано семейство функций $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - a} - 3}{x - b}$, где параметры $a, b \in \mathbf{R}$. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}^2$ множество пар чисел (a, b), для которых существует и конечен предел $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, а через $K \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $f(x)$. Тогда а) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K симметрично относительно нуля;

Да Нет

б) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K не симметрично относительно нуля;

Да Нет

в) существует более одной пары чисел (a, b), для которых множество $\mathbf{R} \setminus K$ не замкнуто и не открыто;

Да Нет

г) существует пара чисел (a, b), для которой функция $f(x)$ ограничена на K;

Да Нет

д) множество $M \cap (-\infty, 0)^2$ не ограничено;

Да Нет

е) множество $M \cap (0, +\infty)^2$ не ограничено;

Да Нет

ж) множество значений предела $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ при $(a, b) \in M \cap (0, +\infty)^2$ ограничено;

Да Нет

з) множество значений предела $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ при $(a, b) \in M \cap \{(a, b) \colon a^2 + b^2 \leqslant 9\}$ имеет непустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2 e^{-t}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) при любом значении x_0 функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) множество значений x_0, при которых $x(t)$ ограничена на своей области определения, открыто;

Да Нет

в) существуют значения x_0, при которых $x(t)$ периодическая;

Да Нет

г) при любом x_0 множество нулей функции $x(t)$ открыто;

Да Нет

д) если в некоторой точке t значение второй производной функции $x(t)$ равно нулю, то и значение самой функции в этой точке равно нулю;

Да Нет

е) если $x_0 = 2/3$, то $\sin x(t)$ возрастает на своей области определения;

Да Нет

ж) если $x_0 = 2$, то $x(1) = \dfrac{2e}{2-e}$;

Да Нет

з) если $x_0 = -1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -1/2$.

Да Нет

5. Дана функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon xy + yz + {} + xz = 1\}$. Тогда

а) множество M компактное;

Да Нет

б) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

в) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

г) число точек локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M не меньше трех;

Да Нет

д) точка $(1, 1, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

е) число точек локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M нечетно;

Да Нет

ж) точка $\left(0, 2, \frac{1}{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. B. **2.** E. **3.** E. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** D. **8.** A. **9.** E. **10.** C. **11.** B. **12.** C. **13.** E. **14.** A. **15.** D. **16.** E. **17.** D. **18.** B. **19.** C. **20.** D. **21.** B. **22.** E. **23.** D. **24.** A. **25.** E. **26.** A. **27.** C. **28.** B. **29.** D. **30.** E. **31.** A. **32.** A. **33.** D. **34.** B. **35.** C. **36.** C. **37.** A. **38.** C. **39.** D. **40.** D.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Возведем в квадрат матрицу $2P - I$ и преобразуем полученное выражение, воспользовавшись соотношением $P^2 = P$, справедливым для проектора P:

$$(2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I.$$

По условию известно, что $(2P-I)(2P-I)^{\mathsf{T}} = I$ (так как матрица $2P-I$ ортогональная), поэтому $(2P - I)^{\mathsf{T}} = 2P - I$, а значит и $P^{\mathsf{T}} = P$ (ответы на вопросы а) — да, б) — нет).

Так как P задает проектор в $\mathbf{R}^4$ и имеет ранг 2, то она имеет два собственных числа — единицу и ноль, оба кратности 2. Так как матрица P симметричная, то она задает ортопроектор, и собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны друг другу (при стандартном скалярном произведении). И так как собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

не ортогональны, то они соответствуют одному собственному числу, обозначим его через λ. Это может быть как единица, так и ноль. В первом случае P задает ортопроектор на двумерное подпространство — линейную оболочку

$$L = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

во втором случае P задает ортопроектор на ортогональное дополнение к L. Ответы на вопросы в) — да, г) — нет, д) — нет.

Далее, заметим, что вектор

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ортогонален обоим из заданных векторов. Поэтому это тоже собственный вектор, и он соответствует другому собственному числу $1-\lambda$. Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_{ij} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1-\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix} = 2\lambda + 2(1-\lambda) = 2
\end{aligned}$$

(ответ на вопрос е) — да).

Чтобы сосчитать число положительных и отрицательных элементов матрицы P, найдем ее. А именно, воспользуемся соотношением

$$P = X \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} X^{-1},$$

где столбцы матрицы X являются соответствующими собственными векторами матрицы P. Можно заметить, что если векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу λ, то векторы

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ортогональны им, а значит являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу $1-\lambda$. Также ортогонализуем исходную пару векторов (вычтем первый вектор из второго) и получим:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Нормируем эти четыре вектора и получим ортонормированную систему состоящую из собственных векторов матрицы P:

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix},$$

и матрицу

$$X = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2\end{pmatrix},$$

для которой $X^{-1} = X^{\mathsf{T}}$. Теперь легко сосчитать для $\lambda = 1$

$$P = X\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}X^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix},$$

и в ней ровно 6 отрицательных и 10 положительных элементов. Для $\lambda = 0$

$$P = I - \begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4\\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix},$$

и в ней тоже ровно 6 отрицательных и 10 положтельных элементов (ответы на вопросы ж) — нет, з) — да).

Задача 2. Данный ряд имеет счётное число особенностей — он не определён в точках $x = -1, -2, -3, \ldots$. Кроме того, ряд не определён в точках, в которых $x(x-1) < 0$, т. е. на интервале $(0, 1)$, — на нём при достаточно большом значении n числитель не определён. Отметим, что для любого α ряд сходится в точках $x = 0$ и $x = 1$, и что все члены ряда неотрицательны.

а) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится в точках, сколь угодно близких к -1, поскольку при $n \geqslant 3$

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^4} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^4} = \frac{n}{|n+x|}\frac{x(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant 3\frac{x(x-1)}{|n-1|^3}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, и следовательно, сходится исходный ряд. В то же время в точке -1 ряд не определён, следовательно, множество сходимости не является замкнутым.

б) Ответ: нет. Поскольку точки 0 и 1 всегда являются точками сходимости ряда, а точки внутри интервала $(0, 1)$ таковыми не являются, то множество сходимости не является открытым.

в) Ответ: да. Например, для $\alpha = 1$ ряд сходится в точке $x = 0$, не определён при $x \in (0, 1)$ и не сходится в левой окрестности точки $x = 0$: при $x < 0$

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1 + x(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1 + x(x-1))}{n}.$$

Поскольку ряд из последних слагаемых не сходится, то и исходный ряд не сходится.

г) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится на множестве $M = [0, +\infty) \cup (-1, 0] \cup \cup (-2, -1) \cup (-3, -2) \cup \ldots$ (рассуждения такие же, как и в пункте а). В то же время для любого n

$$\lim_{x \to -n} \frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|} = +\infty,$$

откуда следует, что общий член ряда не стремится к нулю равномерно на M, а значит ряд не сходится равномерно на M.

д) Ответ: нет. Мы можем оценить при $x \in (-1, 0)$ и достаточно больших n

$$\ln(1 + nx(x-1)) \leqslant \ln(1 + 2n) \leqslant Cn^{1/2},$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Тогда

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^2} \leqslant \frac{Cn^{1/2}}{|n+x|^2} = \frac{n^{1/2}}{|n+x|^{1/2}}\frac{C}{|n+x|^{3/2}} \leqslant \frac{2C}{|n-1|^{3/2}}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, значит, сходится и исходный ряд. В то же время, в точке -1 ряд не определен, и значит, множество M не замкнутое.

е) Ответ: да. При $\alpha = 3$ и $x \geqslant 1$ общий член ряда можно оценить следующим образом:

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx^2}{(n+x)^3} \leqslant \frac{n}{(n+1)^3}$$

(последнее неравенство верно, так как функция $\dfrac{nx^2}{(n+x)^3}$ убывает при $x \geqslant 1$). Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исходный ряд сходится равномерно.

ж–з). Отметим, что по соображениям, аналогичным пункту а), данный ряд сходится на множестве $M = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n, -n+1)\right) \cup [1, +\infty)$.

Отметим также, что числитель дроби убывает по x при $x < 0$.

Рассмотрим поведение ряда в полуинтервале $x \in (-n, -n+1/2]$, $n = 2, 3, \ldots$. На нём член ряда с номером n можно оценить как

$$\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} \geqslant \frac{\ln(1+n(-n+1/2)(-n-1/2))}{|1/2|^{2014}} = \\ = 2^{2014}\ln(1+n(n^2-1/4)) \geqslant 2^{2014}.$$

В то же время на полуинтервале $x \in [-n+1/2, -n+1)$ член ряда с номером $n+1$ можно оценить как

$$\frac{\ln(1+(n+1)x(x-1))}{|n+x|^{2014}} \geqslant \frac{\ln(1+(n+1)(-n+1)(-n))}{|1/2|^{2014}} = \\ = 2^{2014}\ln(1+(n+1)(n^2-n)) \geqslant 2^{2014}.$$

Поскольку все члены ряда неотрицательные и по крайней мере один из них превосходит 2014, то решений на интервалах $(-n, -n+1)$, $n = 2, 3, \ldots$ нет.

На множестве $x \in [1, \infty)$ решений нет, поскольку ряд можно оценить следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx(x-1)}{|n+x|^{2014}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|n+x|}\frac{x^2}{|n+x|^2}\frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Остаётся исследовать полуинтервал $(-1, 0]$. При приближении к левой его точке сумма ряда растёт неограниченно. В правой точке значение ряда равно 0. При этом каждый член ряда убывает по x в этом полуинтервале. Следовательно, у уравнения есть единственное решение именно в полуинтервале $(-1, 0]$.

Ответ на вопрос ж) — нет, на вопрос з) — да.

Задача 3. Для последовательности пар чисел $(a, b) = (n^2, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x\colon x^2 \geqslant n^2\}$ симметрично относительно нуля, поэтому а) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (0, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x\colon x \neq n\}$ не симметрично относительно нуля, поэтому б) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (n^2, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $R \setminus K = (-n, n]$ не замкнуто и не открыто, поэтому в) — да.

Для пары чисел $(a, b) = (1, 0)$, множество $K = \{x\colon x^2 \geqslant 1\}$, и $|f(x)| \leqslant |\sqrt{1 - x^{-2}}| + |3/x| < 4$ на K, поэтому г) — да.

Если предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ конечен, то необходимо, чтобы $\lim\limits_{x\to b} \sqrt{x^2 - a} - 3 = 0$, т. е. $a = b^2 - 9$. Поэтому $M \cap (-\infty, 0)^2 \subset [-9, 0]^2$, д) — нет.

Если $a = b^2 - 9$, то предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует и равен $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a}} = b/3$, а $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\colon a = b^2 - 9\}$, поэтому е) — да, ж) — нет.

Парабола $a = b^2 - 9$ пересекает окружность $a^2 + b^2 = 9$ в четырех точках: $(0, 3)$, $(0, -3)$, $(-1, 2\sqrt{2})$ и $(-1, -2\sqrt{2})$. На множестве $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$ параметр b принимает значения $[-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3]$. Так как $e < 2.8 < 2\sqrt{2}$, то множество значений предела $\lim\limits_{x\to b} f(x) = b/3$, имеет пустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$, поэтому з) – нет (см. рис. 1).

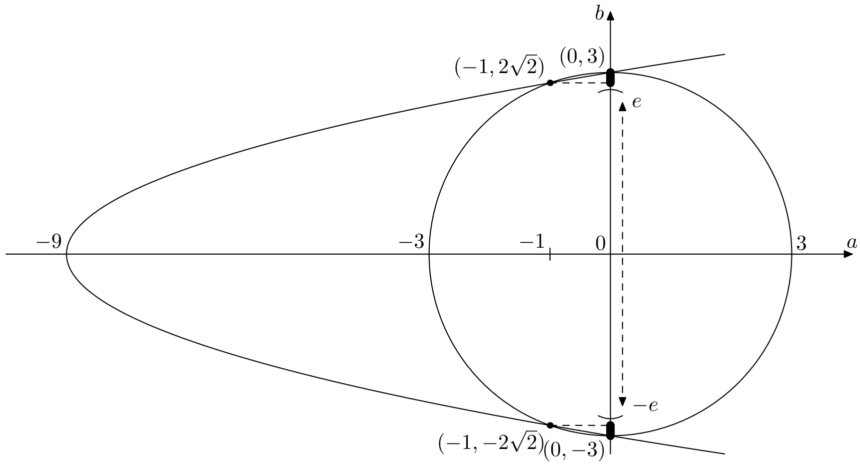

Рис. 1. Множество $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$

Задача 4. Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = e^{-t} dt,$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = -e^{-t},$$

так что при $x_0 \neq 0$

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t} + 1/x_0 - 1}.$$

Видно, что при $x_0 > 1$ знаменатель обращается в ноль при некотором t (ответ на вопрос а) — нет). Далее, при $x_0 = 0$ решение тождественно равно нулю (ответ на вопрос в) — да), а при любом отрицательном x_0 знаменатель обращается в 0 при некотором t_0 и при приближении к t_0 решение неограниченно растет по абсолютной величине (ответ на вопрос б) — нет). Функция $x(t)$ не обращается в ноль ни при каких t при $x_0 \neq 0$ (ответ на вопрос г) — да). Для ответа на вопрос д) заметим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}x^2e^{-t} = -x^2e^{-t} + 2xe^{-t}\frac{dx}{dt} = x^2e^{-t}\left(2xe^{-t} - 1\right),$$

что, например, при $x_0 = e/(e+1)$ обращается в ноль при $t = 1$, так что ответ — нет.

При $x_0 = 2/3$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} + 1/2)$ возрастает на всей прямой, принимая значения в интервале $(0, 2)$, однако функция $\sin x$ на этом интервале не возрастает монотонно (ответ на вопрос е) — нет). При $x_0 = 2$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 1/2)$ определено только при $t < \ln 2$ (ответ на вопрос ж) — нет). Наконец, при $x_0 = -1$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 2)$ определено при всех $t > 0$ и стремится к $-1/2$ при $t \to +\infty$ (ответ на вопрос з) — да).

Задача 5. Заметим, что точка $(n, 1/n, 0)$ принадлежит множеству M при любом натуральном n. Значит, множество M не ограничено, а значит и не является компактным. Ответ на вопрос а) — нет. Имеем $f(n, 1/n, 0) = n^2 + 1/n^2$, т. е. значения функции $f(x, y, x)$ на M не ограничены сверху. Поэтому ответ на вопрос б) — нет.

Так как $f(x, y, z) \geqslant 0$ при всех x, y, z, то существует точная нижняя грань $\inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\}$. Обозначим ее через a. Точка $(1, 1, 0)$ принадлежит M, и $f(1, 1, 0) = 2$, значит $a \leqslant 2$. Рассмотрим куб $K = \{(x, y, z) \colon |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2, |z| \leqslant 2\}$. Ясно, что если $(x, y, z) \notin K$, то $f(x, y, z) > 2$. Значит,

$$a = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\} = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M \cap K\}.$$

Множество M замкнуто как поверхность уровня непрерывной функции, а куб K компактен. Значит, множество $M \cap K$ компактно, и по теореме Вейерштрасса точная нижняя грань достигается, поскольку функция $f(x, y, z)$ непрерывна. Ответ на вопрос в) — да.

Обозначим $g(x, y, z) = xy + xz + yz - 1$. Нетрудно проверить, что градиент функции $g(x, y, z)$ равен нулю только в точке $(0, 0, 0)$, а она не принадлежит M. Поэтому функцию Лагранжа для этой задачи можно взять сразу в виде $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(y + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(x + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda(x + y) = 0. \end{cases}$$

Складывая почленно все уравнения, получаем $(x + y + z)(\lambda + 1) = 0$.

1-й случай: $x + y + z = 0$. Возводя в квадрат обе части равенства и проводя элементарные преобразования, получаем $xy + xz + yz = -\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \leqslant 0$, что несовместимо с ограничением $g(x, y, z) = 0$.

2-й случай: $\lambda = -1$. Вычитая из первого уравнения второе получаем $x = y$, и аналогично $y = z$. Следовательно, единственной стационарной точкой задачи является точка $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Поскольку существование наименьшего значения функции $f(x, y, z)$ на множестве M доказано, то точка A и есть единственная точка, в которой это наименьшее значение достигается.

Ответы на вопросы г), д), ж) — нет, на вопросы е), з) — да.

5 Формат вступительного экзамена 2015 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей.

   Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 2 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет». Число вопросов в пределах каждого блока может быть различным.

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 2 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780—819 баллов	11
750—779 баллов	10
720—749 баллов	9
680—719 баллов	8
640—679 баллов	7
600—639 баллов	6
560—599 баллов	5
520—559 баллов	4
480—519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской экономической школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей;
* подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Углубленный курс (с менторством или без менторства): февраль—июль 2015 г. Начало занятий — 18 февраля.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда с 19:30, 3 ак. часа лекция, и суббота с 10:00, 2 ак. часа семинар).
* **Ускоренный курс: апрель—июль 2015 г. Начало занятий и расписание будут объявлены в марте.**
  В ускоренном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы.

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. +7-495-956-9508 (доб. 103), email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись лекций на подготовительных курсах РЭШ по математике. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Календарь абитуриента 2015 г.

8.1 Заполнение анкеты с приложениями online

с 30 апреля по 15 июля 2015 г.

8.2 Вступительные экзамены

с 20 по 24 июля 2015 г.

8.3 Прием документов для прошедших по конкурсу

до 30 июля 2015 г. при поступлении на бюджетные места

до 4 августа 2015 г. при поступлении на места с оплатой стоимости обучения

9 Приемная комиссия РЭШ

Телефоны: +7-495-956-9508 (доб. 103, 143), +7-903-188-5516.

Email: abitur@nes.ru.

Web: http://www.nes.ru.

Адрес: 143026, Москва, деревня Сколково, ул. Новая, д.100А, РЭШ