Содержание

Введение

Данная работа посвящена новой современной теории — теории коллективной репутации. Хорошо известно, что коллективная репутация играет важную роль в экономике и общественных науках. Народности, этнические, расовые, религиозные группы имеют свою репутацию. Кого-то считают честными, кого-то ленивыми, коррумпированными и т. п. Некоторые фирмы получают дополнительную ренту от своей высокой репутации.

В 1996 году Жан Тироль написал свою работу [7], в которой впервые построил модель, рассматривающую групповую репутацию как агрегированную репутацию индивидуумов, принадлежащих группе. Стимулы каждого агента, таким образом, зависят не только от его прошлого поведения, но и от поведения всей группы, так как его личное поведение в прошлом наблюдается несовершенно и работодатели ориентируются на прошлое поведение группы в целом. Рассматриваемая Тиролем модель является существенно динамической, в которой последующие поколения сменяют предыдущие, при этом показано, что несмотря на то, что поколение, создавшее группе плохую репутацию, уже ушло, группа не в силах моментально изменить ситуацию и «забыть» про старые грехи.

Сформулируем основные принципы теории.

(1) *Репутация группы строится из репутации её членов.* Каждый агент в группе обладает индивидуальными характеристиками

(талант, честность, старательность и т. п.). Прошлое индивидуальное поведение выявляет информацию, касающуюся этих характеристик, и порождает групповую репутацию.

(2) *Индивидуальное поведение агентов в прошлом наблюдается несовершенно.* Если бы индивидуальное поведение было наблюдаемо, то принадлежность к коллективу никак не влияла бы на поведение агентов. Если бы индивидуальное поведение не наблюдалось вообще, то у агентов не было бы никаких стимулов поддерживать свою личную репутацию. Таким образом, несовершенство наблюдения прошлого поведения агентов является ключевым аспектом теории коллективной репутации.

(3) *Прошлое поведение группы обуславливает поведение её членов, и следовательно, может быть использовано для предсказания индивидуального поведения членов группы.* То есть коллективная репутация влияет на стимулы агентов в группе.

(4) *Поведение новых членов группы зависит от поведения их предшественников в прошлом.*

В данной работе рассматривается модификация модели Тироля, в которую введено так называемое забывание. В исходной модели Тироля агент, будучи коррумпированным один раз, навсегда пятнает свою репутацию, и даже если он никогда больше не вовлекается в нечестную деятельность, у него нет никакой возможности исправить свою репутацию. А именно, вероятность обнаружить то, что он был коррумпирован в прошлом не зависит от времени. Кажется естественным, напротив, что чем дольше человек ведёт себя честно, тем менее он должен страдать от «прошлых грехов».

В то же время не вызывает сомнения, что если агент всё время ведёт себя нечестно, то его репутация должна портиться (чем дальше, тем хуже).

Введение забывания приводит к двум эффектам в данной модели.

(1) С одной стороны, забывание снижает давление на агента, то есть его будущие потери от нечестного поведения в настоящий момент времени уменьшаются. Это приводит к тому, что стимулов не быть коррумпированными становится меньше.
(2) С другой стороны, если агент уже был коррумпирован в прошлом, то забывание позволяет увеличить выигрыш от возвращения «на честный путь», и следовательно, это может уменьшить общий уровень коррупции и поддержать коллективную репутацию.

Как видим, эти два эффекта действуют в противоположных направлениях. В данной работе произведена попытка проанализировать, какой из эффектов сильнее влияет на поведение агентов в группе.

Интуиция подсказывает, что должен быть «оптимальный» уровень забывания, при котором коллектив преодолевает последствия своего поведения в прошлом максимально быстро. В то же время, если забывать слишком быстро, то поддерживать индивидуальную репутацию становится невыгодно (всё равно грехи забудут почти сразу).

Действительно, модель подтверждает изложенное выше. В некоторой области изменения параметров при увеличении «скорости» забывания сначала наблюдается улучшение ситуации (репутация восстанавливается всё быстрее), но как только «скорость» забывания достигает некоторого критического уровня, поддержание хорошей репутации становится невозможным.

Дальнейшая часть работы организована следующим образом: в обзоре литературы приводятся альтернативные подходы к понятию репутации и обозначается место работы Тироля (а значит и данной работы, на ней основанной) среди ряда других работ в этой области. Далее изложена простая динамическая модель коллективной репутации, исследованы её стационарные состояния и равновесия.

Обзор литературы

В настоящее время в литературе существует три основных подхода к определению понятия репутации (стереотипа).

Теория конвенции (conventions). Под *конвенцией* (или нормой поведения) понимают некоторое равновесие Нэша в игре с несколькими равновесиями. В экономике многие модели имеют множество равновесий, например координационные игры, повторяющиеся игры, макроэкономические модели с экстерналиями и другие. Интерпретацию конвенции как некоторого равновесия рассматривают, например в работах [4], [5], [8]. В своей работе [6] Крепс приравнивает корпоративную культуру к конвенции (под корпоративной культурой в фирме он понимает сообщение подчинённым их ожидаемого поведения).

Одна выдающаяся модель конвенции была построена в 1973 году Эрроу. Это его статистическая теория дискриминации. Эрроу рассматривал такую схему в игре типа «начальник–подчинённый»: Вначале агенты (подчинённые) инвестируют в свою квалификацию. Начальники несовершенно наблюдают квалификацию рабочих при приёме на работу (игра однократная, начальник принимает решение о зарплате агента всего один раз). Так как наблюдение несовершенно, то наниматель формирует предварительные ожидания касательно инвестиций рабочих. Если при этом увеличение априорной вероятности того, что рабочий инвестировал, ведёт к тому, что инвестировать становится более выгодно, то могут возникнуть множественные равновесия. В литературе часто множественные равновесия интерпретируются как различия в поведении рабочих, которые основываются на таких наблюдаемых характеристиках как раса, пол и т. п.

Теория общих характеристик (common trait). Другой подход к теории репутации заключается в отличие от теории конвенции, где наблюдалась координация агентов в условиях существования нескольких равновесий, в том, что стереотип считается некоей внутренней ненаблюдаемой характеристикой каждого агента. Наблюдение поведения одного агента позволяет выявить некоторую информацию относительно этих общих характеристик и приводит к тому, что начальник корректирует свои ожидания относительно поведения остальных агентов данной группы. В своей работе [2] Бенабу и Гертнер рассматривают ситуацию, в которой издержки продавцов подвергаются всевозможным шокам, то есть цены становятся неинформативными, и покупатели нащупывают предложение, используя идеи теории общих характеристик. В этом случае репутация приобретает свойства общественного блага (см. [3]). Предположим, например, что университет США рассматривает дело студента, поступающего из иностранного университета. Если при этом информация об университете ограничена, но ранее из него поступали учиться студенты, то вероятность поступления скорее всего будет зависеть от выполнения программы обучения студентами, которые уже учатся.

Подход Тироля (history-dependent approach). При этом подходе репутация группы рассматривается как агрегированная репутация индивидуумов. Основная идея подхода в том, что прошлое индивидуального агента наблюдается несовершенно, в отличие от агрегированного поведения всей группы, поэтому приходится использовать информацию о группе в целом (хотя внутри неё агенты могут различаться). Этот подход был предложен Тиролем в его работе [7].

Поскольку данная дипломная работа базируется именно на этом подходе, то попробуем рассмотреть его в сравнении с предыдущими.

Подход Тироля отличается от теории конвенций следующими чертами.

Во-первых, множественность равновесий в теории дискриминации не зависит от того, как действуют другие агенты в модели (в принципе, можно рассматривать *одного* нанимателя и агента и получить тот же результат). Таким образом, в этой теории нет ничего, что было бы присуще именно групповому поведению. Во-вторых, групповая репутация

— это, по сути своей, динамическое явление, в то время как теория Эрроу статична. В-третьих, в статистической теории стереотипы *могут* возникать, тогда как при подходе Тироля они возникают *обязательно*.

Теория общих характеристик отличается от подхода Тироля несколькими аспектами. Если, например, информационные экстерналии в группе возникают под воздействием ненаблюдаемого обучения агентов, каких-либо шоков и т. п., то более разумно применять для объяснения стереотипов теорию общих характеристик. Но в то же время в другом подходе такая экстерналия влияет на последующее поведение, тогда как в модели общих характеристик исчезновение экстерналии ведёт к исчезновению стереотипа. Кроме того, если в теории общих характеристик рассматривается кратковременная принадлежность к группе (модель тоже статична), то при подходе Тироля поведение агентов зависит и от своего прошлого поведения (через индивидуальную репутацию), так как в этой модели каждый агент находится в группе некоторое ненулевое время.

Модель

В этой части работы определяется простая модель, являющаяся модификацией исходной модели Тироля, описанной в статье [7]

Население. В данной модели рассматривается большая стационарная экономика. Агенты в экономике делятся на два класса — работодатели (начальники) и рабочие (подчинённые).

Сначала рассмотрим подчинённых. Каждый агент, живущий в момент времени $t \in \mathbb{Z}$, доживает до момента $t+1$ с вероятностью $\lambda \in (0,1)$. Каждая «смерть» в этой экономике компенсируется появлением нового агента, так что общее население остаётся неизменным. Кроме того, предполагается, что агенты бесконечно малы по сравнению с размером группы.

Начальники предполагаются живущими один период. Это сделано для того, чтобы исключить узнавание конкретного агента работодателем. Таким образом, агенты для начальников неразличимы.

Наём на работу. В каждый момент времени t каждый агент нанимается на работу к начальнику. Начальник решает, какую работу предоставить подчинённому, подчинённый же решает, как себя вести — честно или нечестно.

Работодатель может предоставить либо эффективную работу (работа 1), которая чувствительна к поведению рабочего, либо менее эффективную (работа 2), но и менее чувствительную. Соответственно, выигрыши начальника при предоставлении эффективной работы равны H, если агент ведёт себя честно, и D в противном случае. Если же работа менее эффективна, то выигрыши начальника равны h и d, соответственно. Параметры H, D, h и d удовлетворяют следующим неравенствам:

$$D < d \leqslant h < H,$$

что и отражает тот факт, что работа 1 более эффективная, но и более чувствительная к нечестности агента. При этом предполагается, что $d \geqslant 0$, то есть нанимать рабочего лучше, чем не нанимать вообще.

Рассмотрим теперь краткосрочные выигрыши подчинённых. Будучи нанятым на работу 1, агент получает зарплату B. На работе 2 он получает b, где $0 \leqslant b < B$. В случае, если агент коррумпирован (нечестен), то он получает дополнительный выигрыш $G > 0$.

Таким образом, в одном периоде игра между начальником и подчинённым может быть описана диаграммой, изображённой на рисунке 1.

Заметим, что если игра не повторяется, то у подчинённого есть доминирующая стратегия — быть нечестным.

Предпочтения агентов. Существует три типа агентов: «честные», «нечестные» и «беспринципные». Их пропорции не зависят от времени и равны α, β и γ соответственно (α, β, $\gamma > 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$).

Честные агенты никогда не бывают коррумпированы. Наоборот, нечестные агенты всегда коррумпированы. Рассмотрим теперь поведение беспринципных.

Они максимизируют свой совокупный выигрыш (за все периоды, начиная с текущего), приведённый к настоящему времени. Дисконтирующий множитель у всех беспринципных агентов одинаков и равен $\delta \in (0, 1)$.

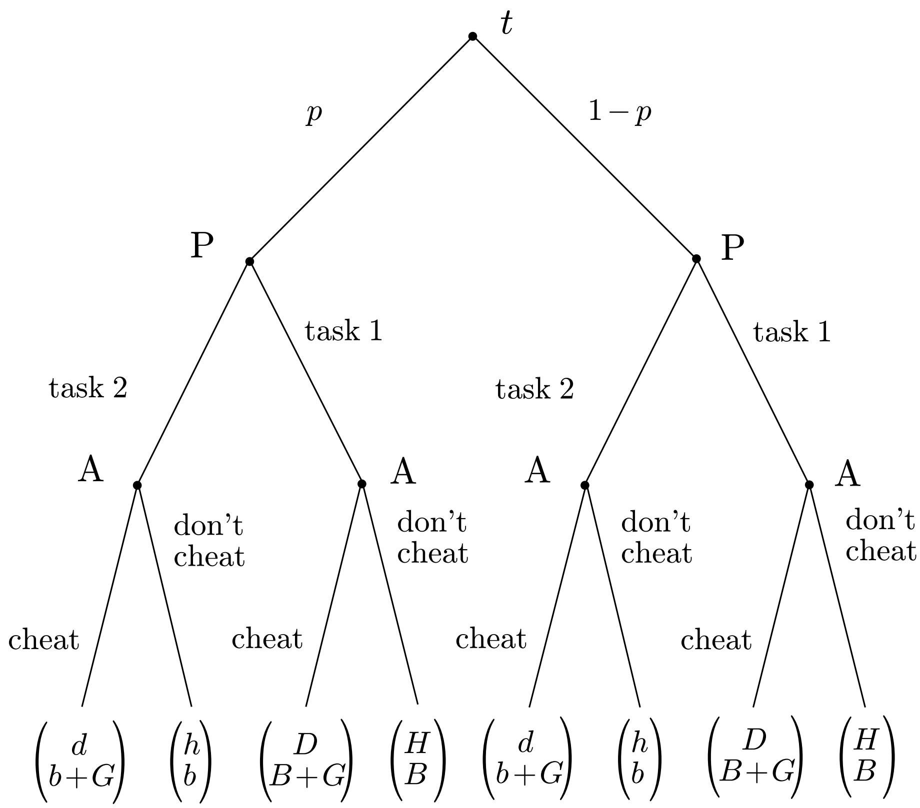

Рисунок 1

Информация. Подчинённые знают свой тип (то есть свои предпочтения). Начальники знают пропорции α, β, γ, и несовершенным образом могут наблюдать прошлое поведение агента, которого они нанимают на работу (а именно, был ли он коррумпирован в прошлом, когда, сколько раз и т. п.).

Следуя Тиролю (см. [7]) несовершенная наблюдаемость прошлого агента формализуется следующим образом: начальник обнаруживает, что подчинённый был коррумпирован в прошлом с некоторой вероятностью $p \in (0, 1)$ (если агент действительно был в прошлом коррумпирован).

Здесь мы введём новый элемент в модель (по сравнению с Тиролем). А именно эффект *забывания.* В оригинальной модели вероятность обнаружения нечестного поведения в прошлом не зависела от времени. В то же время кажется естественным, что чем более давно человек нарушал правила, тем сложнее его уличить в этом.

В то же время если агент продолжает вести себя нечестно, то вероятность его обнаружения растёт.

Формализация процесса выглядит следующим образом: Вводятся два параметра — (ζ — «скорость» роста вероятности обнаружения, ξ — «скорость» забывания). Пусть вероятность обнаружения нечестности в момент времени t равна p_t. Тогда в зависимости от его поведения

$$p_{t+1} = \begin{cases} \xi p_t, & \text{если агент честен в момент } t, \\ 1 - \zeta(1 - p_t), & \text{если агент нечестен в момент } t. \end{cases}$$

Здесь $\xi \in [0, 1]$, $\zeta \in [0, 1]$. Приведём примеры, как будет выглядеть эта вероятность в простейших случаях.

Если агент всё время честен, начиная с момента t_0, то

$$p_t = \xi^{t-t_0} p_{t_0} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Если агент всё время нечестен, начиная с момента t_0, то

$$p_t = 1 - \zeta^{t-t_0}(1 - p_{t_0}) \to 1 \quad \text{при } t \to \infty.$$

У «новорождённого» агента вероятность обнаружения того, что он был коррумпирован в прошлом равна нулю.

Таким образом, получилось двупараметрическое семейство задач. В дальнейшем будет предпринята попытка проанализировать изменение решений в зависимости от параметров ξ и ζ.

Упрощения

Итак, как мы уже видели, в каждый момент времени в игре у начальника есть четыре чистые стратегии, а у подчинённого — шестнадцать (у него четыре информационных множества, и из каждого выходит по две альтернативы). В то же время легко заметить, что разница между краткосрочными выигрышами агента в случае нечестного поведения и в случае честного не зависит от того, в каком информационном множестве принимается решение (и равна G). Более того, изменение репутации агента (вероятности его поимки) тоже не зависит от информационного множества.

Кроме того, введём следующее условие:

$$\gamma(H-h)+\beta(D-d)<0. \tag{1}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть параметры модели удовлетворяют условию* (1), *и начальник обнаружил, что агент был коррумпирован в прошлом. Тогда доминирующей стратегией для начальника будет предложить подчинённому неэффективную работу.*

Доказательство. Пусть начальник установил, что агент был нечестен в прошлом. Значит это либо нечестный агент, либо беспринципный. Доля нечестных агентов, которых можно поймать, равна

$$\beta(1-\lambda)(\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots)=\lambda\beta$$

(только «новорождённые» агенты не были ещё коррумпированы в прошлом). Доля беспринципных агентов, которых можно уличить, равна $a\lambda\gamma$, для некоторого $a \in [0,1]$ (вообще говоря, кто-то мог быть всегда честным). Таким образом, максимальная разница между выигрышем начальника от предоставления работы 1 человеку, о котором известно, что он был коррумпирован в прошлом, и выигрышем от предоставления работы 2 равна

$$\frac{a\gamma}{a\gamma+\beta}(H-h)+\frac{\beta}{a\gamma+\beta}(D-d)<0.$$

(Если все беспринципные работают честно). То есть начальнику всегда выгодно дать неэффективную работу. $\square$

Поэтому можно упростить игру и рассматривать схему, изображённую на рисунке 2.

Здесь у начальника и у агента всего по две стратегии при каждом t. В то же время каждому равновесию упрощённой игры соответствует равновесие исходной, и наоборот, каждому совершенному равновесию исходной игры соответствует равновесие упрощённой.

Стационарные состояния

Для начала проанализируем стационарные состояния модели (найдём те значения параметров, при которых существуют стационарные состояния).

Легко доказать, что в зависимости от значений параметров может быть либо одно, либо три стационарных состояния (если они вообще существуют).

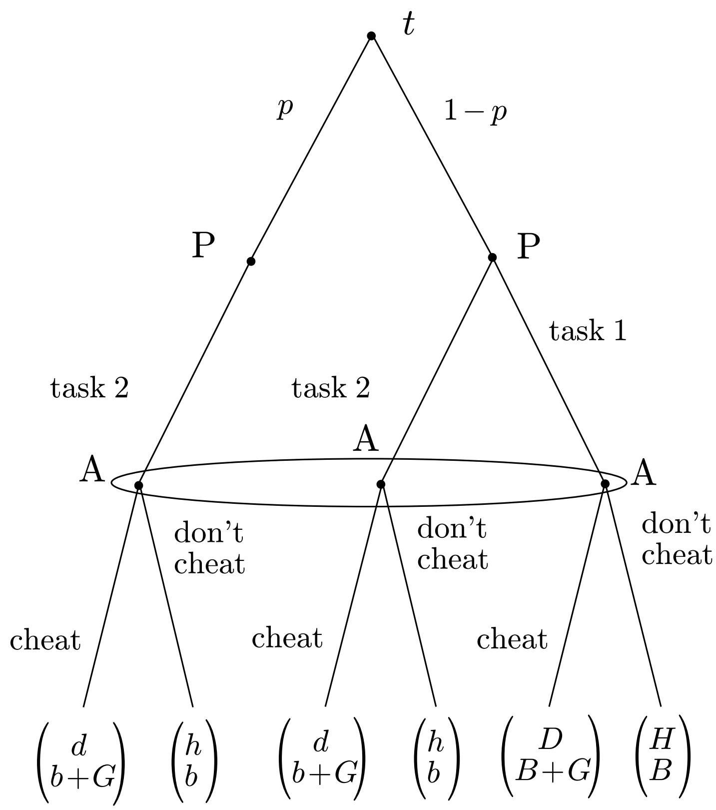

Рисунок 2

Стационарное состояние с высоким уровнем коррупции (HCSS). Оно характеризуется следующими свойствами:

(1) Все беспринципные подчинённые ведут себя нечестно;

(2) Начальники предлагают всем агентам работу 2.

Справедлива следующая

Лемма 2. *Стационарное состояние с высоким уровнем коррупции существует если и только если*

$$\alpha(H-h)+(\beta+\gamma)\frac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)\leqslant 0. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Выражение (2) представляет собой разницу между выигрышем начальника, предоставляющего эффективную работу и предоставляющего неэффективную работу в случае, когда все беспринципные агенты ведут себя нечестно. Так как начальнику выгоднее предлагать работу 2, то эта разница должна быть неположительной.

Достаточность. Аналогично, если все беспринципные коррумпированы, и выполнено (2), то начальнику выгоднее предоставлять работу 2. Если же начальник всем предлагает работу 2, то для рабочего нечестное поведение является оптимальным (работая честно, агент получает b, а нечестно — $b + G$ за период).

Заметим, что неравенство (2) эквивалентно следующему:

$$\zeta \geqslant \frac{\alpha(H-h) + (1-\lambda)(\beta+\gamma)(D-d)}{\lambda\alpha(H-h)}.$$

Поэтому, если наложить на параметры условие

$$\alpha(H-h) + (1-\lambda)(\beta+\gamma)(D-d) < 0, \tag{3}$$

то стационарное состояние с высоким уровнем коррупции будет существовать при всех значениях $\zeta \in [0, 1]$.

Стационарное состояние с низким уровнем коррупции (LCSS). Оно характеризуется следующими свойствами:

(1) Все беспринципные подчинённые ведут себя честно;

(2) Начальники предлагают всем агентам, о которых неизвестно, что они были коррумпированы в прошлом, работу 1, всем остальным — работу 2.

Ситуация с этим стационарным состоянием намного интереснее. Для начала сформулируем необходимые условия существования.

Лемма 3. *Пусть LCSS существует, тогда выполняется следующее неравенство (вид со стороны начальника):*

$$(\alpha+\gamma)(H-h)+\beta\frac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)\geqslant 0. \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству необходимости в лемме 2.

Лемма 4. *Пусть LCSS существует, тогда выполняются следующие неравенства (вид со стороны подчинённого):*

$$G\leqslant\delta(B-b)\frac{1-\zeta}{1-\delta\zeta}\iff\zeta\leqslant\frac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G}, \tag{5}$$

$$G\leqslant\delta(B-b)\frac{1-\zeta}{1-\delta\xi}\iff\xi\geqslant\frac{G-\delta(B-b)(1-\zeta)}{\delta G}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть начальники всегда предлагают работу 1 тем, у кого незапятнанная репутация. Тогда если агент всё время ведёт себя честно, его выигрыш составит

$$B+\delta B+\delta^2B+\cdots=\frac{B}{1-\delta}. \tag{7}$$

Если рабочий всё время ведёт себя нечестно, он получит

$$\begin{gathered}(B+G)+\delta(B+G-(1-\zeta)(B-b))+\\ +\delta^2(B+G-(1-\zeta^2)(B-b))+\cdots=\\ =\frac{B+G}{1-\delta}-\delta(B-b)\frac{1-\zeta}{(1-\delta)(1-\delta\zeta)}.\end{gathered} \tag{8}$$

Вычтя (8) из (7), получим (5).

Если подчинённый решает быть коррумпированным в первый период времени, а потом вести себя честно, он получит

$$\begin{aligned}(B+G)+\delta(B-(1-\zeta)(B-b))+\\+\delta^2(B-\xi(1-\zeta)(B-b))+\delta^3(B-\xi^2(1-\zeta)(B-b))+\dots=\\=\frac{B}{1-\delta}+G-\delta(B-b)\frac{1-\zeta}{1-\delta\xi}.\end{aligned} \quad (9)$$

Вычтя (9) из (7), получим (6). $\square$

Докажем теперь несложную техническую лемму.

Лемма 5. *Пусть $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ — невозрастающая выпуклая функция. Пусть x_1, x_2, x_3, $x_4\in[0,1]$, причём выполняются следующие неравенства:*

$$x_1<x_4,\quad x_1\leqslant x_2,\quad x_3\leqslant x_4,\quad x_2-x_1\geqslant x_4-x_3.$$

Тогда $f(x_1)-f(x_2)\geqslant f(x_3)-f(x_4)$.

Доказательство. Рассмотрим такие λ, μ, что $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_4$, и $x_3=(1-\mu)x_1+\mu x_4$. Так как $x_2-x_1\geqslant x_4-x_3$, то $\lambda\leqslant\mu$.

В силу выпуклости функции f имеем:

$$f(x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_4)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)\geqslant(1-\lambda)(f(x_1)-f(x_4)),$$

$$f(x_3)\leqslant\lambda(1-\mu)f(x_1)+\mu f(x_4)\Leftrightarrow f(x_3)-f(x_4)\leqslant(1-\mu)(f(x_1)-f(x_4)).$$

Откуда, в силу неравенства $1-\lambda\geqslant1-\mu$, получаем искомую оценку. $\square$

Введём некоторые обозначения. Так, обозначим через x траекторию поведения агента ($x=(x_1,x_2,\dots)$), где x_t — стратегия агента в момент времени t). Обозначим также через $V(p,x)$ выигрыш агента, вероятность разоблачения которого в момент времени $t=0$ равна p на траектории x. Агент максимизирует свой выигрыш, этот максимум обозначим через $V(p)$ ($V(p)=\max\limits_x V(p,x)$).

Справедлива следующая

Лемма 6. *При каждой фиксированной траектории стратегий работодателей (μ_t) функция выигрыша агента $V(p)$ является невозрастающей и выпуклой по p.*

Доказательство. Рассмотрим p, $p' \in [0,1]$ и покажем, что для любого $\nu \in (0,1)$ выполнено неравенство $V(p_\nu) = V(\nu p + (1-\nu)p') \leqslant \nu V(p) + (1-\nu)V(p')$. Заметим, что выигрыш агента при фиксированной стратегии x линейно зависит от p, а значит $V(p_\nu, x) = \nu V(p,x) + (1-\nu)V(p',x)$.

Так как $V(p_\nu) = \max V(p_\nu, x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое x_ε, что $V(p_\nu) < V(p_\nu, x_\varepsilon) + \varepsilon = \nu V(p, x_\varepsilon) + (1-\nu)V(p', x_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \nu V(p) + (1-\nu)V(p') + \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, выпуклость функции $V(p)$ доказана.

Заметим также, что если $p' > p$, то для любого x $V(p',x) \leqslant V(p,x)$. Это верно, так как при фиксированном x в каждый момент времени вероятность поимки агента больше в первом случае, а значит, краткосрочный выигрыш рабочего в любой момент времени во втором случае выше. Отсюда немедленно следует невозрастание функции $V(p)$. $\square$

Теперь мы готовы доказать следующий очень важный результат.

Лемма 7. *Пусть $\xi \geqslant \zeta$, и траектория стратегий начальников (μ_t) фиксирована. Тогда если беспринципному агенту с вероятностью поимки p выгодно быть коррумпированным в текущий момент времени, то и всем агентам с вероятностью поимки $p' > p$ тоже выгодно вести себя нечестно.*

Доказательство. Пусть t — текущий момент времени. Тогда, пользуясь определением функции выигрыша агента, получаем, что

$$V_t(p) = \max\{\, \delta V_{t+1}(\xi p), G + \delta V_{t+1}(1 - \zeta(1-p))\,\},$$

причём, если агент ведёт себя нечестно, то $\delta V_{t+1}(\xi p) \leqslant G + \delta V_{t+1}(1 - \zeta(1-p))$.

Пусть нашлось такое $p' > p$, что $\delta V_{t+1}(\xi p') > G + \delta V_{t+1}(1 - \zeta(1 - p'))$, а значит, подчинённый с вероятностью разоблачения p' не является коррумпированным. Вычтем одно неравенство из другого. Получим

$$V_{t+1}(\xi p) - V_{t+1}(\xi p') < V_{t+1}(1 - \zeta(1-p)) - V_{t+1}(1 - \zeta(1-p')).$$

Воспользовавшись леммой 6, а также тем, что $\zeta \leqslant \xi$, получим, что функция $V(p)$ и четыре точки ξp, $\xi p'$, $1-\zeta(1-p)$ и $1-\zeta(1-p')$ удовлетворяют условию леммы 5. Соответственно,

$$V_{t+1}(\xi p) - V_{t+1}(\xi p') \geqslant V_{t+1}(1 - \zeta(1-p)) - V_{t+1}(1 - \zeta(1-p')).$$

Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Пусть теперь начальники действуют как в стационарном состоянии с низким уровнем коррупции (то есть $\mu_t \equiv 1$). Тогда для любых значений параметров ξ, ζ, таких, что $\xi \geqslant \zeta$ найдётся такое значение «пограничной» вероятности $\widetilde{p} = \widetilde{p}(\zeta, \xi)$, что при $p > \widetilde{p}$ все агенты коррумпированы, а при $p < \widetilde{p}$ все агенты честны. Поскольку нечестный агент увеличивает вероятность разоблачения в будущем, а честный, наоборот, уменьшает, то получилось, что если рабочие рациональны, то они либо всё время коррумпированы, либо всё время некоррумпированы. Таким образом, справедлива следующая

Лемма 8. *Пусть параметры ζ и ξ удовлетворяют неравенству $\xi \geqslant \zeta$, и выполнено условие* (4). *Тогда условие*

$$\zeta \leqslant \frac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G} \tag{5}$$

(напомним, оно является необходимым условием существования LCSS) является достаточным условием существования LCSS.

Доказательство. Действительно, так как подчинённые выбирают фактически между двумя стратегиями — быть всегда честным или всегда нечестным, то для существования LCSS достаточно, чтобы выигрыш от применения первой стратегии был больше, чем от применения второй. То есть необходимое условие становится достаточным. □

Пусть теперь параметры модели удовлетворяют условиям леммы 8. То есть стационарное состояние с низким уровнем коррупции существует. Покажем теперь, что если

$$\xi \leqslant \frac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G}, \tag{10}$$

то честное поведение является оптимальным для всех подчинённых. А именно, справедлива

Лемма 9. *Пусть параметры ζ и ξ удовлетворяют неравенству $\xi \geqslant \zeta$, и выполнены условия (5) и (10). Пусть также стратегии работодателей $\mu_t \equiv 1$. Тогда для любого $p \in [0,1]$ агенту с вероятностью разоблачения p выгоднее не быть коррумпированным.*

Доказательство. Сосчитаем выигрыш агента в зависимости от применяемой стратегии.

$$V(p,\overline{x}) = B - p(B-b) + \delta(B - \xi p(B-b)) + \\ + \delta^2(B - \xi^2 p(B-b)) + \dots = \frac{B}{1-\delta} - \frac{p(B-b)}{1-\delta\xi}, \quad (11)$$

где $\overline{x}$ — «честная» стратегия. Для «нечестной» стратегии $\underline{x}$ выигрыш равен

$$V(p,\underline{x}) = (B + G - p(B-b)) + \delta(B + G - (1 - \zeta(1-p))(B-b)) + \\ + \delta^2(B + G - (1 - \zeta^2(1-p))(B-b)) + \dots = \\ = \frac{B+G}{1-\delta} - (B-b)\left(\frac{1}{1-\delta} - \frac{1-p}{1-\delta\zeta}\right). \quad (12)$$

Вычтем (12) из (11). После преобразования получим

$$\delta(B-b)\left(\frac{1-\zeta}{(1-\delta)(1-\delta\zeta)} - p\frac{\xi-\zeta}{(1-\delta\zeta)(1-\delta\xi)}\right) - \frac{G}{1-\delta} \quad (13)$$

Причём (13) неотрицательно тогда и только тогда, когда оптимально быть честным. Если подставить в (13) значения p, равные 0 и 1, то результат будет следующим:

При $p = 0 \quad \delta(B-b)\dfrac{1-\zeta}{(1-\delta)(1-\delta\zeta)} \geqslant \dfrac{G}{1-\delta} \iff$ выполняется (5)

При $p = 1 \quad \delta(B-b)\dfrac{1-\xi}{(1-\delta)(1-\delta\xi)} \geqslant \dfrac{G}{1-\delta} \iff$ выполняется (10)

Осталось только заметить, что (13) является выпуклой линейной комбинацией выражений

$$\delta(B-b)\frac{1-\zeta}{(1-\delta)(1-\delta\zeta)}-\frac{G}{1-\delta} \text{ и } \delta(B-b)\frac{1-\xi}{(1-\delta)(1-\delta\xi)}-\frac{G}{1-\delta}$$

с коэффициентами $(1-p)$ и p соответственно. Лемма доказана. $\square$

Осталось разобрать последний случай — когда параметры ζ и $\xi \in [0,1]$ удовлетворяют (5) и $\dfrac{G-\delta(B-b)(1-\zeta)}{\delta G} < \xi < \zeta$.

К сожалению, мне не удалось получить вразумительных результатов в этой области значений параметров. Очень похоже на то, что где-то именно в этой области проходит линия, разделяющая области, где LCSS существует и не существует.

Итак, подытоживая всю информацию о стационарном состоянии с низким уровнем коррупции, мы можем разбить квадрат $[0,1]^2$ на несколько областей (см. рисунок 3).

В области $\left\{ (\zeta,\xi) \;\middle|\; 0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G}, \zeta \leqslant \xi \leqslant 1 \right\}$ (тёмный прямоугольник и чуть более светлый треугольник) LCSS существует.

В области $\left\{ (\zeta,\xi) \;\middle|\; \frac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G} < \zeta \leqslant 1 \;\text{ или }\; 0 \leqslant \xi < \frac{G-\delta(B-b)(1-\zeta)}{\delta G} \right\}$ (ещё более светлая пятиугольная область) LCSS не существует.

Что происходит в промежутке, мне не известно.

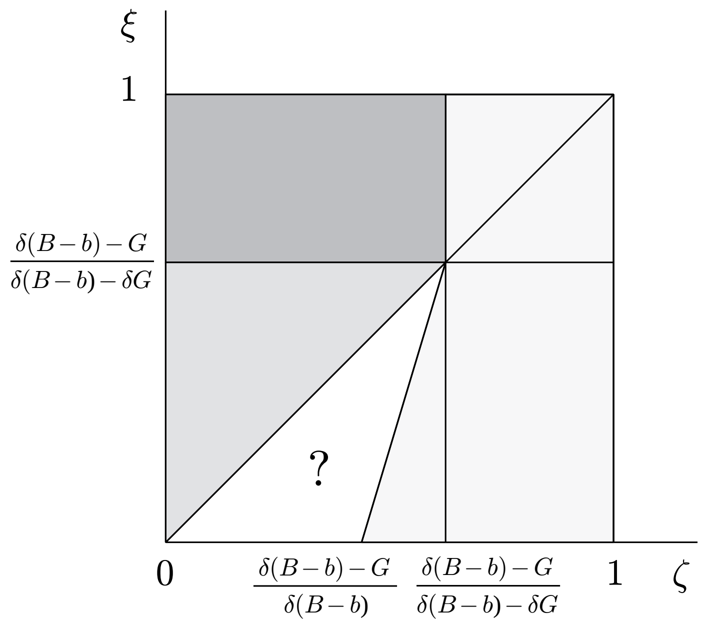

Рисунок 3

Равновесия модели

В данном разделе рассматриваются равновесия модели и исследуется равновесное поведение агентов.

Мы ограничимся рассмотрением игры только в случае $\xi \geqslant \zeta$, Причём будем считать, что параметры таковы, что LCSS существует. Основной задачей данного раздела будет поиск равновесия, сходящегося к LCSS.

Для начала определим, что такое равновесие в данной игре с предысторией.

Определение 1. Назовём *предысторией* игры в момент времени t_0 распределение вероятностей обнаружения беспринципных агентов $F(p)$.

Оправданием для такого определения может служить тот факт, что «реальная» предыстория (заданное поведение всех агентов во все моменты времени $t < t_0$) определяет предысторию в смысле определения 1. В то же время, поскольку агенты индивидуально неразличимы, то такая предыстория — это всё, что можно использовать начальникам для максимизации собственного выигрыша.

Считается, что предыстория игры известна агентам.

Рассмотрим теперь стратегии агентов.

Начальники. Работодатели максимизируют свою краткосрочную прибыль в каждом периоде времени $t \in \mathbb{Z}$. Чистые стратегии начальников — предложить работу 1 или работу 2 в момент t. Начальник в момент времени t наблюдает распределение вероятностей обнаружения прошлых грехов у беспринципных агентов. Кроме того, он формирует некоторые ожидания относительно доли $\eta \in [0, 1]$ беспринципных агентов, которые будут некоррумпированными. В силу леммы 7 это эквивалентно тому, что ожидается «критический» уровень $\widetilde{p}$, такой что все, у кого вероятность обнаружения больше $\widetilde{p}$, будут коррумпированы, у кого же вероятность обнаружения меньше $\widetilde{p}$, не будут. Стратегия начальника — функция

$$\mu_t \colon \mathcal{M} \times [0, 1] \to [0, 1],$$

где $\mu_t = \mu_t(F, \eta)$ — вероятность, с которой начальник в момент времени t предложит подчинённому работу 1 (если не обнаружит, что агент был коррумпирован в прошлом). $\mathcal{M}$ — пространство вероятностных мер на отрезке $[0, 1]$.

Подчинённые. Действия подчинённого, начиная с момента времени t, — последовательность $x \in \{\mathrm{cheat}, \mathrm{don't\,cheat}\}^\infty$.

Заметим, что один агент не может повлиять ни на распределение подчинённых, ни на выигрыш начальника в силу того, что он бесконечно мал, то есть угрожать он не может, поэтому мы не будем рассматривать стратегии, в которых действия зависят от прошлого поведения всех агентов. Единственное, что нам понадобится от прошлого — текущая вероятность быть пойманным на нечестном поведении.

Ожидания агента — последовательность вероятностей (ν_t), с которыми начальник выдаст ему эффективную работу, если не поймает.

Поэтому стратегия агента — последовательность функций

$$x_t \colon [0,1] \times [0,1]^\infty \to [0,1].$$

Соответственно, x_t — вероятность честного поведения в момент времени t.

Здесь $x_{t_0} = x_{t_0}(p, (\nu_t)_{t=t_0}^\infty) \in [0,1]$. То есть, вероятность честного поведения зависит только от ожиданий о будущем поведении начальников (что разумно, так как с предыдущими начальниками агент больше не встретится, поэтому, скажем, наказывать их смысла не имеет).

Задачи агентов. Рассмотрим теперь, какие задачи ставят перед собой агенты.

Задача начальника. Сформулируем задачу начальника в момент времени t.

Пусть заданы распределение вероятностей обнаружения прошлой коррупции беспринципных агентов $F(p)$ и доля тех беспринципных агентов η, которые будут коррумпированы в момент времени t.

В принципе, следовало бы определить стратегии начальников на гораздо более широком множестве, а именно, если предположить, что агенты действуют нерационально, то вовсе не обязательно, что найдётся $\widetilde{p}$, разделяющее коррумпированных и некоррумпированных агентов. Но это очень сильно усложнило бы задачу, так что определим задачу начальника только в случае, когда подчинённые рациональны.

Вспомним, что если начальник обнаруживает, что подчинённый вёл себя в прошлом нечестно, то он всегда даёт ему работу 2. Пусть теперь встретился рабочий с «чистой записью».

Если это честный агент (доля таких агентов α), то он принесёт начальнику ожидаемый выигрыш, равный $h + \mu(H - h)$.

Если это нечестный агент (доля таких β), то, как легко убедиться, ожидаемый выигрыш начальника составит $d + \mu\dfrac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)$ (все будут коррумпированы, и вероятность «прозевать» равна $\dfrac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}$).

Пусть теперь это беспринципный агент. Если он ведёт себя честно, то приносит начальнику $h + \mu(1-p)(H-h)$, если нечестно, то соответственно $d+\mu(1-p)(D-d)$. Осталось проинтегрировать по распределению вероятностей обнаружения. Если η — доля честных агентов, то она соответствует некоторому $\widetilde{p}$, такому, что $F(\widetilde{p}-0) \leqslant \eta \leqslant F(\widetilde{p})$ (напомним, что функция $F(p)$ непрерывна справа как функция распределения). Это и есть то самое пограничное значение вероятности обнаружения.

Выигрыш начальника равен

$$\int_{[0,\widetilde{p})}(h+\mu(1-p)(H-h))dF(p)+\int_{(\widetilde{p},1]}(d+\mu(1-p)(D-d))dF(p)+$$
$$+(h+\mu(1-\widetilde{p})(H-h))(\eta-F(\widetilde{p}-0))+(d+\mu(1-\widetilde{p})(D-d))(F(\widetilde{p})-\eta)=$$
$$=d(1-\eta)+h\eta+\mu\Bigg[(H-h)\bigg(\int_{[0,\widetilde{p})}(1-p)dF(p)+(1-\widetilde{p})(\eta-F(\widetilde{p}-0))\bigg)+$$
$$+(D-d)\bigg((1-\widetilde{p})(F(\widetilde{p})-\eta)+\int_{(\widetilde{p},1]}(1-p)dF(p)\bigg)\Bigg]. \quad (14)$$

Он складывается из выигрыша от встречи с тем, у кого вероятность обнаружения меньше $\widetilde{p}$ (честные), больше $\widetilde{p}$ (нечестные) и равна $\widetilde{p}$ (этим всё равно, быть честным или нет, но η жёстко задаёт их поведение — доля таких рабочих, равная $\eta-F(\widetilde{p}-0)$, ведёт себя честно, остальные коррумпированы.

Заметим, что выражение в правой части (14) можно представить в виде

$$d(1-\eta)+h\eta+\mu(1-\overline{p})((H-h)\widetilde{\eta}+(D-d)(1-\widetilde{\eta})),$$

где $\overline{p}$ — математическое ожидание вероятности обнаружения коррупции в прошлом среди беспринципных агентов, а

$$\widetilde{\eta}=\frac{\displaystyle\int_{[0,\widetilde{p})}(1-p)dF(p)+(1-\widetilde{p})(\eta-F(\widetilde{p}-0))}{1-\overline{p}}.$$

Легко заметить, что $\widetilde{\eta}(\eta)$ — непрерывная строго возрастающая функция, такая что $\widetilde{\eta}(0)=0$ и $\widetilde{\eta}(1)=1$.

Теперь сложим выигрыши начальника от встречи со всеми агентами. Получим

$$\alpha(h+\mu(H-h))+\beta(d+\mu\frac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d))+ \\ +\gamma(d(1-\eta)+h\eta+\mu(1-\overline{p})((H-h)\widetilde{\eta}+(D-d)(1-\widetilde{\eta}))).$$

Выделим слагаемое, которое содержит множитель μ (свободный член нас не интересует, так как он не зависит от μ, и следовательно, не влияет на выбор начальника, поскольку условие участия в этой игре всегда выполнено). Имеем

$$\mu\left(\alpha(H-h)+\beta\frac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)+\gamma(1-\overline{p})((H-h)\widetilde{\eta}+(D-d)(1-\widetilde{\eta}))\right).$$

Таким образом, задача начальника, живущего в момент времени t, выглядит так:

$$\mu\Bigg(\alpha(H-h)+\beta\frac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)+ \\ +\gamma(1-\overline{p})((H-h)\widetilde{\eta}+(D-d)(1-\widetilde{\eta}))\Bigg)\to\max_{\mu}$$

при данных $F(p)$ и $\widetilde{\eta}=\widetilde{\eta}(\eta)$. Как видим, стратегия начальника на самом деле зависит всего от двух параметров — $\overline{p}$ и $\widetilde{\eta}$.

Задача подчинённого. Сформулируем теперь задачу подчинённого в момент времени t_0.

Пусть $\nu=(\nu_t)_{t=1}^{\infty}$ — ожидаемые вероятности того, что в момент времени t начальник, не обнаружив прошлых грехов, предоставит эффективную работу. И пусть p — текущая вероятность обнаружить коррупцию в прошлом.

Тогда задача подчинённого выглядит так:

$$V_t(p,x) \to \max_x,$$

где $V_t(p,x) = \sum\limits_{t=t_0}^{\infty} \delta^{t-t_0} v_t(p_t)$, а p_t, в свою очередь, равно

$$p_t = \begin{cases} \xi p_{t-1}, & \text{если } x_{t-1} = 1 \text{ (честное поведение)}, \\ 1 - \zeta(1 - p_{t-1}), & \text{если } x_{t-1} = 0 \text{ (нечестное поведение)}. \end{cases}$$

Краткосрочный ожидаемый выигрыш агента в период t равен $v_t = pb + (1-p)(\nu_t B + (1-\nu_t)b)$. При этом несмотря на то, что он зависит от ν_t, подчинённый получит v_t в любом случае (независимо от своих действий). Поэтому стратегия агента в момент времени t не зависит от ν_t. Действительно,

$$V_t(p) = \max\{\, v_t + G + \delta V_{t+1}(1 - \zeta(1-p)), v_t + \delta V_{t+1}(\xi p)\,\}.$$

Как видим, v_t входит и в левое, и в правое выражение, и не влияет на принятие решения.

Если при этом $G + \delta V_{t+1}(1-\zeta(1-p)) = \delta V_{t+1}(\xi p)$, то в момент времени t оптимальная стратегия агента может быть любой, принадлежащей $[0,1]$.

Равновесия. Теперь определим равновесие в модели.

Определение 2. Равновесием в данной игре с предысторией $F(p)$ называется набор $\{(\widehat{\mu}_t), (\widehat{\eta}_t), (\widehat{x}_t(p)), (\widehat{F}_t(p))\}_{t=1}^{\infty}$, такой, что выполняются следующие условия:

(1) Для любого $t > 0$, $\widehat{\mu}_t$ является решением задачи начальника при заданных $\widehat{\eta}_t$ и $\widehat{F}_t(p)$.

(2) Для любого $t > 0$, $\widehat{x}_t(p)$ является решением задачи подчинённого при заданных $(\widehat{\mu}_t)$.

(3) Ожидания начальников относительно доли некоррумпированных беспринципных подчинённых оправдываются, то есть

$$\widehat{\eta}_t = \int_0^1 \widehat{x}_t(p) d\widehat{F}_t(p).$$

(4) Распределение $\widehat{F}_t(p)$ эволюционирует согласованно с профилем стратегий $\widehat{x}_t(p)$.

Последнее условие требует некоторого уточнения. Ясно, что если в момент времени t вероятность обнаружения была распределена по закону $F(p)$, то в момент времени $t+1$ распределение изменится.

Обозначим через x пропорцию агентов с вероятностью обнаружения p, которые не будут коррумпированы в данный момент времени. Тогда в результирующем распределении доля x таких агентов перейдёт в точку ξp, а доля $x-1$ — в точку $1-\zeta(1-p)$.

Справедлива следующая

Лемма 10. *Пусть заданы распределение $F(p)$ и доля агентов, которые некоррумпированы η (коррумпированы те, у кого высокая вероятность быть обнаруженным). Тогда распределение на следующем шаге задаётся следующей формулой:*

$$\widetilde{F}(p) = \begin{cases} (1-\lambda) + \lambda F(p/\xi), & \textit{при } p \in [0, \xi\widetilde{p}), \\ (1-\lambda) + \lambda\eta, & \textit{при } p \in [\xi\widetilde{p}, 1-\zeta(1-\widetilde{p})), \\ (1-\lambda) + \lambda F(1-(1-p)/\zeta), & \textit{при } p \in [1-\zeta(1-\widetilde{p}), 1]. \end{cases}$$

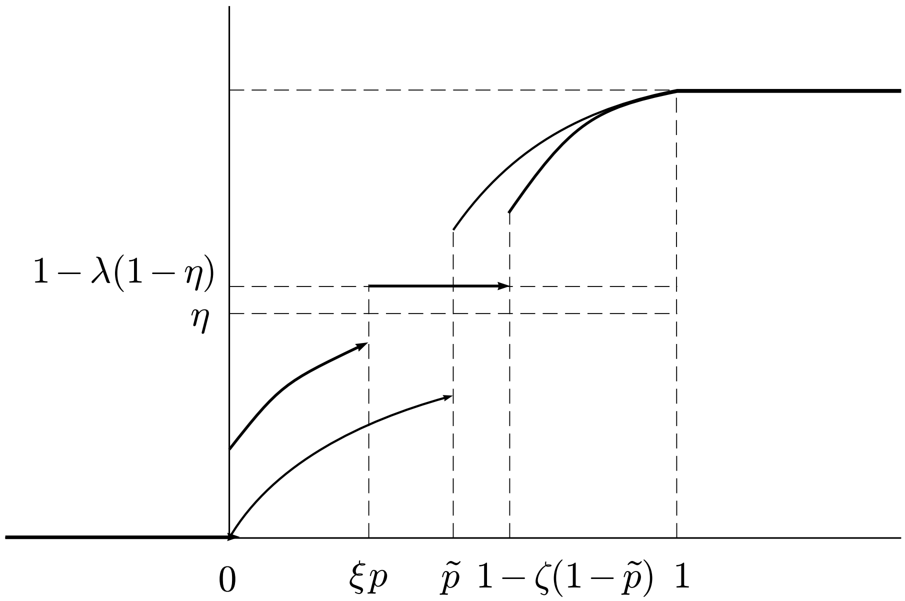

Рисунок 4

Иллюстрацию можно увидеть на рисунке 4 (жирной линией выделена результирующая функция распределения).

Сформулируем теперь теорему, касающуюся Парето доминирующего равновесия в рассматриваемой игре.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) $\gamma(H-h)+\beta(D-d)<0$ *(обеспечивает то, что начальник при встрече с агентом с запятнанной репутацией предлагает ему работу 2);*

(2) $\alpha(H-h)+(\beta+\gamma)\dfrac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)\leqslant 0$ *(обеспечивает существование HCSS);*

(3) $(\alpha+\gamma)(H-h)+\beta\dfrac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)\geqslant 0,$

(4) $\zeta\leqslant\dfrac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G}$

(5) $\xi\geqslant\zeta$ *(эти три условия обеспечивают существование LCSS);*

Тогда для любой предыстории $F_0(p)$ верно следующее.

(1) *В игре существует Парето доминирующее равновесие.*

(2) *Либо равновесие единственно и совпадает со стационарным состоянием с высоким уровнем коррупции, либо в Парето доминирующем равновесии найдётся такое $T \geqslant 0$, что при $t < T$ $\widehat{\mu}_t = 0$, а при $t \geqslant T$ $\widehat{\mu}_t = 1$, и такое равновесие сходится при $t \to \infty$ к LCSS.*

Доказательство этой теоремы довольно длинное и к тому же неконструктивное.

Основная идея его заключается в том, что эффективное равновесие строится из некоторого другого, такого, что для некоторого $t > 0$ выполнено неравенство $\mu_t > 0$. Это возможно, так как в модели рост доверия начальников ведёт к тому, что агентам становится выгоднее поддерживать репутацию, и наоборот, увеличение доли честно ведущих себя беспринципных агентов приводит к увеличению доверия начальников.

Вспомним теперь фигуру, изображённую на рисунке 3. Рассмотрим подмножество области существования LCSS —

$$\left\{ (\zeta, \xi) \,\middle|\, 0 \leqslant \zeta \leqslant \tfrac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G}, \zeta \leqslant \xi \leqslant \tfrac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G} \right\}$$

(светлый треугольник).

Справедлива следующая

Лемма 11. *Пусть параметры ξ и ζ лежат в приведённой области. Тогда для любой «реальной» предыстории (некоторой последовательности коррупции при $t \leqslant 0$) существует равновесие, такое, что при всех $t > 0$ $\widehat{\mu}_t = 1$.*

Доказательство следует из того, что во-первых, из леммы 9 следует, что если начальники доверяют, то все рабочие ведут себя честно. Во-вторых, если предыстория «реальна», то среднее значение вероятности быть пойманным не превосходит $\dfrac{\lambda(1-\zeta)}{1-\lambda\zeta}$ (случай, когда все коррумпированы). Поэтому, если все рабочие начинают вести себя честно, то задача начальника имеет вид

$$\mu\Bigg(\alpha(H-h)+\beta\frac{1-\lambda}{1-\lambda\zeta}(D-d)+ \\ +\gamma(1-\overline{p})((H-h)\widetilde{\eta}+(D-d)(1-\widetilde{\eta}))\Bigg)\to\max_{\mu},$$

причём выражение в скобках неотрицательно при $\widetilde{\eta} = 1$ (все рабочие ведут себя честно) и при условии «реальной» предыстории.

Таким образом мы видим, что если $\dfrac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)} < \zeta < \dfrac{\delta(B-b)-G}{\delta(B-b)-\delta G}$, то уменьшение параметра ξ приводит сначала к улучшению ситуации (на некотором этапе достигается абсолютно лучшее равновесие), но когда ξ становится слишком маленьким, эффективное равновесие пропадает вместе со стационарным состоянием с низким уровнем коррупции.

Заключение

Итак, в данной работе была рассмотрена динамическая модель коллективной репутации с забыванием. Возникла она как модификация модели Жана Тироля (см. [7]). По сравнению с исходной моделью здесь было предложено одно нововведение — вероятность обнаружения коррупции агента в прошлом стала зависимой от времени, а не только от количества актов коррупции в прошлом. Зависимость была выбрана предельно простая — экспоненциальное убывание вероятности обнаружения при условии, что агент ведёт себя честно.

Основным результатом работы является то, что введённое подобным образом забывание оказывает неоднозначное влияние на поведение агентов. Существует такая область изменений параметров модели, что «ускорение» забывания в конце концов приводит к ситуации, в которой у агентов пропадают стимулы к поддерживанию репутации.

Таким образом, данная работа является попыткой углубиться в исследование явления коллективной репутации, безусловно очень важного и интересного явления.

Литература

1. K. Arrow, *The Theory of Discrimination*, in Discrimination in Labor Markets (O. Ashenfelter and A. Rees, eds.), Princeton: Princeton University Press, 1973.
2. R. Bénabou, R. Gertner, *Search with Learning from Prices: Does Increased Inflationary Uncertainty Lead to Higher Markups?*, Review of Economic Studies **60** (1993), 69–94.
3. T. Besley, M. Kandori, *Reputation as a Public Good*, (mimeo, Princeton University) (1992).
4. H. Cole, G. Mailath, A. Postlewaite, *Social Norms, Savings Behavior and Growth*, Journal of Political Economy **100** (1992), 1092–1125.
5. M. Kandori, *Social Norms and Community Enforcement*, Review of Economic Studies **59** (1992), 61–80.
6. D. Kreps, *Corporate Culture and Economic Theory*, in Perspectives on Positive Political Economy (J. Alt and K. Shepsle, eds.), Cambridge: Cambridge University Press, 1990, pp. 90–143.
7. J. Tirole, *A Theory of Collective Reputations (with applications to the persistence of corruption and to firm quality)*, Review of Economic Studies **63** (1996), 1–22.
8. P. Young, *The Evolution of Conventions*, Econometrica **61** (1993), 57–84.