

Кушнир А.И.

Проблема коллективных действий в революциях

Препринт # BSP/2006/083 R

Эта работа была написана на основе магистерских тезисов в РЭШ в 2006 году в рамках исследовательского проекта “Диктаторы и олигархи” под руководством С.М. Гуриева (РЭШ, ЦЭФИР), К.И. Сонина (РЭШ, ЦЭФИР).

Проект осуществлен при поддержке Фонда Форда, Всемирного Банка и Фонда Джона и Кэтрин МакАртуров.

Москва
2006

Кушнир А.И. Проблема коллективных действий в революциях. / Препринт # BSP/2006/083 R. - М.: Российская Экономическая Школа, 2006. – 41 с. (Рус.)

Большая часть литературы, касающаяся проблемы коллективных действий, является либо эмпирическими исследованиями, либо описательными социологическими работами. Они направлены, скорее не на математическое исследование проблем, а на описание фактов и выявление социологических причин поведения людей. Всего лишь несколько работ в этой области рассматривают математические модели теории игр для анализа интересующих их вопросов.

Эта работа является шагом на пути создания общей теоретико-игровой модели революционных движений. Построенная модель рассматривает проблему зарождения революционных движений и механизмы, определяющие их взаимодействие, объединение и распад. Также более подробно исследуется спецификация модели, в которой главным мотивом людей участвовать в революционных движениях являются привилегии лидерства. Результатом данной работы является то, что привилегии лидерства позволяют решить изначальную проблему координации. В тоже время они препятствуют дальнейшему объединению групп в единое революционное движение, которое является наиболее оптимальным с точки зрения победы революции. То есть привилегии лидерства приводят к возникновению вторичной проблемы коллективных действий.

Ключевые слова: коллективные действия, революция, привилегии лидерства, коалиция, вторичная проблема коллективных действий

Alexey Kushnir. Collective action problem in revolutions./ Working Paper # BSP/2006/083 R. – Moscow, New Economic School, 2006. – 41 p. (Rus.)

Most of articles concerning collective action in revolutions represent either empirical investigations or pure descriptive sociological works. Their aim is rather not to examine the problem by mathematical tools, but to describe facts and to establish the sociological motives of human behavior. Only few works in this field use mathematical models of game theory for their analysis.

This paper is a step towards development of a general game-theoretic model of revolutionary movements. A proposed framework analyzes the question of revolution movements' initiation and the mechanisms of further coalition building and break-up. Then, the paper investigates a model which is a specification of the general framework where the main incentive of citizens to participate in revolution movements is leadership benefits. Its central inference is that leadership benefits help to solve the initial problem of collective action. However, they prevent groups from the unification into one revolutionary movement, which is the optimal strategy for revolution success. Consequently, leadership benefits lead to the secondary problem of collective action.

Key words: collective action, revolution, leadership benefits, coalition building, the secondary problem of collective action

ISBN

© Кушнир А.И., 2006 г.

© Российская экономическая школа, 2006 г.

Содержание:

1. Введение.....	4
2. Проблема предоставления общественных благ и возможные пути ее решения	7
3. Модель.....	12
4. Равновесное количество групп.....	18
5. Заключение.....	28
6. Приложение.....	29

1 Введение

На сегодняшний момент большая часть литературы, посвященная проблеме коллективных действий, рассматривает революции как события, которые не могут быть объяснены рациональным поведением индивидов. Главным вопросом является, почему люди прикладывают усилия, терпят издержки, идут на риск в то время, как выгода предоставляется в независимости от их участия. Еще в девятнадцатом веке проблема коллективных действий интересовала ученых (Милль(1883), Сидгвик(1883)), но наиболее фундаментальной и всеохватывающей работой в этой области считается работа Мансура Олсона «Логика коллективных действий»(1965), которая стала классической книгой для многих западных и русских социологов и экономистов.

Целью данной работы является построение общего теоретико-игрового подхода к моделированию коалиционного поведения граждан и взаимодействия революционных групп. На его основании возможно рассмотрение различных стимулов граждан для участия в революционных движениях. Его общность нацелена на то, чтобы, используя базы данных и результаты опросов по коллективным действиям, определить степень влияния каждого из стимулов и выявить наиболее значимые из них. В данной работе промоделирована одна из спецификаций предложенного подхода, в которой в качестве главного стимула участия индивидов в революционных движениях рассматриваются привилегии лидерства. На основании этой модели исследуется несколько понятий равновесных конфигураций групп, и как они зависят от величины привилегий лидерства. Основные результаты данной работы могут быть сформулированы следующими тремя утверждениями:

1. Хотя привилегии лидерства помогают решить изначальную проблему создания групп, они приводят к вторичной проблеме коллективных действий¹.

2. Величина общественного блага не играет какой-либо существенной роли

¹Понятие "вторичная проблема коллективных действий" было также использовано другими авторами (Элстер(1988), Ван Белле(1996)), но при анализе образования устойчивого ядра коллективных движений. В данной работе этот термин используется как характеристика проблемы взаимодействия революционных групп

при создании первых революционных групп.

3. Число революционных групп возрастает с увеличением немедленных привилегий лидерства и степени перераспределения привилегий лидерства, и оно убывает с увеличением ценности свержения существующего строя и величиной привилегий лидерства в случае успеха².

Несмотря на то, что есть и другие стимулы участия индивидов в коллективных действиях, такие как идеология и общественная мотивация, по мнению многих экономистов (Даунс (1957), Ван Белле (1996)) привилегии, которые получает лидер, являются зачастую главными мотивами для участия индивидов в революциях.

Работы, анализирующие проблему коллективных действий, могут быть разделены на три направления. Первое направление составляют чисто описательные социологические и политико-экономические работы (Олсон (1965), Зальд (1966, 1977), Ван Белле (1996)). Авторы этих работ в основном сосредоточены на описании возможных механизмов, определяющих взаимодействие революционных движений, однако они не строят моделей и не проводят эмпирических исследований. Зальд и Эш (1996), Ван Белле (1996) исследуют влияние стремления членов к лидерству на цели группы граждан и их сплоченность. Также, работа Зальда и Макарти (1977) подчеркивает важность фактора ресурсов, влияние средств массовой информации и общественных авторитетов на взаимодействие между общественными движениями.

Работы второго направления (Хавая (1993), Мюллер (1986, 1987), Юзем (1980)) сосредоточены на анализе баз данных по революционным волнениям. Эти базы данных состоят либо из статистики появления информации об общественных движениях в прессе, либо из опросов их участников. В отличие от предыдущих работ, результаты этих исследований подкреплены регрессионным анализом. Однако они не пытаются определить причины поведения граждан (агентов). Они не могут заложить основу возникновения теории революцион-

²Определение основных понятий будет приложено в следующих секциях. Интуиция состоит в том, что немедленные привилегия лидерства предоставляются в независимости от успеха революции, в то время как привилегии лидерства в случае успеха предоставляются только в случае победы революционного движения.

ных действий, потому что не строят никакой модели общественного поведения и взаимодействия движений.

Наконец, работы последнего направления пытаются анализировать революции, используя теоретико-игровой подход (Оливер, Роемер (1985), Скофельд (1975)). Главным преимуществом этих работ является то, что они пытаются определить рамки и предпосылки, в которых эти явления рассматриваются. Они четко формулируют предположения и законы взаимодействия между агентами, и используя методы теории игр, получают законы поведения агентов в тех или иных ситуациях. Однако из этого подхода вытекает и основной недостаток этих работ – узость рассматриваемых проблем. Работа Оливера и др. обозначает некоторые фундаментальные принципы создания и анализа формальных математических моделей общественных движений и может быть использована как руководство для создания новых моделей. Работа Роемера исследует возникновение революционного движения только с позиции стратегической игры двух игроков - лидеров движений. Также он рассматривает только идеологические причины возникновения общественных движений. Скофельд исследует поведение коалиций людей в рамках классической "дилеммы заключенного" и показывает, что существует критический размер групп, выше которого коалиции должны беспрепятственно увеличиваться в размерах. Но несмотря на очень интересные выводы его статьи, он рассматривает специфический вид благ, который не является ни полностью общественным, ни полностью частным. Автор делает очень строгие предпосылки относительно способа обеспечения этого блага индивидами, что делает его модель применимой только к очень узкому кругу общественных движений.

Дальнейшая работа будет организована следующим образом. Раздел 2 рассказывает о проблеме предоставления общественных благ и возможные ее решения. В разделе 3 представлена модель коллективных действий, использующая привилегии лидерства в качестве основных стимулов для участия индивидов в революционных движениях. В разделе 4 представлены основные результаты, анализирующие число революционных групп в равновесных состояниях модели. Заключительный раздел 5 подводит итоги и обозначает план для дальнейшего исследования.

2 Проблема предоставления общественных благ и возможные пути ее решения

Основываясь на исторических примерах, можно сказать, что ситуации в обществе перед величайшими революциями была очень нестабильной. Перед грядущими переменами царило обычно царило общее недовольство и чувствовался дух необходимых перемен. В связи с этим возникали группы граждан со схожими интересами, которые были недовольны существующим режимом (или правящей партией) в стране. Свержения этого режима для них было общественным благом, потому что оно удовлетворяет двум его основным свойствам: совместности потребления и неисключаемости. Первое из них подразумевает, что потребление блага одним индивидом не уменьшает потребления других. Второе говорит о невозможности ограждения каких-то индивидов от потребления данного блага. Если выполнены эти два условия, то сразу возникает проблема того, что каждый из индивидов может воспользоваться усилиями других, сам ничего не предпринимая. Каждый верит в то, что он не является "пivotalным" агентом, от решения которого будет зависеть, будет ли предоставлено общественное благо или нет (будет ли выиграна революция или нет). В итоге, для каждого агента кооперационная стратегия не будет оптимальной при условии того, что общественное благо предоставляется. В результате у людей нет стимулов участвовать в революционном движении, что связано с дополнительными усилиями, а так же возможными репрессиями за участие. Особенно это ярко выражено, если мы рассматриваем большое количество участников, влияние каждого из которых незначительно. Свержение существующего режима в группе с общими интересами является очень хорошим примером общественного блага, потому что для каждого из членов этой группы не важно будет ли он участвовать или нет в революционном движении. Свержение существующего режима в любом случае повлияет на ситуацию в стране.

Как уже упоминалось выше, одной из самых известных и цитируемых книжек по проблеме предоставления общественных и клубных благ является

книга Мансура Олсона «Логика коллективных действий» (1965). Несмотря на то, что этой книге более тридцати лет, в ней рассмотрены основные социологические подходы, применяемые при решении данной проблемы. Далее мы рассмотрим эти подходы более подробно. Сейчас же мы проанализируем, что выделяет группы, более успешные в предоставлении общественных благ. Во-первых, это доля «общего пирога», которую каждый из индивидов получает после создания коллективного блага. Олсон утверждает, что человек захочет быть членом какого-либо сообщества только, если он может получить достаточно большую часть от «общего пирога». Другой важной характеристикой участия человека в группе является степень влияния его решения на предоставление общественного блага. Если решение человека об участии не существенно для предоставления коллективного блага, то у человека снижаются стимулы к участию в общественном движении. Еще одной важной характеристикой, которая отличает одни группы от других, является ее размер. С ростом числа участников, роль отдельного участника группы уменьшается, уменьшается его доля коллективного блага. В итоге, если размер группы велик, каждый из участников получает малую часть пирога, и его решение мало влияет на вопрос о предоставлении блага, то движение, скорее всего, не будет организовано.

Другим, не менее значимым фактором является вид функции издержек организации группы. Часть издержек не зависит от количества членов – фиксированные издержки. Эти издержки связаны с процессом организации групп, сбора собраний, устраивание демонстраций, выступление на телевидении. Другие издержки пропорциональны количеству членов в группе и на прямую зависят от ее размера. Однако важен скорее не сам вид функции издержек, а вид предельных издержек. Олсон утверждает, что предельные издержки растут, что приводит к неэффективному производству общественных благ большими группами. Более того большие группы могут существовать только, как объединение более мелких, и ни одна большая группа не может быть создана, если не обладает внутренней иерархической структурой.

Из истории известно, что создание больших групп сопряжено с большими трудностями, и объединить большое количество людей возможно только во

времена переломов и сильного недовольства и то на не очень большой промежуток времени. Одной из характерных особенностей этих движений является то, что они создаются ради обеспечения какого-то общественного блага. Это политические, революционные и общественные движения в пользу или против какого-то закона, это забастовки и многие другие организованные выступления. Какой же механизм образования больших общественных движений? Почему большие группы создаются в реальной жизни? Какие причины определяют вопрос: смогут ли люди объединиться в одно всеобъемлющее движение? На первый взгляд на все эти вопросы нет очевидного ответа. Эта работа делает попытку построения теории больших групп, попробует объяснить какие факторы способствуют объединению маленьких групп, и что препятствует созданию больших общественных движений для производства общественных благ.

Сначала рассмотрим существующие в социологической и экономической литературе пути решения факторы, влияющие на пути решения проблемы предоставления общественного блага: идеология, косвенные платежи, платежи для участников движения, социальная мотивация, а так же привилегии лидерства, которые появились в более поздних работах.

Для начала рассмотрим первый фактор - понятие идеологии. Многие ученые считают, что идеология наиболее важный фактор, определяющий образование групп. Каждая из групп может преследовать различные цели, и участники групп могут иметь различные взгляды. Например, группы могут представлять интересы людей с различным доходом. Более богатые люди хотят снижения налогового бремени, в то время как менее обеспеченные хотят повысить налоговые ставки, чтобы увеличить размер предоставляемых общественных благ. Анализ идеологии очень важен, и наиболее сплоченные группы – это группы, где мнение членов почти полностью совпадает по главным вопросам. Однако это идеализация, и люди обычно никогда не имеют одну и ту же точку зрения на схожие проблемы. В работах, посвященных анализу проблемы коллективного поведения, обычно предполагается, что люди имеют одинаковые идеологические взгляды. Данная работа следует этой традиции и нацелена на исследование социологической части проблемы возникновения общественных движений, а не на исследование идеологической ее части.

Вторым фактором, влияющим на принятие решения индивидов, является социальная мотивация. Участие людей в общественных движениях может быть объяснено надеждой получить особую роль в обществе и общественное признание. Многие клубы и движения среднего размера были изначально инициализированы друзьями или родственниками. В таких объединениях социальные факторы играют исключительную роль. Часто члены клубов выросли в одном кругу или проработали достаточно много в одном месте, ходили в соседние школы. Это особенно заметно в группах малого или среднего размера, где люди видят друг друга почти каждый день и имеют очень тесные взаимосвязи. Например, Американское движение рабочих началось как раз с таких местных маленьких клубов. Первые трудовые профсоюзы были распространены в строительной, публицистической и обувной индустрии, где масштаб производства не велик. В начале своего развития эти движения имели огромное сопротивление со стороны работодателей, и согласно Фостер Рея Далс (1949) и Джону Коулу (1948) они выжили только благодаря социальной сплоченности членов клубов.

Третьим фактором, который помогает решить проблему предоставления общественного блага, являются избранные платежи. Эти платежи не являются общественными благами и платятся только людям, участвующим в движении. Их недостатком является то, что они являются крайне затратными, зато дают недвусмысленные стимулы людям участвовать в общественных акциях. Они бывают двух типов - стимулирующие и исключаяющие. Первый тип предоставляется в качестве дополнительных привилегий участникам. Например, члены Американской ассоциации получали бесплатно журналы этой ассоциации, имели значительные скидки при покупке медицинских инструментов и другие привилегии. Второй тип вынуждает людей участвовать под страхом каких-либо потерь, в случае отказа. Эти стимулы очень часто используются в профсоюзных организациях в Европе и США. Например, еще в 17 веке в Нью-Йорке только члены ассоциации погонщиков могли развозить людей. Попытки других людей работать в этой сфере или членов ассоциации выходить из нее жестко пресекались (Тонер (1942)). Аналогичная ситуация наблюдалась в Англии в 18 веке в судостроительной области, где не членам профсоюзов было просто невозможно работать (Сидней и Беатрис Вебб (1902)). По сей день во многих странах

явление принудительного членства в профсоюзах широко развито. Избранные платежи могут объяснить явление образования, как маленьких групп, так и существование больших национальных профсоюзов.

Все выше перечисленные факторы уже давно известны социологам и экономистам, и давно исследуются в литературе. Однако есть фактор, который большинство ученых упускают из виду - привилегии лидерства как стимул к образованию групп. Этот стимул особенно актуален при образовании политических партий. Согласно Даунсу (1957) "...желание власти, престижа, дохода и ... любовь конфликта", являются самыми важными стимулами для людей заниматься политикой. Многие лидеры политических партий и движений заявляют, что преследуют бескорыстные цели, и что вынуждены организовывать движения, потому что есть необходимость выражать мнения людей. Однако достаточно очевидно, что люди, возглавляющие партии, получают большие дополнительные привилегии – привилегии лидеров. Они являются наиболее заметными людьми, которые непосредственно могут влиять на цели и задачи партий, контролировать их бюджет и распределение средств. Это касается не только самого лидера, но также и людей близких к нему. Ван Белле в своей работе описал идею привилегий лидерства и показал, что она играет одну из важнейших ролей в преодолении проблемы создания новых партий и движений. Автор предложил модель, в которой полезность каждого человека состоит из следующих слагаемых:

$$\begin{matrix} \textit{Value of} & & \textit{Selective} & & \textit{Leadership} & & \textit{Costs of} & & \textit{Individual} \\ \textit{public good} & + & \textit{benefits} & + & \textit{benefits} & - & \textit{participation} & = & \textit{benefits} \end{matrix} \quad (1)$$

Однако некоторые слагаемые зависят от того, будет ли движение успешным или нет. Для начала мы рассмотрим привилегии лидерства. Лидер получает значительную часть привилегий не только в случае победы его партии, но даже партия не побеждает. Например, престиж и чувство важности для общества. Более того, лидер определенно имеет очень большое влияние на цели партии и движений. Кроме того, он контролирует бюджет движения, а так же влияет

на его распределение, что позволяет ему быть уверенным в том, что он, скорее всего, не останется в проигрыше. Также даже если движение не добьется полного успеха, оно может достичь значительных промежуточных результатов. Во-первых, многие граждане узнают, что других волнует и за что другие готовы бороться. Во-вторых, возможно правительству или другим руководящим органам придется пойти на какие-то уступки, что тоже существенно, если даже основная цель движения не будет достигнута. В итоге, существует два типа привилегий лидерства: привилегии лидерства в случае успеха и немедленные привилегии лидерства. Первый из них, как и общественное благо, является результатом коллективных усилий, второй же не зависит от успеха партии. Кроме этого, затраты участия распадаются на вклады участников и издержки в случае неудачи (участие в определенных движениях влияет на репутацию и может помешать участию в других). Подводя итог, получаем, что полезность каждого из индивидов может быть записана следующим образом:

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Success} \\ \textit{leadership} + \\ \textit{benefits} \end{array} + \begin{array}{l} \textit{Value of} \\ \textit{public good} \end{array} \right) * P_S + \begin{array}{l} \textit{Selective} \\ \textit{benefits} \end{array} + \begin{array}{l} \textit{Immediate} \\ \textit{leadership} - \\ \textit{benefits} \end{array} - \left(\begin{array}{l} \textit{Costs of} \\ \textit{contribution} \end{array} + \begin{array}{l} \textit{Potential} \\ \textit{reprisals} \end{array} * (1 - P_S) \right) = \begin{array}{l} \textit{Individual} \\ \textit{benefits} \end{array} \quad (2)$$

P_S – the probability that collective action succeeds

Используя данную спецификацию функции полезности индивидов, Дуглас Ван Белле (1996) анализирует как проблема коллективных действий может быть решена с помощью применения концепции личного выбора и введения понятия привилегий лидерства.

3 Базовая модель

Главная задача данной работы описать общий подход к анализу общественных движений, который может быть использован для исследования влияния

описанных выше стимулов на поведение людей. Мы рассмотрим вид функции полезности индивидов схожий с тем, что предложил Ван Белле (??), однако мы добавим слагаемые идеологии и социальные выгоды. Мы предполагаем, что величина общественного блага есть сумма величины истинного общественного блага и части, которая зависит от идеологии гражданина. Так же есть выгоды идеологии, которые не зависят от успешности коллективных усилий. Кроме этого, мы предполагаем, что привилегии лидерства являются единственными клубными благами, а также что социальные выгоды не зависят от успешности партии. В итоге, мы получаем следующую спецификацию полезности индивидов:

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Success} \\ \textit{leadership} + \textit{Value of pure} \\ \textit{benefits} \quad \textit{public good} \end{array} + \begin{array}{l} \textit{Ideology} \\ \textit{dependent good} \end{array} \right) * P_S + \begin{array}{l} \textit{Ideology} \\ \textit{benefits} \end{array} + \begin{array}{l} \textit{Social} \\ \textit{benefits} \end{array} +$$

$$\begin{array}{l} \textit{Immediate} \\ \textit{leadership} \\ \textit{benefits} \end{array} - \left(\begin{array}{l} \textit{Costs of} \\ \textit{contribution} \end{array} + \begin{array}{l} \textit{Potential} \\ \textit{reprisals} \end{array} * (1 - P_S) \right) = \begin{array}{l} \textit{Individual} \\ \textit{benefits} \end{array} \quad (3)$$

Далее, наш подход принимает явную спецификацию вероятности успеха коллективных действий, вводит правило объединения групп, а также определяет понятие равновесных конфигураций групп. Хотя модель работы, которая описана дальше, может быть использована для анализа всех перечисленных выше стимулов, мы в дальнейшем сосредоточимся только на привилегиях лидерства, а также мы предположим, что издержки от неудачи равны нулю³.

Данная работа будет сконцентрирована на моделировании взаимодействия больших групп, объединенных общими интересами. Мы будем предполагать, что вклад каждого индивида бесконечно мал, и что граждане не отличаются друг от друга. Для простоты примем, что люди распределены на отрезке $[0; 1]$,

³Анализ идеологических выгод уже был проведен. Получившиеся результаты полностью согласуются с результатами предыдущих работ. Они могут быть предоставлены по первому требованию. Однако они интересны только в контексте модели с несколькими стимулами (например, привилегии лидерства и идеология), которая еще не разработана.

так что их общее число нормировано к единице.

Экономическая и социологическая литература определяет ряд факторов, от которых зависит успех общественных движений: количество участников, их сплоченность, размер располагаемых средств, а так же сила оппозиции. Однако мы не будем концентрироваться на противостоянии партий, не будем рассматривать различия в идеологии. Также будем предполагать, что средства доступны для всех групп в одинаковой степени. В итоге вероятность предоставления общественного блага зависит только от численности членов группы $P(\mu)$, μ - размер группы (доля всех граждан).

Кроме того, у групп есть стимулы к объединению. Если группы объединяются, то вероятность предоставления общественного блага (g) увеличивается по сравнению с тем, если они остаются разрозненными. Для того, чтобы у групп были стимулы к объединению, функция $P(\mu)$ должна быть выпуклой. Пусть для простоты она имеет квадратичный вид. Кроме этого, мы предположим, что вероятность успеха одной группы никак не влияет на успех других групп. Это означает, что если существуют M групп, то вероятность успеха в достижении общей цели (предоставлении общественного блага) равна $\sum_j P(\mu_j)$. Предположение В суммирует вышеизложенную дискуссию.

Предположение В. Вероятность успеха группы зависит только от ее размера μ и равна $P(\mu) = \mu^2$ (μ - доля членов в общей массе людей). Если образовалось M групп, то вероятность успеха есть сумма вероятностей успеха каждой из групп в отдельности $P = \sum_j^M P(\mu_j) = \sum_j^M \mu_j^2$.

Теперь перейдем к описанию спецификации привилегии лидеров. Для этого мы будем использовать следующие обозначения:

a — максимальное значение привилегий лидерства в случае успеха.

b — максимальное значение немедленных привилегий лидерства.

g — ценность общественного блага.

Также мы определим понятие ранга. Каждый член каждой группы имеет свой ранг. Чем раньше человек вступает в группу, тем ближе он будет к лидеру и тем меньше его ранг в группе. Если более подробно, то если человек i лидер, то

его ранг l_i равняется 0. Однако если человек i последний, кто присоединился к группе, то его ранг l_i равняется μ (μ - размеру группы). Кроме этого необходимо ввести еще некоторые обозначения:

2β — скорость убывания успешных привилегий лидерства.

2γ — скорость убывания немедленных привилегий лидерства.

c — вклад за участие.

В дополнение мы делаем достаточно сильное предположение относительно того, как ранг формируется, а именно квадратичную форму функции распределения привилегий лидерства.

$$a(1 - \beta l_i^2) - b(1 - \gamma l_i^2) \quad (4)$$

Принято, что распределение привилегий лидерства убывает гораздо быстрее, чем по квадратичному закону. Чтобы наши результаты были более согласованы с реальностью мы проанализируем область значений β и γ . Интуитивно эти коэффициенты надо понимать в качестве характеристик степени перераспределения привилегий лидерства среди членов группы. При больших значениях β и γ мало людей могут наслаждаться дополнительными привилегиями, тогда как при малых значениях β и γ привилегии лидерства становятся похожими на общественное благо и все члены группы получают дополнительную выгоду в равной степени. Предположение Л подводит итог спецификации привилегий лидерства в полезности агентов.

Предположение Л. Каждый член группы получает дополнительную выгоду в виде немедленных привилегий лидерства $b(1 - \gamma l_i^2)$ и привилегий лидерства в случае успеха $a(1 - \beta l_i^2)$. l_i - ранг индивида i ; $l_i \in [0, \mu]$, μ - размер группы.

Учитывая Предположение В и Л и подход Ван Белле, запишем функцию полезности индивидов. Для этого предположим, что образовалось M общественных движений. Если человек i выберет членство в группе k , то его полезность будет равна:

$$U_P^i(\mu_k, g, l_{ki}) = \sum_{j=1}^M P(\mu_j) g + P(\mu_k) a (1 - \beta l_{ki}^2) + b(1 - \gamma l_{ki}^2) - c \quad (5)$$

μ_j — размер группы j

l_{ki} — ранг индивида i в группе k

Если же индивид решит не участвовать ни в каком революционном движении, его полезность будет равна:

$$U_N^i(g) = \sum_{j=1}^M P(\mu_j) g \quad (6)$$

Следовательно, у каждого гражданина есть два противоположных стимула при выборе участия в общественном движении. С одной, стороны при вступлении в группу человек вынужден нести издержки. С другой стороны, он получает дополнительные выгоды в виде привилегий лидерства. Так же вероятность получения привилегий лидерства в случае успеха сильно зависит от размера группы, в которую человек хочет вступить. В результате, если человек вступает в более маленькую группу, он получает меньший ранг и более большие привилегии лидерства, однако маленькая группа имеет более скромные шансы на получение доли привилегий лидерства в случае успеха.

В жизни люди не одинаковы и отличаются способностями, особенно организационными. Не каждый гражданин может организовать общественное движение, а значит люди неоднородны в получении привилегий лидерства (различные значения b), в которые входит так же душевное удовлетворение индивидов. В то время, как одни люди имеют способности к лидерству от рождения, другие предпочитают выполнять распоряжения. Однако все равно люди наиболее приближенные к лидеру получают большие привилегии. Несмотря на это, мы ограничимся рассмотрением только однородного случая, как наиболее простого. Следовательно, для того чтобы группы могли образовываться, необходимо сделать следующее предположение.

Предположение 1. Для каждого гражданина выгодно создать свое собственное общественное движения, если другие не созданы: $b > c$

Предположение 1 утверждает, что немедленные привилегии лидерства достаточно высоки, и каждый индивид захочет стать участником какого-то общественного движения или организовать собственное. Однако оно необходимо только из-за того, что мы предполагаем однородность всех людей и может быть опущено при более подробном анализе.

Необходимо рассмотреть еще одно ограничение на параметры модели, с помощью которого мы хотим исключить те случаи, когда гражданам выгоднее оставаться по одиночке нежели присоединяться к уже имеющимся бесконечно малым группам. Для того чтобы избежать таких нереалистичных значений параметров мы сделаем Предположение 2.

Предположение 2. $a > b\gamma$. Всегда выгодно присоединяться к бесконечно малой имеющейся группе, чем организовывать свою новую.

Для пояснения получающегося условия $a > b\gamma$ мы сравним выгоды от присоединения к бесконечно малой группе (ε) с выгодами создания новой группы:

$$U_P^i(\varepsilon, g, \varepsilon) - U_P^i(0, g, 0) = \varepsilon^2 a (1 - \beta\varepsilon^2) + b(1 - \gamma\varepsilon^2) - b = -\varepsilon^2 (a\beta\varepsilon^2 - a + b\gamma)$$

Следовательно, $U_P^i(\varepsilon, g, \varepsilon) - U_P^i(0, g, 0) > 0$ для бесконечно малых ε только, если $a > b\gamma$.

Но принятие данного предположения приводит нас к тому, что если изначально не было никаких групп, то будет создана только одна группа. Однако это утверждение не устойчиво к введению других стимулов людей к участию в общественных движениях и к введению гетерогенности. Если предположить, что люди могут немного отличаться, то это сразу приводит к созданию сразу нескольких групп. По этой причине это предположение ни в коем случае не ограничивает круг рассматриваемых вопросов, а направлено на рассмотрение более реалистичных значений параметров модели.

Перед тем как перейти к исследованию равновесных конфигураций групп, мы исследуем вопрос рациональности поведения индивидов. Утверждение 1 отвечает на вопрос о существовании ограничения на размер группы. Всегда ли гражданам выгодно вступать в группы?

Утверждение 1. Размер групп не может превышать некоторого наибольшего значения μ^o .

Доказательство. Смотрите Приложение.

Гражданам не выгодно вступать в группы, размер которых превышает некоторое максимальное значение μ^o . В больших группах для людей с большим рангом дополнительные выгоды, которые они получают от участия (привилегии лидерства), оказываются меньше чем издержки участия в группе (\cdot).

В итоге, в Разделе 4 мы провели описание базовой структуры модели данной работы, в котором основными стимулами для вступления в общественные движения являются привилегии лидерства. Предположения 1 и 2 необходимы для того, чтобы общественные движения могли рационально организовываться. Более того, предположение о том, что размер немедленных привилегий лидерства больше издержек участия $b > c$ приводит к тому, что все граждане $[0; 1]$ будут участниками каких-то общественных движений. Хотя это достаточно сильные предположения, наша цель проанализировать взаимодействия между общественными группами, а не причины возникновения движений. Также результат Утверждения 1 приводит к существованию верхнего ограничения на размер групп, а значит и на их количество. Помимо этого, описанный подход может быть использован для анализа идеологии и других стимулов граждан участвовать в общественных движениях, хорошо описанных в литературе. Однако это вопрос для дальнейшего исследования.

Следующий раздел данной работы будет посвящен описанию возможных равновесий в модели.

4 Равновесное количество групп

Почему люди уходят из одних групп и присоединяются к другим? На первый взгляд этот вопрос имеет простой и тривиальный ответ. Они хотят получить больше выгод. Эти выгоды могут иметь разную природу. Часто общественные

движения формируются на основании территориальной принадлежности, религиозных, личных предпочтений и других характеристик, часто не связанных с целями движения. Наш анализ ограничится рассмотрением только привилегий лидерства. Размер групп постоянно меняется, потому что некоторые члены покидают ее, и приходят новые люди. Однако большинство групп имеет средний "равновесный размер" в течение достаточно больших периодов времени. Данная работа нацелена на анализ именно равновесного значения размеров групп.

Определение:

1) Конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является **A-равновесием**, если группы не изменяются в размере.

2) Конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является **A-стабильным равновесием** если она является A-равновесием и, если небольшая подгруппа людей изменит свое членство, то другие граждане за ней не последуют.

Теперь, используя спецификацию функции полезности, описанную в Разделе 4, получается следующее утверждение относительно A-равновесных конфигураций групп.

Утверждение 2. Конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является A-равновесием тогда и только тогда, когда:

$$\forall i, j = 1, \dots, M \quad \left[\begin{array}{l} \mu_i = \mu_j \\ \mu_i^2 + \mu_j^2 = \frac{a - b\gamma}{a\beta} \end{array} \right. \quad (7)$$

Другими словами, может быть один или два типа групп в A-равновесии. Если группы одного типа, то все они имеют одинаковый размер. Если же два типа групп, если размер первых μ_1 , а размер других μ_2 , то размеры должны быть связаны следующим соотношением: $\mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{a - b\gamma}{a\beta}$. Для того, чтобы доказать Утверждение 2, необходимо проверить только решения членов с наибольшим рангом. Если для них не выгодно менять членство, не выгодно будет менять членство и для других. Так же верно и обратное утверждение (смотри Приложение).

Утверждение 3: Конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является А-стабильным

равновесием тогда и только тогда, когда:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} a) \forall i = 1, \dots, M \quad \mu_i = \mu \\ b) M \leq \sqrt{\frac{2a\beta}{a - b\gamma}} \end{array} \right. \\ \text{либо} \\ \left\{ \begin{array}{l} a) \exists j \in \{1 \dots M\}, \forall i \neq j \quad \mu_i = \mu; \\ \mu_j : \mu^2 + \mu_j^2 = \frac{(a - b\gamma)}{a\beta} \\ b) M \leq \sqrt{\frac{2a\beta}{a - b\gamma}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Доказательство. См. в Приложении.

Обозначим $\mu^* = \sqrt{\frac{a - b\gamma}{2a\beta}}$.

Заметим, что равновесные конфигурации маленьких групп не будут стабильными. Небольшое изменение в местоположении индивидов приводит к росту более больших групп и исчезновению маленьких. Этот результат может объяснить существование большого количества маленьких групп на этапе зарождения движений. Очень часто большинство из них долго не живут и либо распадаются под действием внешних факторов, либо объединяются в более влиятельные группы. Хорошим историческим примером может быть беспокойные времена в России в начале двадцатого века. Тогда было очень много разных небольших групп, которые долго не могли перерасти в более массивные выступления.

Интересно отметить, что наряду с группами одинакового размера может существовать более маленькая группа. Однако она может быть только одна; две группы будут уже не стабильными. Но, если бы мы рассматривали неоднородных граждан, например они бы обладали различной идеологией, то в этом случае в стабильных равновесиях могло бы возникнуть более одной группы маленького размера. Некоторые люди предпочитают небольшие группы, потому что они играют более важную роль в них. Они хотят быть лидером маленькой группы, чем "пешкой" в большой. Анализ существования групп разного размера интересен только при изучении сразу нескольких видов стимулов для участия, но так как в данной работе мы рассматриваем только привилегии лидерства, в дальнейшем не будем акцентировать наше внимание на таких равновесиях.

Кроме этого, необходимо сделать еще одно замечание. Если распределение успешных привилегий лидерства достаточно равномерное $\beta \ll 1$, и $\frac{2a\beta}{a - b\gamma + g} < 1$, тогда единственно возможная стабильная конфигурация групп - это конфигурация с одной группой, члены которой все граждане $M = 1, \mu = 1$.

Теперь, когда мы определили стабильные конфигурации групп с позиции простого гражданина, перейдем к анализу взаимодействия групп. Во-первых, мы обсудим правило Объединения, которое определяет как изменяется полезность членов после объединения групп. Во-вторых, мы определим понятие В-равновесие и В-стабильности, которые характеризуют конфигурации таких групп, которым не выгодно объединяться. И наконец, мы получим необходимые условия существования таких равновесий.

Правило Объединения.

Предположим, что в обществе всего два общественных движения размера μ_1 и μ_2 . Эти два движения объединяются только при условии, что большинство членов в каждом из них поддерживают это объединение. Полезность члена с рангом l из группы μ_1 изменяется следующим образом:

Полезность членов первой группы перед объединением:

$$U_{\mu_1}(l) = (\mu_1^2 + \mu_2^2)g + \mu_1^2 a(1 - \beta l^2) + b(1 - \gamma l^2) - \quad (8)$$

Полезность членов первой группы после объединения:

$$\begin{aligned} U_{\mu_1+\mu_2}^{integ}(l) = & (\mu_1 + \mu_2)^2 g + (\mu_1 + \mu_2)^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} a(1 - \beta l^2) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} a(1 - \beta(\mu_2 + l)^2) \right) \\ & + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} b(1 - \gamma l^2) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} b(1 - \gamma(\mu_2 + l)^2) - \end{aligned} \quad (9)$$

Полезность членов второй группы может быть посчитана аналогичным образом.

Если объединяется M групп, то это правило должно быть модифицировано соответственно. Общая идея состоит в том, что если группы объединяются,

то ранги в новой группе получаются смешиванием старых с весами пропорциональными размерам групп. Интуиция этого правила состоит в том, члены более многочисленной группы имеют больше шансов получить меньший ранг в конечной группе после объединения. Однако это правило только нулевое приближение того, как привилегии лидерства перераспределяются в действительности. В реальности очень много параметров, которые определяют перераспределение благ между членами. Почти каждый случай является уникальным и чрезвычайно сложным для анализа. Может оказаться, что вообще не существует общего правила.

Теперь мы определим понятие В-равновесия и В-стабильности.

Определение:

1) Конфигурация групп является **В-равновесием**, если она является А-стабильным равновесием, и группам не выгодно объединяться в соответствии с правилом Объединения.

2) Конфигурация групп является **В-стабильным равновесием**, если она является В-равновесием, и если объединение каких-либо двух групп не вызывает желание объединиться каким-то другим группам.

Утверждение 4 позволяет проанализировать как возможность объединения меняет равновесное количество групп.

Утверждение 4. Конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является В-равновесием, если она является А-равновесием групп одинакового размера и $M \leq \sqrt{\frac{19a\beta}{4(3a + 2g - b\gamma)}}$.

Доказательство. Смотрите в Приложении.

Понятие В-равновесия приводит к новому ограничению на количество групп в равновесии, которое теперь зависит от ценности общественного блага. Изначально это ограничение основывалось на понятие А-стабильности и зависило только от привилегий лидерства, потому что рассматривались только решения отдельных граждан. Следует подчеркнуть, что индивидуальные решения приводили к результатам, которые одинаково зависели от ценности общественного блага. Совершенно другая ситуация складывается для случая объединяющихся

групп. Объединение нескольких групп значительно изменяет вероятность успеха движений. Хотя, по-прежнему, один гражданин имеет пренебрежимо малое влияние на решение об объединении, а следовательно и на вероятность успеха, теперь он, голосуя за или против объединения, выбирает между исходами, которые координатно отличаются по вероятности достижения успеха. Из-за этого ценность общественного блага влияет на решение индивидов, а следовательно и на число групп в В-равновесии.

Другим следствием Утверждений 3 и 4 может являться то, что ценность общественного блага играет роль только на стадии, когда уже сформировалась изначальная конфигурация групп. В краткосрочном периоде размеры групп неустойчивы из-за переходов отдельных граждан. Только если группы становятся достаточно большими (размер больше μ^*) и поток людей между группами уменьшается, конфигурация становится А-стабильным равновесием. Только на стадии стабильности, которая достигается в значительно более длительном периоде, только когда структура групп уже сформировалась, граждане начинают рассматривать возможность объединения групп. Изменения количества групп, является значительно более существенным возмущением в обществе и происходит на более длительных промежутках времени. В результате, на ранних стадиях организации общественных движений, ценность общественного блага не играет почти ни какой роли, а главными стимулами являются только клубные блага в форме привилегий лидерства. Только на стадии, когда группы рассматривают возможность объединения, ценность общественного блага начинает влиять на равновесное количество групп и вероятность предоставления общественного блага.

Утверждение 5. Каждая конфигурация $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$, которая является В-равновесием является В-стабильным равновесием.

Доказательство. Смотрите в Приложении.

При исследовании возможности объединения n групп получается, что существует пороговое значение размера групп, ниже которого объединение n групп не будет выгодным $\mu < \mu_n^{**}$. Этот порог убывает с увеличением числа объединя-

ющихся групп, а значит наиболее благоприятное объединение - это объединение двух групп. Также, при анализе стабильности В-равновесия оказывается, что если две группы объединились, то третьей не будет выгодно к этому союзу присоединиться. Если бы это было выгодно, то доказывалось бы, что было бы выгодно для трех групп равного размера из начальной конфигурации объединиться. Однако это не может быть выгодно, потому что изначальная конфигурация является В-равновесием.

Но почему нескольким группам оказывается менее выгодно объединяться? Это следствие принятого нами правила Объединения. При объединении групп их члены должны рисковать своим статусом (рангом в первой группе) в надежде ожидая увеличить вероятность получить общественное благо и привилегии лидерства в случае успеха. Однако оказывается, что для них не выгодно излишне рисковать, поэтому объединения трех и более групп не будут наблюдаться. Это достаточно хорошо согласуется с реальностью. Достигнуть консенсуса между членами двух групп всегда гораздо легче, чем между членами большого количества групп. В жизни мы наблюдаем в основном объединения двух движений. Редко, когда большее количество групп может прийти к согласию.

Наконец мы перейдем к анализу возможности создания новых групп. Если мы рассмотрим А-стабильные конфигурации групп, то возможно, что некоторым членам будет выгодно объединиться, чтобы создать новую группу. Концепция С-равновесия пытается исключить такие ситуации.

Определение:

1) Конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является **С-равновесием**, если она является А-равновесием и невыгодно членам какой-либо из групп организовать новую.

2) Конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является **С-стабильным равновесием**, если она является С-равновесием и, если бесконечно маленькая группа отсоединиться, то остальным не будет выгодно тоже отсоединиться.

Утверждение 6. Конфигурация из M групп является C - стабильным равновесием, если она является A -стабильным равновесием групп одинакового размера и $\sqrt{\frac{a\beta}{a-b\gamma}} < M \leq \sqrt{\frac{2a\beta}{a-b\gamma+g}}$.

Доказательство. Смотрите в Приложении.

Обозначим $\mu^c = \sqrt{\frac{a-b\gamma}{a\beta}}$.

Понятие C -равновесия добавляет нижнее ограничение на количество групп. Большие групп не будут устойчивыми, потому что привилегии лидерства не могут удерживать членов с высоким рангом. Более того, оказывается что людям выгодно отделяться по отдельности, а не группами⁴. Для политических партий это не является характерным. Довольно часто происходят их расколы на отдельные движения, но для общественных движений, направленных на принятие какого-то закона, забастовки - это верно. Именно в этих партиях число членов играет значительную роль на успешности коллективных действий. В этом случае, люди уходят из групп только если решают совсем покинуть движение и в нем не участвовать. Это очень сильно перекликается с Утверждением 1, где как раз люди покидают группы, чтобы вообще не участвовать в движениях. Но из Предположения 1 ($b > c$) следует, что $\mu^c < \mu^o$, поэтому людям всегда выгодно организовывать движения. Однако если бы мы рассматривали неоднородное распределение людей и опустили бы это предположение, то минимально количество групп было бы равно:

$$\max(\mu^c; \mu^o) = \max\left(\sqrt{\frac{a-b\gamma}{a\beta}}; \sqrt{\frac{1}{2a\beta}\left(a-b\gamma + \sqrt{(a-b\gamma)^2 + 4a\beta(b-c)}\right)}\right) \quad (10)$$

Также, следует заметить, что нижнее ограничение не зависит от ценности общественного блага. Это следствие того, что максимальный размер групп связан с рациональным решением отдельных членов группы. А так как на решение отдельных людей не влияет ценность общественного блага, то ограничение от него не зависит⁵.

⁴Смотрите доказательство Утверждения 6 в Приложении.

⁵Подробное обсуждение этого вопроса содержится после Утверждения 4.

В итоге мы получаем, что стабильная конфигурация групп, для которых выполнены три условия:

- 1) индивидам невыгодно переходить из своих групп в другие
- 2) группам невыгодно объединяться
- 3) невыгодно образовываться новым группам

- это конфигурация групп одинакового размера, количество которых должно удовлетворять следующему ограничению:

$$\sqrt{\frac{a\beta}{a - b\gamma}} \leq M \leq \sqrt{\frac{19a\beta}{4(3a + 2g - b\gamma)}} \quad (11)$$

Теперь, мы проанализируем, как зависит равновесное количество групп от размера общественного блага, привилегий лидерства, и степени их перераспределений. Для начала мы рассмотрим величину привилегий лидерства (β) в случае успеха и величину общественного блага (g). Оба эти фактора действуют в одном направлении и уменьшают число групп в равновесии, потому что они увеличивают размер выгод, которые люди получают в случае достижения целей движением. Например, они могут отвечать за величину недовольства людей или ценность продвигаемых задач. Если ценность велика, то людям выгоднее вести себя более сплоченно, потому что только в этом случае они смогут достичь своих целей. В противном случае, если достижение общих целей для граждан не так существенно, они будут уделять так же внимание другим факторам (таким как привилегии лидерства), что приведет к большому количеству групп в равновесии

Размер немедленных привилегий лидерства, в свою очередь, уменьшает стимулы граждан к объединению. Этот факт может объяснить существование большого количества маленьких организаций в начале больших общественных движений. В начале, когда вероятность достижения целей достаточно маленькая, группы отказываются объединяться, потому что немедленные привилегии относительно более ценны.

Наконец, равновесное количество групп убывает при увеличении степени перераспределения между членами групп (падение β и γ). Если маленькая сте-

пень перераспределения (большие значения β и γ), то меньшее количество людей получает привилегии лидерства, что приводит к уменьшению стимулов к объединению. Предпочтительнее иметь низкий ранг в меньшей группе, чем им рисковать, чтобы получить более высокий в большой. Люди ценят больше статус внутри групп, чем успех в достижении общественных целей.

В заключении, необходимо сделать некоторые пояснения относительно устойчивости наших результатов к рассматриваемой спецификации. Во-первых, мы рассматривали квадратичный вид функции вероятности успеха коллективных действий $P(\mu) = \mu^2$. Как мы уже упоминали в Разделе 3, функция $P(\mu)$ должна иметь вид кубического трехчлена. Это означает, что истинная вероятность возрастает более медленно для больших групп. Следовательно, граждане будут показывать более сдержанное поведение, что приведет к большему значению групп в равновесии.

Другой важной характеристикой является спецификация функции распределения привилегий лидерства. Согласно Ван Белле (1996) вид этой функции должен быть гиперболический (похожий на $\frac{1}{1+l}$). Мы использовали квадратичную спецификацию. Хотя коэффициенты β и γ позволяют проанализировать влияние первой производной на равновесное количество групп, вогнутость нашей функции противоположная. Это расхождение может повлиять на результаты. Однако для групп среднего размера, можно утверждать, что результаты останутся теми же.

После рассмотрения всех этих факторов интересно проанализировать неравенство более подробно.

После рассмотрения основных факторов влияющих на количество равновесных групп, интересно проанализировать неравенство (11) более детально. Для некоторых наборов параметров может оказаться, что не существует значения M , удовлетворяющего (11). Левая часть неравенства будет больше правой если:

$$7a < 8g + 15b\gamma.$$

Причина не существования равновесного количества групп является не рас-

смавление стратегического поведения людей. Левое ограничение соответствует возможности образованию новых групп. Если группа слишком большая, то маленькие подгруппы могут решить отделиться от нее. Правое ограничение соответствует возможности групп объединяться. Может случиться так, что группам выгодно сначала объединиться, но потом некоторые подгруппы захотят отделиться. Это приводит к излишней строгости неравенств и возможности не существования равновесного количества групп. Для того, чтобы убрать это разночтение необходимо рассмотреть понятия равновесия среди равновесных и стабильных конфигураций (аналогично Алексина, Спалаорэ (1997)). Этот анализ в приведенной спецификации модели приводит к трудностям математического анализа. Несмотря на то, что это безусловно недостаток модели, он не влияет на основные выводы данной работы. Для его преодоления необходима более сложная спецификация понятия привилегий лидерства..

5 Заключение

Эта работа является еще одним шагом на пути построения общей модели революционных движений. В ней представлен новый теоретико-игровой подход к моделированию стимулов людей для участия в революциях. Так же она анализирует влияние привилегий лидерства на количество групп в равновесиях. Она так же анализирует влияние привилегий лидерства на количество групп в равновесиях. Следующим этапом является исследование других мотивов людей таких как идеология, экономические и социальные привилегии, а также другие клубные блага (помимо лидерства). После этого, чрезвычайно интересно с помощью эмпирического анализа выявить наиболее значимые стимулы и проверить выводы данной работы.

Согласно Зальду и Эш (1966) и Ван Белле (1996) привилегии лидерства играют очень существенную роль в образовании революционных движений. Этот тип клубных привилегий помогает решить изначальную проблему коллективных действий. Граждане хотят вступать в движения на более ранних этапах,

для того чтобы получить лучший статус в группе. Однако вышеприведенный анализ показывает, что привилегии лидерства приводят к образованию многочисленного количества групп. Они препятствуют объединению групп, что ведет к уменьшению вероятности победы революции. А значит, привилегии лидерства создают вторичную проблему коллективных действий.

В заключении мы бы хотели отметить некоторые возможные улучшения модели. Во-первых, как было подмечено ранее интересно проанализировать более сложную иерархию лидерства и ее трансформацию при объединении групп. Далее, используя новое определение, представляется заманчивым применить подход вектора Шепли при расчете полезностей участников революции. Это позволит создать модель более приближенную к реальности. Еще одним усовершенствованием может быть разработка двухмерной модели с идеологией и привилегиями лидерства в качестве главных стимулов для участия в революционных движениях. Эта модель также может быть использована для анализа неоднородного распределения стимулов граждан.

6 Приложение

Доказательство утверждения 1:

Каждый гражданин вступает в движение μ только, если это увеличивает свою полезность: $U_P^i(\mu, g, \mu) - U_N^i(g) > 0$

$$U_P^i(\mu_k, g, l_{ki}) = \sum_{j=1}^M P(\mu_j) g + \mu_k^2 a (1 - \beta l_{ki}^2) + b(1 - \gamma l_{ki}^2) - c$$

$$U_N^i(g) = \sum_{j=1}^M P(\mu_j) g$$

$$U_P^i(\mu, g, \mu) - U_N^i(g) = \mu^2 a (1 - \beta \mu^2) + b(1 - \gamma \mu^2) - c = b - c + a\mu^2 - a\beta\mu^4 - b\gamma\mu^2$$

$$b - c + a\mu^2 - a\beta\mu^4 - b\gamma\mu^2 = 0$$

$$-a\beta x^2 + b - c + (a - b\gamma)x = 0$$

Так как $-4a(b - c) < 0$ только один из корней будет положительным. Положительный корень:

$$x = \mu^{o2} = \frac{1}{2a\beta} \left(a - b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + a^2 + 4ab\beta - 2ab\gamma - 4ac\beta} \right) \implies$$

$$\implies \mu^o = \sqrt{\frac{1}{2a\beta} \left(a - b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + a^2 + 4ab\beta - 2ab\gamma - 4ac\beta} \right)}$$

Значит, $U_P^i(\mu, g, \mu) - U_N^i(g) > 0 \Leftrightarrow$ размер группы меньше μ^o .

■

Доказательство утверждения 2:

Для доказательства утверждения рассмотрим две произвольные группы и обозначим их размеры μ_1 и μ_2 . Посмотрим, когда их членам не выгодно покидать одну из них ради другой. Однако для начала докажем **Лемму 1**.

Лемма 1. Если гражданин с рангом $l_i < \mu$ из группы 1 решит уйти из группы, то и гражданин с рангом $l_i = \mu_1$ (последний присоединившийся человек) тоже решит уйти. Обратное, если не выгодно уходить человеку с рангом $l_i = \mu_1$, то не будет выгодно уходить никакому другому члену.

Доказательство:

Вне зависимости от ранга человека, когда он покинет группу 1 ради группы 2, он получит максимальный ранг. Далее, принимая во внимание что полезность убывает с рангом, мы получаем первое утверждение Леммы 1⁶:

$$\sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_1^2 a(1 - \beta l_{1i}^2) + b(1 - \gamma l_{1i}^2) - c <$$

$$\sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_2^2 a(1 - \beta \mu_2^2) + b(1 - \gamma \mu_2^2) - c \implies$$

$$\sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_1^2 a(1 - \beta \mu_1^2) + b(1 - \gamma \mu_1^2) - c <$$

$$\sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_2^2 a(1 - \beta \mu_2^2) + b(1 - \gamma \mu_2^2) - c$$

Обратное утверждение леммы 1 так же достаточно легко может быть получено:

⁶Напомним, что полезность индивида равняется: $U_P^i(\mu_k, g, l_{ki}) = \sum_{j=1}^M P(\mu_j) g + P(\mu_k) a(1 - \beta l_{ki}^2) + b(1 - \gamma l_{ki}^2) - c$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_1^2 a(1 - \beta \mu_1^2) + b(1 - \gamma \mu_1^2) - c > \\
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_2^2 a(1 - \beta \mu_2^2) + b(1 - \gamma \mu_2^2) - c \quad \implies \\
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_1^2 a(1 - \beta \mu_1^2) + b(1 - \gamma \mu_1^2) - c > \\
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu_2^2 a(1 - \beta \mu_2^2) + b(1 - \gamma \mu_2^2) - c
\end{aligned}$$

■

Если для каждого гражданина не выгодно менять свое членство, тогда эта конфигурация будет равновесной. Согласно Лемме 1 достаточно проверить решение только для члена с наибольшим рангом. Если для него не выгодно покидать группу, то никакому другому члену не будет выгодно покидать группу. Полезность гражданина с рангом μ :

$$\begin{aligned}
U_P(\mu, g, \mu) &= \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu^2 a(1 - \beta \mu^2) + b(1 - \gamma \mu^2) - c = \\
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + \mu^2 a(\beta \mu^2 - 1) - c - b(\gamma \mu^2 - 1) = \\
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + b - c + (a - b\gamma) \mu^2 - a\beta \mu^4
\end{aligned}$$

Люди не будут переходить между группами если:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + b - c + (a - b\gamma) \mu_1^2 - a\beta \mu_1^4 = \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + b - c + (a - b\gamma) \mu_2^2 - a\beta \mu_2^4 \quad \implies \\
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + b - c + (a - b\gamma) \mu_1^2 - a\beta \mu_1^4 - \left(\sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + b - c + (a - b\gamma) \mu_2^2 - a\beta \mu_2^4 \right) = 0 \\
& \sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + b - c + (a - b\gamma) \mu_1^2 - a\beta \mu_1^4 - \left(\sum_{j=1}^M \mu_j^2 g + b - c + (a - b\gamma) \mu_2^2 - a\beta \mu_2^4 \right) = \\
& a\beta(\mu_2^4 - \mu_1^4) - (\mu_2^2 - \mu_1^2)(a - b\gamma) = 0 \quad \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mu_2^2 - \mu_1^2)(a\beta(\mu_2^2 + \mu_1^2) - (a - b\gamma)) = 0 \quad \implies \\
& \implies \begin{cases} \mu_2 = \mu_1 & (*) \\ \mu_2^2 + \mu_1^2 = \frac{(a - b\gamma)}{a\beta} & (**) \end{cases}
\end{aligned}$$

В итоге получается, что конфигурация групп является А-равновесием, если либо группы имеют одинаковый размер, либо есть два типа групп с размерами удовлетворяющими условию (**).

Доказательство Утверждения 3:

Любая А-стабильная конфигурация должна быть А-равновесием. Значит необходимо проверить только два случая:

1) Все группы имеют одинаковый размер $\mu_i = \mu$.

Предположим, что некоторые члены перешли в другие группы. Тогда конфигурация будет А-стабильным равновесием, если остальные члены группы не захотят изменить свое членство. Для этого достаточно проверить решение оставшегося гражданина с наибольшим рангом:

$$\begin{aligned} & U_P(\mu + \varepsilon, g, \mu + \varepsilon) - U_P(\mu - \varepsilon, g, \mu - \varepsilon) = \\ & b(\gamma(\mu - \varepsilon)^2 - 1) - b(\gamma(\mu + \varepsilon)^2 - 1) - \\ & (\mu + \varepsilon)^2 a(\beta(\mu + \varepsilon)^2 - 1) + a(\beta(\mu - \varepsilon)^2 - 1)(\mu - \varepsilon)^2 = \\ & -4\mu\varepsilon(2a\beta\mu^2 + 2a\beta\varepsilon^2 - a + b\gamma) < 0 \end{aligned}$$

Следовательно, если ε бесконечномалое ($\varepsilon \rightarrow 0$), мы получаем следующее условие:

$$2a\beta\mu^2 - a + b\gamma > 0 \quad \implies \quad \mu^2 \geq \frac{a - b\gamma}{2a\beta}$$

Также есть возможность людям из группы $\mu - \varepsilon$ перейти в другие группы с размером μ . Аналогично показывается, что это не выгодно. Более того, у членов остальных групп есть стимулы перейти в меньшую группу $\mu - \varepsilon$. В результате получаем, что если $\mu^2 \geq \frac{a - b}{2a}$ то конфигурация групп одинакового размера будет А-стабильным равновесием.

2) Теперь рассмотрим конфигурации с двумя типами групп. Пусть группы первого типа имеют размер μ_1 , а второго размер μ_2 , и $\mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{a - b\gamma}{a\beta}$

Аналогично первому случаю предположим, что некоторые члены группы второго типа перешли в группу первого.

$$\begin{aligned} & U_P(\mu_1 + \varepsilon, g, \mu_1 + \varepsilon) - U_P(\mu_2 - \varepsilon, g, \mu_2 - \varepsilon) = \\ & b(\gamma(\varepsilon - \mu_2)^2 - 1) - b(\gamma(\varepsilon + \mu_1)^2 - 1) - \\ & - (\varepsilon + \mu_1)^2 a(\beta(\varepsilon + \mu_1)^2 - 1) + a(\beta(\varepsilon - \mu_2)^2 - 1)(\varepsilon - \mu_2)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\mu_1 + \mu_2)(2\varepsilon + \mu_1 - \mu_2) \begin{pmatrix} 2a\beta\varepsilon^2 + 2a\beta\varepsilon\mu_1 - 2a\beta\varepsilon\mu_2 + \\ a\beta\mu_1^2 + a\beta\mu_2^2 - a + b\gamma \end{pmatrix} = \\
& -(\mu_1 + \mu_2)(2\varepsilon + \mu_1 - \mu_2) \begin{pmatrix} 2a\beta\varepsilon^2 + 2a\beta\varepsilon\mu_1 - 2a\beta\varepsilon\mu_2 + \\ a - b\gamma - a + b\gamma \end{pmatrix} = \\
& -2a\beta\varepsilon(\mu_1 + \mu_2)(\varepsilon + \mu_1 - \mu_2)(2\varepsilon + \mu_1 - \mu_2) < 0
\end{aligned}$$

Следовательно, если мы рассмотрим группы μ_1 и μ_2 подчиняется $\mu_1^2 + \mu_2^2 = \frac{a - b\gamma}{a\beta}$, конфигурация из двух групп А-стабильна. Пусть $\mu_1 < \mu_2$ и существует несколько групп размера μ_1 . Тогда есть хотя бы две группы одинакового размера μ_1 и $\mu_1^2 < \frac{a - b\gamma}{2a\beta}$. Но как следует из 1) это нестабильная ситуация. Следовательно, может быть только одна маленькая группа в А-стабильном равновесии.

В итоге, конфигурация из M групп $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ является А-стабильным равновесием, если все группы имеют одинаковый размер, кроме может быть одной, которая имеет размер μ' : $\mu'^2 + \mu^2 = \frac{a - b\gamma}{a\beta}$. Число групп должно быть ограничено $M \leq \sqrt{\frac{2a\beta}{a - b\gamma}}$.

Замечание. Сравним $\mu^* = \sqrt{\frac{(a - b\gamma)}{2a\beta}}$ с максимально возможным размером группы μ^o .

$$\begin{aligned}
\mu^{o2} &= \frac{1}{2a\beta} \left(a - b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + a^2 + 4ab\beta - 2ab\gamma - 4ac\beta} \right) \quad vs \quad \mu^{*2} = \frac{a - b\gamma}{2a\beta} \\
a - b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + a^2 + 4ab\beta - 2ab\gamma - 4ac\beta} &> a - b\gamma
\end{aligned}$$

Согласно Утверждению 1 максимально возможный размер групп равняется μ^o , и он соответствует возможности граждан быть обывателями, неучаствующими в движении. Однако в равновесии этот вариант можно не рассматривать, потому что всегда будет выгодно организовать собственное движение и потому что $\mu^o > \mu^*$ в независимости от значений параметров.

Доказательство Утверждения 4:

Предположим, что в стране сложилась конфигурация из M групп одинакового размера. Используя правило Объединения рассмотрим как изменится полезность членов групп, если n из них решат объединиться. До объединения полезность члена с рангом l равняется:

$$U_\mu(l) = M\mu^2g + \mu^2(a(1 - \beta l^2)) + b(1 - \gamma l^2) - c$$

После объединения полезность того же агента станет равной:

$$\begin{aligned} U_{n\mu}(l) &= (M - n)\mu^2g + (n\mu)^2g + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a(n\mu)^2(1 - \beta(l + i\mu)^2) + \\ &\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b(1 - \gamma(l + i\mu)^2) - c = \\ &(M - n)\mu^2g + (n\mu)^2g + a(n\mu)^2 + b - \left(\frac{1}{n}\beta a(n\mu)^2 + \frac{1}{n}b\gamma\right) \sum_{i=0}^{n-1} (l + i\mu)^2 - c = \\ &b + an^2\mu^2 + (M - n)\mu^2g + (n\mu)^2g - \\ &\frac{1}{6}n \left(\frac{b}{n}\gamma + an\beta\mu^2\right) (6l^2 + 6ln\mu - 6l\mu + 2n^2\mu^2 - 3n\mu^2 + \mu^2) - c \end{aligned}$$

Агент выиграет от объединения, если $U_{n\mu}(l) - U_\mu(l) > 0$.

$$\begin{aligned} U_{n\mu}(l) - U_\mu(l) &= \\ &b + an^2\mu^2 + gn^2\mu^2 - \frac{1}{6}n \left(\frac{b}{n}\gamma + an\beta\mu^2\right) (6l^2 + 6ln\mu - 6l\mu + 2n^2\mu^2 - 3n\mu^2 + \mu^2) - \\ &(n\mu^2g + \mu^2(a(1 - \beta l^2)) + b(1 - \gamma l^2)) = \\ &\left(b\gamma - n \left(\frac{b}{n}\gamma + an\beta\mu^2\right) + a\beta\mu^2\right) l^2 + \frac{1}{6}n(6\mu - 6n\mu) \left(\frac{b}{n}\gamma + an\beta\mu^2\right) l + \\ &\left(an^2\mu^2 - a\mu^2 + gn^2\mu^2 - \frac{1}{6}n \left(\frac{b}{n}\gamma + an\beta\mu^2\right) (2n^2\mu^2 - 3n\mu^2 + \mu^2) - gn\mu^2\right) \\ &= (b\gamma + a\beta\mu^2 - (b\gamma + an^2\beta\mu^2)) l^2 + \mu(1 - n)(b\gamma + an^2\beta\mu^2) l + \\ &\left(an^2\mu^2 - a\mu^2 + gn^2\mu^2 - \frac{1}{6}n \left(\frac{b}{n}\gamma + an\beta\mu^2\right) (2n^2\mu^2 - 3n\mu^2 + \mu^2) - gn\mu^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dl} (U_{n\mu}(l) - U_\mu(l)) &= \\ 2a\beta\mu^2(1 - n^2)l + \mu(1 - n)(b\gamma + an^2\beta\mu^2) &< 0 \end{aligned}$$

В соответствии с правилом Объединения группы объединяться, если для большинства членов в каждой из групп объединение окажется выгодным. Так как разница $U_{n\mu}(l) - U_\mu(l)$ убывает с рангом индивидов, необходимо рассмотреть решение только медианного члена группы $l = \frac{\mu}{2}$.

$$\begin{aligned} U_{n\mu}\left(\frac{\mu}{2}\right) - U_\mu\left(\frac{\mu}{2}\right) &= \\ -\mu^4 \left(\frac{1}{3}an^4\beta - \frac{1}{12}an^2\beta\right) + \mu^2 \left(\frac{1}{12}b\gamma + an^2 + gn^2 - \frac{1}{3}bn^2\gamma\right) + \\ &b \left(\frac{1}{4}\gamma\mu^2 - 1\right) + a\mu^2 \left(\frac{1}{4}\beta\mu^2 - 1\right) - gn\mu^2 = \\ &-\frac{1}{12}\mu^2(n - 1)(4b\gamma - 12a - 12an - 12gn + 4bn\gamma + \\ &(3a\beta + 4an^2\beta + 4an^3\beta + 3an\beta)\mu^2) > 0 > 0 \end{aligned}$$

Существует пороговое значения размера μ^{**} , меньше которого n группам выгодно объединиться $\mu < \mu^{**}$.

$$\begin{aligned} -4b\gamma + 12a + 12an + 12gn - 4bn\gamma &= (3a\beta + 4an^2\beta + 4an^3\beta + 3an\beta) \mu^{**2} \\ &= \frac{12a(n+1) + 12gn - 4b\gamma(n+1)}{4an^2\beta(n+1) + 3a\beta(n+1)} = \frac{12a + 12g - 4b\gamma}{4a\beta n^2 + 3a\beta} - \frac{1}{n+1} \frac{12g}{4an^2\beta + 3a\beta} \end{aligned}$$

Однако наша цель найти такое значение μ^{**} , что для любой коалиции групп $n \in [0, M]$ было бы не выгодно объединяться. Для этого исследуем как μ^{**} зависит от n :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \mu^{**2} &= \frac{d}{dn} \left(\frac{12a + 12g - 4b\gamma}{4a\beta n^2 + 3a\beta} - \frac{1}{n+1} \frac{12g}{4an^2\beta + 3a\beta} \right) = \\ &= -\frac{4}{a\beta(4n^3 + 4n^2 + 3n + 3)^2} \left(\begin{array}{c} 48an^2 - 9g + 24an^3 + 12gn^2 + \\ 24gn^3 + 24an - 8bn\gamma - 16bn^2\gamma - 8bn^3\gamma \end{array} \right) \end{aligned}$$

Многочлен в скобках может быть переписан следующим образом:

$$\begin{aligned} 48an^2 - 9g + 24an^3 + 12gn^2 + 24gn^3 + 24an - 8bn\gamma - 16bn^2\gamma - 8bn^3\gamma = \\ (24a - 8b\gamma + 24g)n^3 + (48a + 12g - 16b\gamma)n^2 + (24a - 8b\gamma)n - 9g \end{aligned}$$

Как видно он возрастает с ростом n , потому что согласно Предположению 2 $a > b\gamma$.

$$\begin{aligned} (24a - 8b\gamma + 24g)n^3 + (48a + 12g - 16b\gamma)n^2 + (24a - 8b\gamma)n - 9g > \\ [(24a - 8b\gamma + 24g)n^3 + (48a + 12g - 16b\gamma)n^2 + (24a - 8b\gamma)n - 9g]_{n=2} = \\ = 432a + 231g - 144b\gamma > 0 \quad (\text{according to Assumption 2 } a > b\gamma) \end{aligned}$$

Значит $\frac{d}{dn} \mu^{**2} < 0$. Следовательно, если невыгодно объединяться двум группам одинакового размера, то не будет выгодно объединяться n группам того же размера. Конфигурация из M групп одинакового размера является В-равновесием только, если $\mu > \mu_{n=2}^{**}$.

$$\begin{aligned} (\mu_{n=2}^{**})^2 &= \frac{12a + 12g - 4b\gamma}{4a\beta n^2 + 3a\beta} - \frac{1}{n+1} \frac{12g}{4an^2\beta + 3a\beta} = \frac{1}{19a\beta} (12a + 12g - 4b\gamma) - \\ \frac{4}{19a} \frac{g}{\beta} &= \frac{4(3a + 2g - b\gamma)}{19a\beta} \end{aligned}$$

Однако мы не должны забывать об условии на А-стабильность. А значит мы должны сравнить $\mu_{n=2}^{**}$ и μ^* . Ниже будет показано, что $\mu_{n=2}^{**} > \mu^*$, что означает, что верхнее ограничение на количество групп в равновесии всегда соответствует возможности объединения.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mu_{n=2}^{**} & vs & \mu^* & \iff & \frac{4(3a+2g-b\gamma)}{19a\beta} & vs & \frac{a-b\gamma}{2a\beta} \\
16g+24a-8b\gamma & vs & 19a-19b\gamma & \iff & & & \\
16g & vs & -5a-11b\gamma & & & &
\end{array}$$

В итоге, мы получаем следующий результат: Конфигурация является В-равновесием, если группы имеют одинаковый размер и число групп ограничено следующим неравенством: $M \leq \sqrt{\frac{19a\beta}{4(3a+2g-b\gamma)}}$

■

Доказательство Утверждения 5.

Предположим, что две группы из В-равновесной конфигурации объединились. Рассмотрим решение других групп. Выгодно ли теперь кому то из них объединиться? Для того чтобы это проверить мы рассмотрим две ситуации. Объединение 3 групп размера μ и объединение двух групп размером 2μ и μ соответственно.

$$\begin{aligned}
U_{\mu+\mu+\mu}(l) &= (3\mu)^2 g + (3\mu)^2 \left(\frac{\mu}{3\mu} a(1-\beta l^2) + \frac{\mu}{3\mu} a(1-\beta(\mu+l)^2) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\mu}{3\mu} a(1-\beta(2\mu+l)^2) \right) + \frac{\mu}{3\mu} b(1-\gamma l^2) + \\
&\quad \frac{\mu}{3\mu} b(1-\gamma(\mu+l)^2) + \frac{\mu}{3\mu} b(1-\gamma(2\mu+l)^2) - c \\
U_{\mu+2\mu}(l) &= (3\mu)^2 g + (3\mu)^2 \left(\frac{\mu}{3\mu} a(1-\beta l^2) + \frac{2\mu}{3\mu} a(1-\beta(2\mu+l)^2) + \right. \\
&\quad \left. \frac{\mu}{3\mu} b(1-\gamma l^2) + \frac{2\mu}{3\mu} b(1-\gamma(2\mu+l)^2) \right) - c
\end{aligned}$$

Как легко заметить полезности индивида с рангом l в начальной группе довольно схожи. Однако, последний вариант исключает возможность человеку средний ранг. Члены $\frac{\mu}{3\mu} a(1-\beta(\mu+l)^2)$, $\frac{\mu}{3\mu} b(1-\gamma(\mu+l)^2)$ в первой функции полезности превращаются в $\frac{\mu}{3\mu} a(1-\beta(2\mu+l)^2)$, $\frac{\mu}{3\mu} b(1-\gamma(2\mu+l)^2)$ во втором случае. Значит полезность в случае объединения трех групп больше полезности в случае объединения μ и 2μ .

$$U_{\mu+2\mu}(l) < U_{\mu+\mu+\mu}(l)$$

Следовательно, если мы рассмотрим любое В-равновесие M групп одинакового размера, то так как в нем не выгодно объединиться никакому количеству групп, то оно будет устойчивым.

$$\Delta U_{\mu+2\mu}(l) < \Delta U_{\mu+\mu+\mu}(l) < 0$$

В результате получаем, что любое В-равновесие В-устойчивое. ■

Доказательство утверждения 6.

Для начала рассмотрим только одну группу μ . Если член является лидером группы, он получает максимальный выигрыш по сравнению с остальными членами. Только для граждан с большим рангом может оказаться рационально организовать новую группу. Они так же хотят привлечь других членов. Но для этого им надо пообещать дополнительные привилегии лидерства, или попросту более высокий ранг в группе. В итоге лидер новой группы будет человек с наименьшим рангом в исходной группе (чем ниже ранг тем больше дополнительные привилегий). Обозначим за l ранг индивида в новой группе размера z .

Тогда полезность членов до отделения:

$$U_{\mu}(l) = \sum_{j=1}^{M-1} \mu_j^2 g + \mu^2 g + \mu^2 a(1 - \beta(\mu - (z - l))^2) + b(1 - \gamma(\mu - (z - l))^2)$$

После отделения члены новой группы получают следующую полезность:

$$U_z(l) = \sum_{j=1}^{M-1} \mu_j^2 g + z^2 g + (\mu - z)^2 g + z^2 a(1 - \beta l^2) + b(1 - \gamma l^2)$$

Для того чтобы новая группа была образована это должно быть выгодно для каждого из ее членов.

$$\begin{aligned} U_z(l) - U_{\mu}(l) &= z^2 g + (\mu - z)^2 g + z^2 a(1 - \beta l^2) + b(1 - \gamma l^2) - \\ &(\mu^2 g + \mu^2 a(1 - \beta(\mu - (z - l))^2) + b(1 - \gamma(\mu - (z - l))^2)) = \\ &-(z - \mu) \left(\begin{array}{c} 2bl\gamma - az - 2gz - a\mu - bz\gamma + b\gamma\mu + \\ a\beta\mu^3 + al^2z\beta + 2al\beta\mu^2 + al^2\beta\mu - az\beta\mu^2 \end{array} \right) = \\ &(z - \mu) \left(\begin{array}{c} (az\beta + a\beta\mu) l^2 + (2a\beta\mu^2 + 2b\gamma) l + \\ (b\gamma\mu - az - 2gz - bz\gamma - a\mu + a\beta\mu^3 - az\beta\mu^2) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Разница между полезностями возрастает по l . ($z < \mu$) Значит достаточно проверить только $l = 0$.

$$\begin{aligned} U_z(0) - U_{\mu}(0) &= \\ &-(z - \mu) (b\gamma\mu - az - 2gz - bz\gamma - a\mu + a\beta\mu^3 - az\beta\mu^2) = \\ &(a\beta\mu^2 + a + 2g + b\gamma) z^2 + (a\mu - \mu(a\beta\mu^2 + a + 2g + b\gamma) - b\gamma\mu - a\beta\mu^3) z + \end{aligned}$$

$$\mu (b\gamma\mu - a\mu + a\beta\mu^3)$$

Абсцисса вершины параболу равняется:

$$z^o = -\frac{a\mu - \mu (a\beta\mu^2 + a + 2g + b\gamma) - b\gamma\mu - a\beta\mu^3}{2(a\beta\mu^2 + a + 2g + b\gamma)} =$$

$$\frac{g\mu + b\gamma\mu + a\beta\mu^3}{a\beta\mu^2 + a + 2g + b\gamma} = \frac{(g + b\gamma + a\beta\mu^2)\mu}{2g + b\gamma + a\beta\mu^2 + a} < \mu$$

Новая группа не будет организована, только если для каждого $z \in [0, \mu]$ является не рациональным ее создание. Следовательно так как $z^o \in [0, \mu]$ достаточно проверить только для $z = 0$ и $z = \mu$.

) Рассмотрим возможность появления бесконечно малых групп:

$$[U_z(0) - U_\mu(0)]|_{z=0} =$$

$$[(z - \mu)(a\mu + az + 2gz + bz\gamma - b\gamma\mu - a\beta\mu^3 + az\beta\mu^2)]|_{z=0} =$$

$$\mu^2 (a\beta\mu^2 - (a - b\gamma)) < 0$$

b) Как понятно появление больших групп так же не будет выгодно. $z = \mu$

$$[U_z(0) - U_\mu(0)]|_{z=\mu} =$$

$$[(z - \mu)(a\mu + az + 2gz + bz\gamma - b\gamma\mu - a\beta\mu^3 + az\beta\mu^2)]|_{z=\mu} = 0$$

Следовательно необходимое и достаточное условие для того чтобы $U_z(0) - U_\mu(0) < 0$ является $a\beta\mu^2 < a - b\gamma$. Обозначим самый большой размер групп в С-равновесии за $\mu - \sqrt{\frac{a - b\gamma}{a\beta}}$. В результате, получаем что конфигурация является С-равновесием, если все группы имеют одинаковый размер и $\sqrt{\frac{a\beta}{a - b\gamma}} < M \leq \sqrt{\frac{2a\beta}{a - b\gamma}}$

А теперь мы исследуем понятие С-стабильности. Предположим, что некоторая бесконечно малая подгрупп отделилась от основной группы. Тогда, полезность члена с наибольшим рангом станет равной:

$$U_P(\mu - \varepsilon, g, \mu - \varepsilon) = \sum_{j=1}^{M-1} \mu_j^2 g + (\mu - \varepsilon)^2 g + \varepsilon^2 g +$$

$$(\mu - \varepsilon)^2 a(1 - \beta(\mu - \varepsilon)^2) + b(1 - \gamma(\mu - \varepsilon)^2) - c$$

Полезность индивида с наибольшим рангом в отделившейся группе равняется:

$$U_P(\varepsilon, g, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{M-1} \mu_j^2 g + (\mu - \varepsilon)^2 g + \varepsilon^2 g + \varepsilon^2 a(1 - \beta \varepsilon^2) + b(1 - \gamma \varepsilon^2) - c$$

$$\begin{aligned} U_P(\varepsilon, g, \varepsilon) - U_P(\mu - \varepsilon, g, \mu - \varepsilon) &= \\ (\mu - \varepsilon)^2 a(1 - \beta (\mu - \varepsilon)^2) + b(1 - \gamma (\mu - \varepsilon)^2) - (\varepsilon^2 a(1 - \beta \varepsilon^2) + b(1 - \gamma \varepsilon^2)) &= \\ -\mu (\mu - 2\varepsilon) (a\beta \mu^2 - 2a\beta \mu \varepsilon + 2a\beta \varepsilon^2 - a + b\gamma) &= \\ -\mu (\mu - 2\varepsilon) (a\beta \mu^2 - (a - b\gamma) - 2a\beta \mu \varepsilon + 2a\beta \varepsilon^2) < 0 \end{aligned}$$

Следовательно, если $\mu < \mu^c = \sqrt{\frac{a - b\gamma}{a\beta}}$, то для других членов основной группы не выгодно присоединиться к новой. Анализ возможности других граждан к присоединению к новой группе может быть произведен аналогично. Также является не рациональным, для подгрупп основной группы отделяться от нее после отделения, потому что это еще менее выгодно, чем для индивидов. В итоге получаем, что любое С-равновесие является С-стабильным равновесием. ■

Список литературы

Alesina, Alberto and Spolaore, Enrico; "On the Number and Size of Nations" Quarterly Journal of Economics, 112, 1027-56, November (1997).

BBC archive, Broadcast February 2006: From Dictatorship to Dimocracy.

Cole, G.D.H; A Short History of British Working Class Movement, 1789-1947, London: George Allen & Unwin, (1948).

Downs, Anthony; An Economic Theory of Democracy. New York: Harper and Row; (1957)

Dulles, Foster Rhea; Labor in America: A History, New York: Thomas Y. Crowell, (1949).

Elster, J. (1988) The Cement of Society: A Study of Social Order. Cambridge : Cambridge University Press.

Fudenberg, Drew and Eric Maskin; The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information, *Econometrica* 54, 3:533–554, (1986).

Hardin, R.; Collective action as an agreeable n-person prisoner's dilemma, *Behavioral Science*, 15: 472-481, (1971).

Hardin, R.; With Regret: Comment on Rational Models, Collective Goods, and Nonelectoral Political Behavior; *The Western Political Quarterly*; Vol. 35 No.2, Jun. (1982).

Kuran, Timur Sparks and Praire Fires: A Theory of Unanticipated Political Revolution. *Public Choice* 61: 41-74, (1989).

Khawaja, Marwan, "Repression and Popular Collective Action: Evidence from the West Bank," *Sociological Forum* 8, no. 1 : 47-71; Donatella, Op. Cit., 3-28, (1993).

Lichbach, Mark ; *The Rebel's Dilemma*, University of Michigan Press; Ann Arbor; (1995).

McCarthy, John D. and Zald Mayer N. Resource Mobilization and Social Movements: A Partial Theory, *The American Journal of Sociaology*, Vol. 82, No.6, (1977).

Mill, John; *The Principals of Political Economy*, Book V; London, Macmillan, 1883.

Muller, Edward and Karl-Dieter Opp; "Rational Choice and Rebellious Collective Action" *American Political Science Review* 80:2 (June 1986), pp. 471-488.

Muller, Edward and Karl-Dieter Opp vs. George Klosko; "Rebellious Collective Action Revisited" *American Political Science Review* 81:2 (June 1987), pp.557-564.

Oliver Pamela, Marwell Gerald and Teixeira Ruy; *A Theory of the Critical Mass. I. Interdependence, Group Heterogeneity, and the production of Collective Action.* *The American Journal of Sociology*, Vol. 91, No.3. (Nov. 1985)

Oliver Pamela and Myers Daniel; *Formal Models in Studying Collective Action and Social Movements.*

Olson, Mancur; *The Logic of Collective Action: Public Goods and Theory of Groups.* Cambridge, MA: Harvard University press, (1965).

Popkin, Samuel; *The Rational Peasant: The Political Economy of Rural Society in Vietnam*, University of California Press; Berkeley (1979).

Roemer, John, Rationalizing revolution ideology. *Econometrica*. Volume 53 (Jan. 1985).

Schofield, Norman; A Game Analysis of Olson's Game of Collective Action; The Journal of Conflict Resolutions, Vol.19, No.3 (Sep., 1975), 441-461.

Sidgwick, Henry; The Principals of Political Economy; London, Macmillan, 1883.

Skocpol, Theda States and Revolutions. Cambridge: Cambridge University Press, (1979) .

Toner, Jerome, The Closed Shop, Washington, D.C. American Council on Public Affairs, 1942.

Useem, Bert, Solidarity Model, Breakdown model, and the Boston Anti-Busing Movement American Sociological Review, Vol. 45, No. 3 (1980).

Van Belle, Douglas, Leadership and Collective Action: The Case of Revolution, International Studies Quarterly (1996).

Webb, Sidney and Beatrice, Industrial Democracy, London: Longmas, Green, 1902.

Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/>, Copyright 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc. 51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Zald, Mayer N., Ash Roberta, Social Movement Organizations: Growth, Decay and Change, Social Forces, Vol. 44, No. 3. (1966).