

**ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ
НА ПРОГРАММУ
«МАГИСТР ЭКОНОМИКИ»
В РЭШ
В 2019 ГОДУ**

Головань С. В., Катышев П. К., Малокостов А. М., Тонис А. С., Шибанов О. К.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в Российскую экономическую школу в 2019 году. — М., 2019 — 76 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ на программу «Магистр экономики» в 2019 году.

Содержание

1	Программа вступительного экзамена	5
1.1	Математический анализ	5
1.2	Литература	9
1.3	Линейная алгебра	9
1.4	Литература	13
2	Вступительный экзамен 2016 г.	15
2.1	Тест	15
2.2	Ответы и решения теста	31
3	Вступительный экзамен 2017 г.	40
3.1	Тест	40
3.2	Ответы и решения теста	52
4	Вступительный экзамен 2018 г.	57
4.1	Тест	57
4.2	Ответы и решения теста	69
5	Формат вступительного экзамена 2019 г.	73
6	Подготовительные курсы по математике	75
7	Подготовительные курсы по математике на видео	75
8	Приемная комиссия РЭШ	76

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене на программу «Магистр экономики».

Содержание и форма экзамена в течение ряда лет оставались неизменными.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена по математике.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2016—2018 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. Элементы теории множеств

Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тожественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. Числовая прямая \mathbb{R} и арифметическое пространство \mathbb{R}^n

Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

Арифметическое (числовое, координатное) пространство \mathbb{R}^n . Операции сложения элементов (векторов, точек) \mathbb{R}^n и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в \mathbb{R}^n .

3. Свойства множеств на числовой прямой и в \mathbb{R}^n

Понятие ε -окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в \mathbb{R}^n как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства \mathbb{R}^n . Системы кубических и шаровых ε -окрестностей.

Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и за-

мкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота \mathbf{R}^n). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в \mathbf{R}^n и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в \mathbf{R}^n (на числовой прямой \mathbf{R}).

4. Предел последовательности

Понятие последовательности точек \mathbf{R}^n (или точек числовой прямой \mathbf{R}) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек \mathbf{R}^n . Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в \mathbf{R}^n .

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. Предел функции. Непрерывность функций (отображений)

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств \mathbf{R}^n или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке « ε – δ »; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке « ε – δ », в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в \mathbf{R}^n (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в \mathbf{R}^n или \mathbf{R}^1 . Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимости функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в \mathbb{R}^1

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в \mathbb{R}^n)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. Методы оптимизации в \mathbb{R}^n

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального

экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. Определенный интеграл

Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона — Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. Числовые и функциональные ряды

Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. Степенные ряды

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения

с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М.: Высшая школа, 1999.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М.: Наука, 1980.
3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 2000.
4. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1984.
5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Изд-во МГУ, 1987.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989.
7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
8. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982.
9. Рудин У., *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
10. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1979.
11. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
12. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1964.
13. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М.: Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. Матрицы и операции с ними

Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства \mathbb{R}^n как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. Векторные пространства

Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n + 1$ вектора в n -мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства \mathbb{R}^n . Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. Системы линейных (алгебраических) уравнений

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в \mathbb{R}^n (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в \mathbb{R}^n , его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная си-

стема решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в \mathbf{R}^n как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в \mathbf{R}^n . Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в \mathbf{R}^n как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. Линейные операторы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y ; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y , их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X . Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. Евклидовы пространства

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в \mathbf{R}^n ; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметрич-

ной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. Квадратичные формы

Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М.: Физматлит, 2004.
2. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М.: Наука, 1987.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М.: Наука, 1964.
4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1974.
5. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. М.: Наука, 1966.
6. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М.: Наука, 1971.
7. Ефимов А. В., Демидович Б. П., ред., *Сборник задач по математике для вузов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. М.: Наука, 1981.
8. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М.: Наука, 1970.
9. Ильин В. А., Ким Г. Д., *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*. М.: Изд-во МГУ, 1998.
10. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1984.
11. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М.: Изд-во МГУ, 1987.
12. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1963.
13. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
14. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М.: Наука, 1980.

15. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М.: Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2016 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «-0.25»
- * отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «-1»
- * отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x dx}{(x^2 - 4)^2}$ равен

- A 0
- B $1/15$
- C $\frac{1}{2} \ln(5/3)$
- D $\frac{1}{2} \ln 15$
- E не существует

2. Определенный интеграл $\int_1^e \ln x \, dx$ равен

- A $1/e$
- B 1
- C e
- D $e - 1$
- E не существует

3. Неопределенный интеграл $\int \frac{3dx}{x^2 + x - 2}$ при $x \in (-2, 1)$ равен

- A $\ln(1 - x) - \ln(x + 2) + C$
- B $\ln(2 - x) - \ln(x + 1) + C$
- C $\ln(1 - x) + 2 \ln(x + 2) + C$
- D $\frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{7}} \right) + C$
- E $\frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{7}} \right) + C$

4. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$ равен

- A $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1} \right) + C$
- B $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right) + C$
- C $2 \ln(\sqrt{1 + e^{2x}} - 1) + C$
- D $\operatorname{arctg} \sqrt{1 + e^{2x}} + C$
- E $-\operatorname{arctg} \sqrt{1 + e^{2x}} + C$

5. Предел $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$ равен

- A -1
- B 0
- C $1/3$
- D 1
- E не существует

6. Предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$ равен

- A 0
- B $1/3$
- C $2/3$
- D 1
- E не существует

7. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ равен

- A 0
- B $1/4$
- C $1/2$
- D 1
- E не существует

8. Пусть $x_n = \frac{n^n}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$ равен

- A 0
- B $1/e$
- C 1
- D e
- E не существует

9. Дана функция $f(x, y) = y - 2x$ и множество $M = \{(x, y) : y^2 - 4x^2 = 1\}$. Тогда

- A функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего значения
- B функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения
- C множество значений функции $f(x, y)$ на множестве M является открытым множеством
- D множество значений функции $f(x, y)$ на множестве M является замкнутым множеством
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть M — подмножество числовой прямой. Известно, что существует граничная точка множества M , ему не принадлежащая. Тогда

- A множество M замкнутое
- B множество M открытое
- C множество M несчетное
- D множество M бесконечное
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, и пусть $F(x)$ — ее первообразная на всей числовой прямой. Тогда

- A если $f(x)$ — периодическая функция, то $F(x)$ — периодическая функция
- B если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная функция
- C если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная функция
- D если $f(x)$ — ограниченная функция, то $F(x)$ — ограниченная функция
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Дана функциональная последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, и для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда

- A последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на M
- B множество M ограничено и замкнуто
- C множество M ограничено и открыто
- D функция $f(x)$ является неограниченной на множестве M
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Множество $M \subset \mathbf{R}$ не имеет предельных точек. Тогда

- A множество M конечно
- B множество M бесконечно
- C множество M замкнуто
- D множество M открыто
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x^2 + y^2)}{n}$. Обозначим через M множество пар (x, y) , для которых этот ряд сходится. Тогда

- A множество M замкнутое
- B множество M открытое
- C множество M ограниченное
- D множество M неограниченное
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. К кривой, заданной уравнением $2x^2 + y^2 = 3$, через точку $(1, 1)$ проведена касательная. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на координатных осях, и отрезком касательной между координатными осями, равна

- A $9/4$
- B 2
- C $7/2$
- D 3
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы и непрерывны на множестве $[a, +\infty)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на $(a, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

II. Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и равномерно непрерывны на $[a, +\infty)$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

- A только II
- B только III
- C только I и II
- D только II и III
- E I, II и III

17. Даны два числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда

- A если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится

- В если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
- С если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится
- Д если $a_n > 0$ при всех n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n}$ расходится
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

18. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — множество на числовой прямой, такое что его дополнение $\mathbf{R} \setminus M$ является счетным множеством. Тогда

- А все точки множества M — внутренние
- В все точки множества M — граничные
- С множество M не имеет изолированных точек
- Д множество M не имеет предельных точек
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

19. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — непустое множество на числовой прямой, у которого нет изолированных точек. Тогда

- А множество M — открытое
- В множество M — замкнутое
- С множество M содержит все свои предельные точки
- Д множество M содержится в множестве своих предельных точек
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

20. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$; A, B — подмножества числовой прямой, такие, что $B = f(A)$. Тогда

- А если B — открытое множество, то A — тоже открытое множество
- В если A — замкнутое множество, то B — тоже замкнутое множество
- С если B — отрезок (т. е. $B = [c, d]$ для некоторых $c, d \in \mathbf{R}$), то A тоже является отрезком
- Д если A — интервал (т. е. $A = (c, d)$ для некоторых $c, d \in [a, b]$), то B тоже является интервалом
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

21. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, заданная на всей плоскости \mathbf{R}^2 , такая, что для любых x, y выполнено равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(ax, ay)}{a} = x + y.$$

Тогда

- A функция f непрерывна в точке $(0, 0)$
- B функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$
- C во всех точках (x, y) , принадлежащих некоторой окрестности точки $(0, 0)$, существуют частные производные $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$
- D функция $g(x) = f(x, 0)$ дифференцируема при $x = 0$, причем $g'(0) = 0$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$, $f(0) = 0$ и для всех $0 \leq x \leq y \leq 1$ выполнено неравенство $f(y) - f(x) \leq (y - x)^2$. Тогда

- A при всех $x \in (0, 1)$ функция $f(x)$ дифференцируема, причем $f'(x) \leq 1$
- B $f(1) < 0$
- C функция $|f(x)|$ является неубывающей при $x \in [0, 1]$
- D функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in [0, 1]$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть при каждом $n = 1, 2, \dots$ на отрезке $[a, b]$ задана функция $f_n(x)$, интегрируемая по Риману на $[a, b]$ и такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится при всех $x \in [a, b]$. Какие из следующих равенств (I, II, III) верны?

- I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| = 0.$
- II. $\int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \right) dx = 0.$
- III. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x)| dx = 0.$

- A только I
- B только II
- C только I и III
- D I, II и III

Е ни одно из равенств I, II, III не является верным

24. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\frac{dx}{dt} = f(x)$, $x(0) = x_0$, где $f(x)$ — функция, непрерывно дифференцируемая на всей числовой прямой. Тогда

- A функция $x(t)$ — монотонная на своей области определения
- B функция $x(t)$ — ограниченная на своей области определения
- C функция $x(t)$ — непостоянная на своей области определения
- D область определения функции $x(t)$ — вся числовая прямая
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Функция $f(x) = (x - 1)^3(x + 1)^3$

- A ограничена сверху при $x \in \mathbf{R}$
- B неограничена снизу при $x \in \mathbf{R}$
- C достигает локального максимума ровно в двух точках
- D достигает локального минимума ровно в трех точках
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите *ложное* утверждение:

- A матрица A имеет три разных вещественных собственных числа
- B у матрицы A для всех вещественных собственных чисел их геометрическая кратность совпадает с алгебраической
- C ноль является собственным числом матрицы A , и размерность соответствующего собственного подпространства равна 2
- D наибольшее вещественное собственное число матрицы A равно 2
- E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

27. Число инвариантных подпространств матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ равно

- A 2
- B 3

- C 4
- D 8
- E бесконечно много

28. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ равен

- A 0
- B 1
- C 2
- D 3
- E 4

29. В линейном пространстве даны две системы векторов $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Через L_X и L_Y обозначим линейные оболочки систем X и Y соответственно, а через $\dim L_X$ и $\dim L_Y$ — их размерности. Тогда

- A если $\dim L_X \leq \dim L_Y$, то $n \leq m$
- B если $n \leq m$, то $\dim L_X \leq \dim L_Y$ или система Y линейно зависима
- C если $n \leq m$, то $\dim L_X \leq \dim L_Y$ или система X линейно независима
- D если $n \neq m$, то $\dim L_X \neq \dim L_Y$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Квадратная матрица A трактуется как линейный оператор в \mathbf{R}^n , где $n \geq 4$, в котором задано стандартное скалярное произведение. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X , и через L^\perp обозначим ортогональное дополнение к подпространству L . Тогда

- A если $A \neq A^T$, то $\text{Ker } A \neq (\text{Im } A)^\perp$
- B если $A \neq A^T$, то $\text{Ker } A \neq \text{Ker } A^T$
- C если $A \neq A^T$, то $\text{Im } A \neq \text{Im } A^T$
- D если $A = A^T$, то $\text{Im } A \neq \text{Ker } A$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Квадратная матрица A порядка $n \geq 1$, для которой существует базис в пространстве \mathbf{R}^n , состоящий из собственных векторов этой матрицы, называется *матрицей простой структуры*. Тогда

- A если матрица A невырожденная, то она является матрицей простой структуры
- B если матрица A имеет единственное собственное число 0 , то она является матрицей простой структуры
- C если матрица A ортогональная, то она является матрицей простой структуры
- D если матрица A задает оператор проектирования, то она является матрицей простой структуры
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Даны матрицы A и B размера $m \times n$, где $m, n \geq 2$, у которых строки линейно независимы. Пусть a — столбец длины m , b — столбец длины n , а через x обозначим неизвестный столбец подходящей длины. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X . Тогда

- A система линейных уравнений $(AA^T)x = a$ имеет решение при любом a
- B система линейных уравнений $(B^TB)x = b$ имеет решение при любом b
- C система линейных уравнений $(AB^T)x = a$ при любом a имеет не более одного решения
- D система линейных уравнений $(A^TB)x = b$ при любом b имеет не более одного решения
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Квадратная матрица A порядка $n \geq 2$ трактуется как линейный оператор в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n со стандартным скалярным произведением. Для любого вектора x обозначим через $|x|$ его длину. Найдите *ложное* утверждение:

- A если $A^T A = 0$, то $|Ax| \leq |x|$ для любого вектора x
- B если $A^T A = I$, то $|Ax| \leq |x|$ для любого вектора x
- C если $A^T A = A$, то $|Ax| \leq |x|$ для любого вектора x
- D если $A^T A = A^T$, то $|Ax| \leq |x|$ для любого вектора x
- E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

34. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^3/(x^2 + 1)$, $y(0) = 1$ на своей области определения

- A не имеет нулей
- B имеет ровно один ноль

- С имеет ровно два нуля
- D имеет ровно четыре нуля
- Е имеет более четырех нулей

35. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[0, 1]$, причем $f(0) < g(0)$, а $f(1) > g(1)$.

Тогда

- A уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не менее одного решения
- B если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения, то таких решений нечетное число
- С количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ совпадает с количеством решений уравнения $f^2(x) = g^2(x)$
- D если $f(0.5) = g(0.5)$, то количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0, 0.5)$ совпадает с количеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0.5, 1)$.
- Е все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой.

Тогда

- A функция $f(x)$ достигает наибольшего значения
- B если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $-f(x)$ достигает наибольшего значения
- С если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- D если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения.
- Е все четыре утверждения A, B, C, D ложные

37. Функция $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ на множестве $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

- A достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках
- B достигает наибольшего значения ровно в двух точках, но не достигает наименьшего значения
- С достигает наименьшего значения ровно в двух точках, но не достигает наибольшего значения
- D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений

Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

38. Функция $f(x, y, z) = 3 \ln x + 2 \ln y + \ln z$ на множестве $\{(x, y, z): x > 0, y > 0, z > 0, 3x + 2y + z = 6\}$

А достигает наибольшего значения в единственной точке

В достигает наибольшего значения ровно в двух точках

С достигает наибольшего значения ровно в трех точках

D достигает наибольшего значения более чем в трех точках

Е не достигает наибольшего значения

39. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на интервале $(0, 1)$. Тогда

А функция $f(x)$ ограничена на интервале $(0, 1)$

В функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(0, 1)$

С если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(0, 1)$, то существуют точки x и x' , такие, что $x < x'$ и $f'(x) \geq f'(x')$

D если функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения по крайней мере в двух различных точках, то и функция $f(x)$ достигает наибольшего значения по крайней мере в двух различных точках

Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

40. Функция $f(x)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[-1, 0]$. Тогда

А существует точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) < -x$

В существует точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) \geq x$

С если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то существует точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) = x - 1$

D если функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[0, 1]$, то и функция $g(x) = \operatorname{tg}(\pi \cdot x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[0, 1]$

Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

2.1.2 Вторая часть теста

1. Дано множество $M = \{(x, y): (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6) = 0\}$ и функция $f(x, y) = 3x + 4y$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ не достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) у функции $f(x, y)$ на множестве M есть ровно два локальных минимума;

Да Нет

г) точка $(3/5, 4/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да Нет

д) точка $(9/5, -3/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да Нет

е) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M чётное;

Да Нет

ж) точка $(3, 3)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да Нет

з) в точке $(21/5, 13/5)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M .

Да Нет

2. Дана последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{x^n + 1}{x^{2n} + 1},$$

где $n = 1, 2, \dots$, и $x \in \mathbf{R}$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, и для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) существует ровно одно значение $x \in M$, при котором функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода;

Да Нет

в) уравнение $f(x) = x + 1$ имеет ровно одно решение при $x \in M$;

Да Нет

г) при любом $n = 1, 2, \dots$ функция $f_n(x)$ является ограниченной;

Да Нет

д) при любом $n = 1, 2, \dots$ функция $f_n(x)$ имеет ровно один строгий локальный минимум;

Да Нет

е) ни при каком $n = 1, 2, \dots$ функция $f_n(x)$ не достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

ж) последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на интервале $(0, 1)$;

Да Нет

з) последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на интервале $(1, 2)$.

Да Нет

3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha^2 \\ -\alpha^2 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 + \alpha & 1 \\ \alpha^2 & 1 + \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 + \alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

где α — вещественный параметр. Подпространства $L \subset \mathbf{R}^3$ и $M \subset \mathbf{R}^3$ определяются как множества решений систем линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ соответственно. Также в пространстве \mathbf{R}^3 задано стандартное скалярное произведение. Тогда

а) существует единственное α , при котором $L \cap M \neq \{0\}$;

Да Нет

б) существует ровно два значения α , при которых $L \cap M \neq \{0\}$;

Да Нет

в) существует единственное α , при котором $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

г) существует ровно два значения α , при которых $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

д) если размерность $\dim L > \dim M$, то $L \supset M$;

Да Нет

е) если размерность $\dim L = \dim M$, то $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

ж) если подпространства L и M ортогональны друг другу, то \mathbf{R}^3 разлагается в прямую сумму L и M ;

Да Нет

з) если \mathbf{R}^3 разлагается в прямую сумму L и M , то подпространства L и M ортогональны друг другу.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\dot{x} = \frac{\alpha x}{t} + t^\beta, \quad x(1) = x_1,$$

где x_1 , α и β — вещественные параметры. Тогда

а) при любых значениях параметров функция $x(t)$ определена при всех $t > 0$;

Да Нет

б) существует комбинация значений параметров, при которой функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

в) существует комбинация значений параметров, при которой функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) существует комбинация значений параметров, при которой $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$;

Да Нет

д) существует комбинация значений параметров, при которой $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ конечен, но не равен нулю;

Да Нет

е) если $x_1 < 0$, то $x(t) < 0$ везде на своей области определения;

Да Нет

ж) если $\alpha = \beta = x_1 = 2$, то $x(2) = 16$;

Да Нет

з) если $\alpha = 3$ а $\beta = 2$, то при любом x_1 предел $\lim_{t \rightarrow +0} x(t) = 0$.

Да Нет

5. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{x-1}^x g(t) dt,$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t^2 + \alpha t}{|t|}, & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

и α — вещественный параметр. Тогда

а) для любого α функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) для любого α функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения;

Да Нет

в) для любого α функция $f(x)$ дифференцируема на своей области определения;

Да Нет

г) существует α , при котором функция $f(x)$ является ограниченной;

Да Нет

д) существует α , при котором функция $f(x)$ является выпуклой на своей области определения;

Да Нет

е) для любого α точка $x = 1/2 - \alpha$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

ж) для любого α у функции $f(x)$ существует единственная точка локального минимума;

Да Нет

з) для любого α график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. 2. B. 3. A. 4. B. 5. A. 6. B. 7. C. 8. B. 9. C. 10. D. 11. B. 12. E. 13. C. 14. C. 15. A. 16. D. 17. C. 18. C. 19. D. 20. B. 21. E. 22. C. 23. B. 24. A. 25. E. 26. C. 27. D. 28. C. 29. B. 30. D. 31. D. 32. A. 33. E. 34. A. 35. E. 36. E. 37. A. 38. A. 39. C. 40. C.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что множество является объединением двух множеств: $M_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ и $M_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 - 4 = 0\}$. Как видим, каждое множество представляет собой окружность, поэтому они оба компактные. Следовательно, и множество M компактное, а значит непрерывная функция $f(x, y)$ достигает на M наибольшего и наименьшего значений (ответ на вопрос (a) — да, на вопрос (б) — нет).

Воспользуемся тем, что любая точка локального экстремума на объединении множеств $M_1 \cup M_2$ является точкой экстремума хотя бы на одном из множеств M_1 и M_2 , и исследуем функцию $f(x, y)$ на множествах M_1 и M_2 по отдельности.

Функция Лагранжа на множестве M_1 :

$$L = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Условия первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 3 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4 + 2\lambda y = 0,\end{aligned}$$

откуда, исключив λ , получаем соотношение $3y = 4x$. Подставляя его в уравнение множества, получаем две точки: $(-3/5, -4/5)$, $\lambda = 5/2$, $f(x, y) = -5$ и $(3/5, 4/5)$, $\lambda = -5/2$, $f(x, y) = 5$. Подставив эти точки в уравнение для множества M_2 , получаем, соответственно, $(-3/5)^2 + (-4/5)^2 - 6 \cdot (-3/5) - 2 \cdot (-4/5) + 6 = 61/5 \neq 0$ и $(3/5)^2 + (4/5)^2 - 6 \cdot (3/5) - 2 \cdot (4/5) + 6 = 9/5 \neq 0$. Это значит, что если эти точки являются точками локального экстремума функции $f(x, y)$ на M_1 , то они являются точками локального экстремума и на всем множестве M .

Функция Лагранжа на множестве M_2 :

$$L = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6).$$

Условия первого порядка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 3 + \lambda(2x - 6) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4 + \lambda(2y - 2) = 0,\end{aligned}$$

откуда, исключив λ , получаем соотношение $3(y - 1) = 4(x - 3)$. Подставляя его в уравнение множества, получаем две точки: $(9/5, -3/5)$, $\lambda = 5/4$, $f(x, y) = 3$ и $(21/5, 13/5)$, $\lambda = 5/4$, $f(x, y) = 23$. Подставив эти точки в уравнение для множества M_1 , получаем, соответственно, $(9/5)^2 + (-3/5)^2 - 1 = 13/5 \neq 0$ и $(21/5)^2 + (13/5)^2 - 1 = 117/5 \neq 0$. Это значит, что если эти точки являются точками локального экстремума функции $f(x, y)$ на M_2 , то они являются точками локального экстремума и на всем множестве M .

Таким образом, точка $(-3/5, -4/5)$ является точкой глобального, а значит и локального минимума, а точка $(21/5, 13/5)$ является точкой глобального, а значит и локального максимума (ответ на вопрос (з) — да).

В точке $(3, 3)$ не выполняется условие первого порядка, поэтому это не экстремум (ответ на вопрос (ж) — нет).

Рассмотрим две оставшиеся точки и проверим, выполняется ли достаточное условие экстремума. Опять же, достаточно проверять условие второго порядка на соответствующем подмножестве M_1 или M_2 .

Рассмотрим точку $(3/5, 4/5)$ на множестве M_1 . Вторая производная функции Лагранжа

$$D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица отрицательно определена, поэтому точка $(3/5, 4/5)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на M_1 , а значит и на M (ответ на вопрос (г) — нет).

Рассмотрим точку $(9/5, -3/5)$ на множестве M_2 . Вторая производная функции Лагранжа

$$D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена, поэтому точка $(9/5, -3/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на M_2 , а значит и на M (ответ на вопрос (д) — да).

Также получилось, что у функции $f(x, y)$ по два локальных минимума и максимума на множестве M , поэтому ответы на вопросы (в) — да и (е) — да.

На рисунке 1 изображено множество M , стационарные точки и линии уровня функции $f(x, y)$.

Задача 2. При $|x| > 1$ знаменатель растёт при $n \rightarrow \infty$ быстрее, чем числитель, так что $f(x) = 0$. При $|x| < 1$ знаменатель и числитель стремятся к 1, так что $f(x) = 1$. При $x = -1$ знаменатель равен 2, а числитель — то 2, то 0, в зависимости от чётности n , так что значение $f(-1)$ не определено. При $x = 1$ знаменатель и числитель равны 2, так что

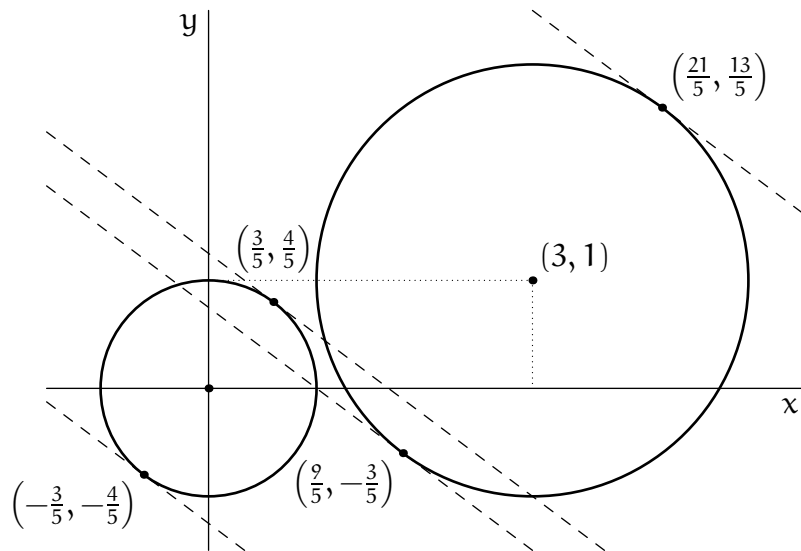


Рис. 1. Множество M и линии уровня функции $f(x, y)$

$f(1) = 1$. Таким образом,

$$M = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ 1, & -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

(см. рис. 2). Функция $f_n(x)$ стремится к 0 при $x \rightarrow \pm\infty$, равна 1 при $x = 0$ и $x = 1$;

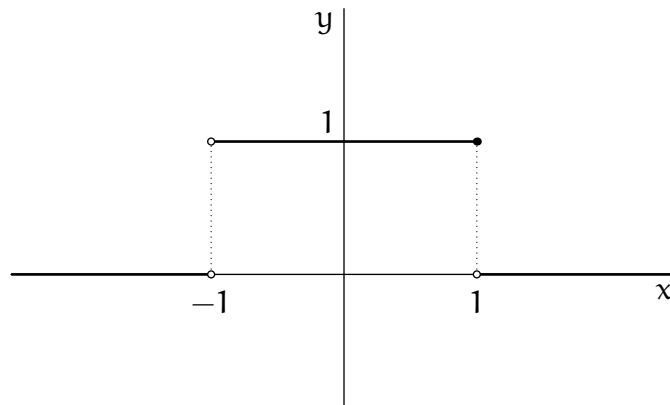


Рис. 2. График функции $f(x)$

$f_n(-1) = 1$ при четных n и 0 при нечетных n . Производная

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - 2x^n - x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2}$$

принимает нулевое значение при $x^n = -1 + \sqrt{2}$, $x^n = -1 - \sqrt{2}$ или $x = 0$. При этом в первом случае $f_n(x) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, во втором случае, реализующемся только при нечетных n , $f_n(x) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$, а в третьем случае $f_n(x) = 1$. Только эти точки могут быть точками локальных экстремумов, и только в них может достигаться наибольшее или наименьшее значение функции $f_n(x)$.

Таким образом, ответы на вопросы следующие:

а) нет, так как -1 — предельная точка множества M , не принадлежащая ему;

б) да, так как всего существует две точки разрыва, 1 и -1 , но только одна из них, 1 , принадлежит множеству M ;

в) да, поскольку значение $f(-1)$ не определено и $f(0) = 1$;

г) да, поскольку $f_n(x)$ — непрерывная функция, стремящаяся к 0 при $x \rightarrow \pm\infty$;

д) да, поскольку, как показывает сравнение значений функции $f_n(x)$ в критических точках, при четных n значение $x = 0$ — локальный минимум, $x = \pm(-1 + \sqrt{2})^{1/n}$ — локальные максимумы; при нечетных n $x = (-1 - \sqrt{2})^{1/n}$ — локальный (и глобальный) минимум, $x = (-1 + \sqrt{2})^{1/n}$ — локальный максимум, а значение $x = 0$ не является локальным экстремумом (см. рис. 3 и 4);

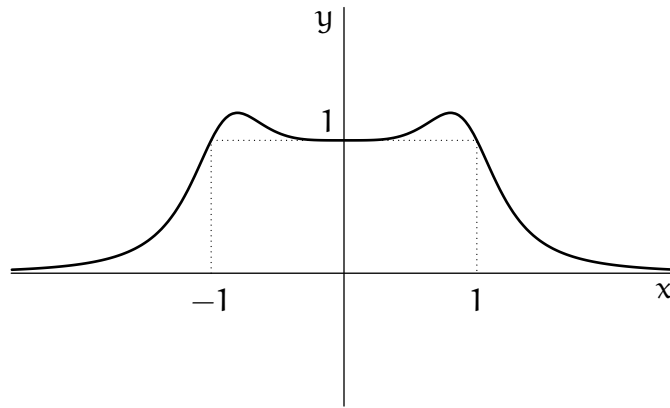


Рис. 3. График функции $f_n(x)$ для $n = 4$

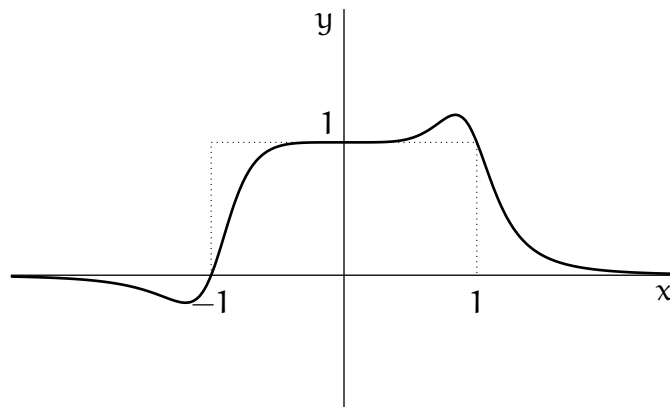


Рис. 4. График функции $f_n(x)$ для $n = 5$

е) нет, так как при нечетных n наименьшее значение достигается в точке $x = (-1 - \sqrt{2})^{1/n}$ (при четных n — не достигается);

ж) нет, так как максимум величины $|f_n(x) - f(x)|$ на $(0, 1)$ достигается в точке $x = (-1 - \sqrt{2})^{1/n}$ и равен $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ независимо от n ;

з) нет, так как точная верхняя грань величины $|f_n(x) - f(x)|$ на $(1, 2)$ равна 1 ($|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 1$ справа), а значит, не стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$.

Задача 3. Рассмотрим матрицу A и заметим, что ее вторая и третья строки пропорциональны друг другу (коэффициент пропорциональности равен $-\alpha$). Поэтому ранг матрицы A не превосходит двух при любых значениях α . Если теперь рассмотреть угловой минор второго порядка, то он равен

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 - \alpha^3 = \alpha^2(1 - \alpha).$$

Этот минор не равен нулю при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, и ранг матрицы A при этом равен 2. При $\alpha = 0$ матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

и ее ранг равен 1. Решив систему $Ax = 0$, получаем, что пространство L равно линейной оболочке

$$L = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha = 0.$$

При $\alpha = 1$ матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

и ее ранг тоже равен 1. Решив соответствующую систему, получаем

$$L = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha = 1.$$

Если же $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, то решив систему $Ax = 0$ (например, методом Гаусса), получаем, что

$$L = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha \neq 0, \alpha \neq 1.$$

Вычислим теперь определитель матрицы B :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 + \alpha & 1 \\ \alpha^2 & 1 + \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 + \alpha & \alpha \end{pmatrix} &= \alpha(1 + \alpha) \det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \alpha(1 + \alpha)(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha^3) = \\ &= -\alpha(1 + \alpha)(1 - \alpha)^2(1 + \alpha) = \\ &= -\alpha(1 - \alpha)^2(1 + \alpha)^2. \end{aligned}$$

Как видим, при $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \neq -1$ он не равен нулю, и соответствующее множество решений $M = \{0\}$.

При $\alpha = 0$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } B = 2, \quad M = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

При $\alpha = 1$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } B = 1, \quad M = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

При $\alpha = -1$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } B = 1, \quad M = \mathcal{L} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Теперь можно ответить на вопросы. Ответ (а) — нет, (б) — да ($\alpha = 0$ и $\alpha = 1$). Ответ (в) — нет, (г) — да ($\alpha = 1$ и $\alpha = -1$). Неравенство $\dim L > \dim M$ выполняется при $\alpha \neq -1$ и $\alpha \neq 1$. В каждом из этих случаев $L \supset M$, поэтому ответ (д) — да. Равенство $\dim L = \dim M$ выполняется только при $\alpha = 1$, нетрудно видеть, что при этом $\mathbf{R}^3 = L + M$, и ответ (е) — да. Контрпримером к вопросу (ж) служит случай $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1, \alpha \neq -1$, когда $M = \{0\}$, а $\dim L = 2$, то есть ответ (ж) — нет. И наконец, \mathbf{R}^3 разлагается в прямую сумму L и M только в случае $\alpha = -1$. Нетрудно видеть, что при этом L и M действительно ортогональны друг другу, то есть ответ (з) — да.

Задача 4. Так как уравнение является линейным, то его решение определено на максимальном интервале (содержащем точку $t = 1$), для которого правая часть определена, то есть на $(0, +\infty)$. Поэтому ответ на вопрос (а) — да, на вопрос (б) — нет (заметим, что при $\alpha = 0$ правая часть уравнения тоже не определена при $t = 0$).

Решим это уравнение. Начнем с однородного:

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha}{t} \implies \ln|x| = \alpha \ln|t| = \alpha \ln t,$$

откуда получаем, что $x(t) = Ct^\alpha$.

Теперь применим метод вариации постоянной, чтобы найти частное решение неоднородного уравнения. Положим $C = C(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{C}(t)t^\alpha + C(t)\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha C(t)t^\alpha}{t} + t^\beta, \\ \dot{C}(t) &= t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить, например, что $C(t) = \ln t$ при $\alpha = 1 + \beta$, и $C(t) = \frac{t^{\beta-\alpha+1}}{\beta - \alpha + 1}$ при $\alpha \neq 1 + \beta$. Подставив эти выражения обратно, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = \begin{cases} t^\alpha \ln t + Ct^\alpha, & \text{при } \alpha = 1 + \beta, \\ \frac{t^{\beta+1}}{\beta - \alpha + 1} + Ct^\alpha, & \text{при } \alpha \neq 1 + \beta. \end{cases}$$

Теперь подставим начальное условие. (1) $\alpha = 1 + \beta$: $x_1 = 1^\alpha \ln 1 + C1^\alpha = C$; (2) $\alpha \neq 1 + \beta$: $x_1 = \frac{1^{\beta+1}}{\beta - \alpha + 1} + Ct^\alpha = \frac{1}{\beta - \alpha + 1} + C$, откуда находим решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} (\ln t + x_1)t^\alpha, & \text{при } \alpha = 1 + \beta, \\ \frac{t^{\beta+1}}{\beta - \alpha + 1} + \left(x_1 - \frac{1}{\beta - \alpha + 1}\right)t^\alpha, & \text{при } \alpha \neq 1 + \beta. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\alpha = \beta = -1$, $x_1 = 1$. В этом случае $x(t) \equiv 1$, то есть ответ на вопрос (в) — да. Кроме того, $x(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому ответ на вопрос (д) — да.

Рассмотрим случай $\alpha = -1$, $\beta = -2$, x_1 — любое. Тогда $x(t) = \frac{\ln t + x_1}{t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, и ответ на вопрос (г) — да.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $x_1 = -1$. Решение $x(t) = \ln t - 1 \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, и ответ на вопрос (е) — нет.

Подставим $\alpha = \beta = x_1 = 2$: $x(t) = t^3/1 + (2 - 1/1)t^2 = t^3 + t^2$. То есть $x(2) = 2^3 + 2^2 = 12$ (ответ на вопрос (ж) — нет).

Если $\alpha = 3$, $\beta = 2$, то решение равно $x(t) = (\ln t + x_1)t^3$. Так как t^3 стремится к нулю быстрее, чем $\ln t$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow +0$, то ответ на вопрос (з) — да.

Задача 5. Упростим выражение для функции $g(t)$. Для этого заметим, что $t^2/|t| = |t|$ и $t/|t| = \text{sign } t$, откуда получим выражение

$$g(t) = \begin{cases} -t - \alpha & \text{при } t < 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ t + \alpha & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $g(t)$ определена на всей прямой \mathbf{R} и непрерывна только при $\alpha = 0$ (иначе у нее появляется разрыв в точке $t = 0$). На рисунке 5 приведен график функции $g(t)$ для $\alpha = -0.4$.

Теперь найдем функцию $f(x)$. При $x \leq 0$

$$f(x) = \int_{x-1}^x (-t - \alpha) dt = \left(-t^2/2 - \alpha t\right) \Big|_{x-1}^x = -x - \alpha + 1/2.$$

При $x \geq 1$

$$f(x) = \int_{x-1}^x (t + \alpha) dt = \left(t^2/2 + \alpha t\right) \Big|_{x-1}^x = x + \alpha - 1/2.$$

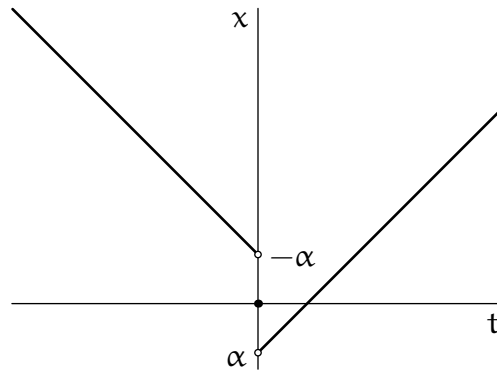


Рис. 5. График функции $g(t)$ для $\alpha = -0.4$

И, наконец, при $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x-1}^0 (-t - \alpha) dt + \int_0^x (t + \alpha) dt = \\ &= (-t^2/2 - \alpha t) \Big|_{x-1}^0 + (t^2/2 + \alpha t) \Big|_0^x = x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2 \end{aligned}$$

(график функции $f(x)$ для $\alpha = -0.4$ изображен на рисунке 6).

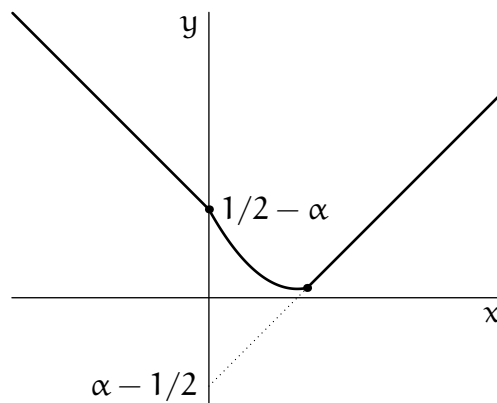


Рис. 6. График функции $f(x)$ для $\alpha = -0.4$

Таким образом, функция $f(x)$ определена при всех $x \in \mathbf{R}$ (ответ на вопрос (а) — да). Также из линейности функции $f(x)$ на $(-\infty, 0]$ и $[1, +\infty)$ следует, что у нее существуют две наклонные асимптоты (ответ на вопрос (з) — да). Далее, заметим, что по построению вне точек $x = 0$ и $x = 1$ функция $f(x)$ непрерывна, а также непрерывна слева в точке $x = 0$ и справа в точке $x = 1$. Пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2) = -\alpha + 1/2 = -0 - \alpha + 1/2 = f(0)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2) = \alpha + 1/2 = 1 + \alpha - 1/2 = f(1),$$

откуда следует непрерывность в точках $x = 0$ и $x = 1$, и ответ на вопрос (б) — да.

Рассмотрим теперь производную справа и слева в точке $x = 0$.

$$f'(0-0) = (-x - \alpha + 1/2)' = -1,$$

$$f'(0+0) = (x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2)' = 2x + 2\alpha - 1 = 2\alpha - 1.$$

Эти выражения совпадают только при $\alpha = 0$. Таким образом, не при всех α функция $f(x)$ дифференцируемая (ответ на вопрос (в) — нет).

Далее, предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, поэтому ответ на вопрос (г) — нет.

Найдем также производную слева и справа в точке $x = 1$.

$$f'(1-0) = (x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2)' = 2x + 2\alpha - 1 = 2\alpha + 1,$$

$$f'(1+0) = (x + \alpha - 1/2)' = 1$$

(график производной при $\alpha = -0.4$ изображен на рисунке 7).

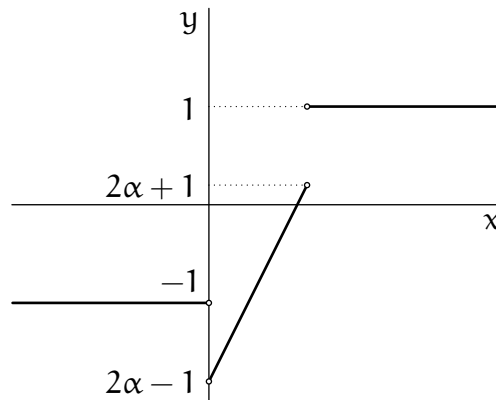


Рис. 7. График функции $f'(x)$ для $\alpha = -0.4$

Как видно, в этой точке производная существует тоже только при $\alpha = 0$. При этом она равна

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \leq 0, \\ 2x - 1 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geq 1, \end{cases}$$

то есть, монотонно не убывает. Отсюда следует, что при $\alpha = 0$ функция $f(x)$ выпуклая (ответ на вопрос (д) — да).

Далее, легко видеть, что при $x > 1$ функция $f(x)$ строго возрастает. Поэтому, например, при $\alpha < -1/2$ точка $x = 1/2 - \alpha$ никак не может быть точкой локального минимума функции $f(x)$ (ответ на вопрос (е) — нет).

Наконец, рассмотрим производную $f'(x)$ при всех значениях α :

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \leq 0, \\ 2x + 2\alpha - 1 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geq 1. \end{cases}$$

Как можно заметить, производная меняет знак всего один раз, с отрицательного на положительный. При $\alpha \leq -1$ это происходит в точке $x = 1$, при $\alpha \geq 1$ — в точке $x = -1$, и при $-1 < \alpha < 1$ в точке $1/2 - \alpha$. Таким образом, у функции $f(x)$ действительно существует единственная точка локального минимума (она же является и точкой глобального минимума), и ответ на вопрос (ж) — да.

3 Вступительный экзамен 2017 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «-0.25»
- * отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «-1»
- * отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Множество $M \subset \mathbf{R}$ имеет ровно пять граничных точек. Тогда

- A множество M конечно
- B множество M бесконечно
- C множество M замкнуто
- D множество M не замкнуто
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть $\{x_n\}$ — неограниченная последовательность. Тогда

- A множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной верхней грани
- B множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной нижней грани
- C если $x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ является ограниченной
- D последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, такую что $x_{k_n} > n$ или $x_{k_n} < -n$ для всех n
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть $f_n(x) = \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, и для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда

- A функция $f(x)$ ограничена на множестве M
- B функция $f(x)$ имеет разрывы первого и второго рода
- C множество, где производная $f'(x)$ не существует, конечно
- D для любого числа a уравнение $f(x) = a$ имеет решение
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Квадратная матрица P порядка n задаёт оператор проектирования в \mathbf{R}^n , где $n \geq 2$. Кроме того в \mathbf{R}^n задано стандартное скалярное произведение. Тогда

- A существует невырожденная матрица Q , такая что матрица $Q^{-1}PQ$ задаёт ортогональный проектор в \mathbf{R}^n
- B существует ортогональная матрица Q , такая что матрица $Q^{-1}PQ$ задаёт ортогональный проектор в \mathbf{R}^n
- C существует невырожденная матрица Q , такая что матрица $Q^{-1}PQ$ невырожденная
- D существует ортогональная матрица Q , такая что матрица $Q^{-1}PQ$ вырожденная
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть r — максимальный ранг для всех квадратных матриц A порядка 5, таких что $A^2 = 0$. Тогда

- A $r = 0$
- B $r = 1$
- C $r = 2$

D $r = 3$

E $r = 4$

6. Квадратная матрица A порядка $n \geq 2$ такова, что $A^2 = A^T$, где через A^T обозначается матрица, транспонированная к A . Тогда

A матрица A задает оператор проектирования

B матрица A ортогональная

C матрица A вырожденная

D если λ — вещественное собственное число матрицы A , то $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Даны две матрицы A и B порядка $m \times k$ и $k \times n$ соответственно, где $m, k, n \geq 2$. Обозначим через b столбец длины m , а через x и y неизвестные столбцы длин n и k соответственно. Тогда

A если строки матрицы B линейно независимые, то системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно

B если столбцы матрицы B линейно независимые, то системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно

C если системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно, то строки матрицы B линейно независимые

D если системы $(AB)x = b$ и $Ay = b$ совместны одновременно, то столбцы матрицы B линейно независимые

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geq 2$. Обозначим через A^T матрицу, транспонированную к матрице A , а через $\text{Ker } X$ — ядро матрицы X . Тогда

A если $\text{Ker } A = \text{Ker } B$, то $AB = BA$

B если $AB = BA$, то $\text{Ker } A = \text{Ker } B$

C если $AA^T = A^T A$, то $\text{Ker } A = \text{Ker } A^T$

D если $\text{Ker } A = \text{Ker } A^T$, то $AA^T = A^T A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — матрица размера $m \times n$, где $m, n \geq 2$, b — столбец длины m и x — неизвестный столбец длины n . Найдите ложное утверждение.

- A если $m < n$ и система $Ax = b$ совместна при любом b , то столбцы матрицы A образуют базис в \mathbf{R}^m
- B если $m > n$ и система $Ax = b$ совместна при любом b , то столбцы матрицы A образуют базис в \mathbf{R}^m
- C если $m = n$ и система $Ax = b$ совместна при любом b , то строки матрицы A образуют базис в \mathbf{R}^m
- D если $m = n$ и существует b такое, что система $Ax = b$ несовместна, то строки матрицы A не образуют базис в \mathbf{R}^m
- E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

10. Предел $\lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^1 \frac{t - \ln(t+1)}{t^2} dt$ равен

- A $\ln 2$
- B $-1 + \ln 2$
- C $-1 + \ln 4$
- D $-\infty$
- E величине, отличной от A, B, C, D, или не существует.

11. Пусть $f_n(x) = \frac{n \ln(1+x)}{nx+1}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, где $x \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

- A функция f непрерывна на множестве $[0, +\infty)$
- B последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ равномерно на множестве $(0, +\infty)$
- C правая производная $f'(0+)$ существует и равна $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0+)$
- D интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ существует и равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^4 - (x - \sqrt{1+x^2})^4}{x}$ равен

- A 2
- B 4
- C 6
- D 8
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

13. Интеграл $\int_{-1}^1 (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} dx$ равен

A -1

B 0

C 1

D $3/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

14. Предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)} - x)$ равен

A $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$

B $\frac{a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1}{3}$

C 0

D 3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

15. Пусть $f_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{x^2 + x + 1}{n(2x^2 + x + 2)} \right)$, $n = 1, 2, \dots$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, и для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Тогда

A множество M ограничено

B функция $f(x)$ чётна

C в точке $x = 1$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на множестве M

D функция $f(x)$ не ограничена на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1 + n^2} + \frac{n}{4 + n^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

равен

A π

B $\pi/2$

C $\pi/3$

D $\pi/4$

Е все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+5n} - \frac{1}{3+5n} + \frac{1}{5+5n} \right)$$

равна

A 3.5

B 35.5

C $15.5 + 2 \ln 2$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

18. Пусть A — непустое подмножество \mathbf{R} . Выберите *ложное* утверждение

A A замкнутое тогда и только тогда, когда A не содержит ни одной внутренней точки

B A замкнутое тогда и только тогда, когда каждая точка дополнения к A является внешней точкой A

C A замкнутое тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки

D A замкнутое тогда и только тогда, когда A содержит все свои граничные точки

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

19. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

равна

A $\frac{\ln 2}{2^{3/2}}$

B $\frac{\ln 3}{3^{3/2}}$

C $\frac{\ln 4}{4^{3/2}}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

20. Интеграл $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ равен

- A $2 - 5/e$
- B $3 - 4/e$
- C $4 - 6/e$
- D $1 + 1/e$
- E числу, отличному от перечисленных в A–D

21. Функция $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ на множестве $\{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 2\}$

- A достигает наименьшего значения в единственной точке
- B достигает наименьшего значения ровно в двух точках
- C достигает наименьшего значения ровно в четырех точках
- D достигает наименьшего значения ровно в восьми точках
- E не достигает наименьшего значения

22. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - e^{-x}) - 2x - 5x^3/3}{\sin x - x^3/6}$

- A равен -2
- B равен -1
- C равен 1
- D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C
- E не существует

23. Числовая функция $f(x)$ задана на интервале $(0, 1)$ и непрерывна в каждой его точке. Пусть $M = f((0, 1))$ — образ интервала $(0, 1)$. Тогда

- A множество M открыто
- B множество M не замкнуто
- C множество M ограничено
- D множество M имеет непустую границу
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n \right)^2 \sin(1/n)$ равен

- A 0
- B 1
- C e^2

D 4

Е числу, отличному от перечисленных в А, В, С, D, или не существует

25. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{2n+4}$ равен

A 0

B 1

C e^2

D e^4

Е числу, отличному от перечисленных в А, В, С, D, или не существует

26. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \cos^2(nx) dx$ равен

A 0

B π

C $\pi/4$

D $\pi/2$

Е числу, отличному от перечисленных в А, В, С, D, или не существует

27. Наибольшее значение функции $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ на множестве $\{(x, y) : 2|x| + |y| = 2\}$ равно

A 1

B 2

C 3

D 4

Е не достигается

28. Пусть $f(x)$ — строго возрастающая непрерывная на $[0, +\infty)$ функция, причём известно, что $f(0) = 0$. Пусть

$$I(a, b) = \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy,$$

где $a, b \geq 0$ Тогда

A $I(a, b) \geq \frac{af(a) + bf^{-1}(b)}{2}$

B $I(a, b) \leq \frac{af(a) + bf^{-1}(b)}{2}$

- C $I(a, b) \geq ab$
- D $I(a, b) \leq ab$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Пусть $f(x)$ — значение переменной $y \in [-1, 1]$, при котором функция $g(y) = xy - y^2$ достигает максимума по $y \in [-1, 1]$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

- I. Функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$.
- II. Функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in \mathbf{R}$.
- III. Функция $f(x)$ — строго возрастающая на всей числовой прямой.

- A только I
- B только III
- C I и II
- D I и III
- E I, II и III

30. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , причем $f(a) < f(b)$. Тогда

- A функция $f(x)$ строго возрастает на отрезке $[a, b]$
- B существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) > 0$
- C функция $f'(x)$ непрерывна на интервале (a, b)
- D $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ обладает следующим свойством: для любых $x, y \in \mathbf{R}$ таких, что $x \neq y$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{|x - y|}$. Найдите ложное утверждение:

- A функция $f(x)$ ограничена на всей числовой прямой
- B функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой
- C функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой
- D функция $f(x)$ неубывающая на всей числовой прямой
- E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

32. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — непрерывная функция, $M \subset \mathbf{R}$ — множество всех точек на числовой прямой, в которых функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на \mathbf{R} . Тогда множество M

- A состоит только из изолированных точек
- B замкнуто
- C ограничено сверху
- D непусто
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3.1.2 Вторая часть теста

1. Дана функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ и множество $M = \{(x, y): x^4 - a^2x^2 + y^2 = 0\}$, где a — положительный вещественный параметр. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M в чётном числе точек;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M в нечётном числе точек;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в чётном числе точек;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в нечётном числе точек;

Да Нет

д) точки $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ являются точками локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да Нет

е) точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да Нет

ж) при всех $a \geq 1$ точка $\left(\sqrt{\frac{a^2 - 1}{2}}, \sqrt{\frac{a^4 - 1}{4}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да Нет

з) при всех $a < 1$ точка $\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-a^4}{4}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M .

Да

Нет

2. Функция $f(x)$ задана равенством $f(x) = \int_{6x}^{x^2+8} \frac{dt}{\sqrt{|t|+2}}$. Тогда

а) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения;

Да

Нет

б) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения;

Да

Нет

в) уравнение $f(x) = 0$ имеет чётное число решений;

Да

Нет

г) уравнение $f'(x) = 0$ имеет чётное число решений;

Да

Нет

д) на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ убывает;

Да

Нет

е) существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

Да

Нет

ж) на отрезке $[0, 5]$ есть точка локального минимума функции $f(x)$;

Да

Нет

з) существует такое число $N > 0$, что при всех $x > N$ выполняется неравенство $f(x) > 6x$.

Да

Нет

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = tx^2 + t$$

с начальным условием $x(0) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $x(t)$. Тогда

а) множество M ограничено;

Да

Нет

б) существует такое $a \in \mathbb{R}$, что функция $x(t)$ имеет разрыв второго рода в одной из точек множества M ;

Да Нет

в) функция $x(t)$ является четной на множестве M ;

Да Нет

г) $3 \notin M$;

Да Нет

д) график функции $x(t)$ не имеет точек перегиба;

Да Нет

е) функция $x(t)$ достигает наименьшего значения на множестве M ;

Да Нет

ж) если $a = -1$, то $2 \in M$ и $x(2) > 1$;

Да Нет

з) если $a = 1$, то $2 \in M$ и $x(2) < 2$.

Да Нет

4. Семейство функций $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, для всех $x \in \mathbb{R}$ задано соотношением

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x^{2n} + 1} - \sqrt[n]{|x^{2n} - 1|}.$$

Тогда

а) каждая функция $f_n(x)$ имеет два строгих локальных минимума;

Да Нет

б) каждая функция $f_n(x)$ имеет два строгих локальных максимума;

Да Нет

в) каждая функция $f_n(x)$ дифференцируема на всей вещественной оси;

Да Нет

г) для каждой функции $f_n(x)$ имеет место равенство производных $f'_n(2017) = f'_n(-2017)$;

Да Нет

д) конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ существует для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме точек $x = 1$ и $x = -1$;

Да Нет

е) предельная функция $f(x)$ имеет на вещественной оси устранимые разрывы;

Да

Нет

ж) последовательность $f_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на всей вещественной оси;

Да

Нет

з) все положительные корни уравнения $f_n(x) = 1/2017$ при $n \rightarrow \infty$ сходятся к положительному корню уравнения $f(x) = 1/2017$.

Да

Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. Е. 2. D. 3. Е. 4. А. 5. С. 6. D. 7. А. 8. С. 9. А. 10. С. 11. D. 12. D. 13. В. 14. А. 15. С. 16. D. 17. Е.
18. А. 19. D. 20. А. 21. В. 22. В. 23. Е. 24. В. 25. D. 26. D. 27. D. 28. С. 29. А. 30. В. 31. Е. 32. В.

3.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что уравнение, задающее множество M , можно представить в виде $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$. Далее, подставим это выражение в функцию $f(x, y)$ и получим, что для решения задачи достаточно исследовать поведение функции $g(x) = x^2 - x^2(a^2 - x^2) = x^4 + (1 - a^2)x^2$ при $|x| \leq a$.

Производная функции $g(x)$ равна

$$g'(x) = 4x^3 + 2(1 - a^2)x = 2x(2x^2 + (1 - a^2)).$$

Как видим, $g(x)$ имеет одну стационарную точку $x = 0$ при любом $a > 0$ (при этом $g(0) = 0$) и еще две стационарные точки $x = \pm\sqrt{\frac{a^2 - 1}{2}}$ при $a > 1$ (при этом $g(x) = -\frac{(a^2 - 1)^2}{4}$ в каждой из них). Также следует рассмотреть крайние точки отрезка $x = \pm a$, в которых тоже может достигаться наибольшее или наименьшее значение. Значение функции $g(a) = g(-a) = a^4 + a^2 - a^4 = a^2$. Сравнивая эти три значения, получаем, что наибольшее значение функция $g(x)$ достигает в точках $x = \pm a$, им соответствуют две точки $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ на множестве M . Если $a \neq 1$, то наименьшее значение достигается в точках $\pm\sqrt{\frac{a^2 - 1}{2}}$, которым соответствуют четыре точки множества M : $\left(\pm\sqrt{\frac{a^2 - 1}{2}}, \pm\sqrt{\frac{a^4 - 1}{4}}\right)$, а если $a = 1$, то эти четыре точки превращаются в одну точку $(0, 0)$. Таким образом, ответы на вопросы а) — «да», б) — «нет», в) — «нет», г) — «нет».

Далее, так как в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M , эти точки являются точками локального максимума (ответ на вопрос д) — «да»).

Заметим, что при $a > 1$ функция $g(x) = x^2(x^2 - (a^2 - 1)) < 0$ при малых $x \neq 0$. Поэтому ответ на вопрос е) — «нет».

Ответ на вопрос ж) — «да», что следует из того, что в точке $\left(\sqrt{\frac{a^2-1}{2}}, \sqrt{\frac{a^4-1}{4}}\right)$ достигается наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M при $a \geq 1$.

И наконец, точка $\left(\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}, \sqrt{\frac{1-a^4}{4}}\right)$ не является стационарной, поэтому в ней нет локального минимума или максимума (ответ на вопрос з) — «нет»).

Задача 2. Очевидно, что функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Поскольку подынтегральная функция $g(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|+2}}$ строго положительная и непрерывная, то $f(x) > 0$, если $6x < x^2 + 8$, $f(x) < 0$, если $6x > x^2 + 8$ и $f(x) = 0$, если $6x = x^2 + 8$. Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, $f(x) < 0$ при $x \in (2, 4)$ и $f(2) = f(4) = 0$. Далее, по правилу Лейбница $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+10}} - \frac{6}{6|x|+2}$. Очевидно, что $f'(x) < 0$ при $x \leq 0$. Если $x > 0$, то уравнение $f'(x) = 0$ равносильно уравнению (пропускаем рутинные вычисления)

$$h(x) = 6x^3 - 7x^2 = 90. \quad (1)$$

Заметим, что функция $h(x)$ отрицательна на интервале $(0, 7/6)$, положительна на интервале $(7/6, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Далее, $h'(x) = 18x^2 - 14x = 18x(x - 7/9)$. Значит, на интервале $(7/9, +\infty)$ функция $h(x)$ строго возрастает, и поскольку $h(7/9) < 0$, то уравнение имеет единственное решение на $(0, +\infty)$, а значит и на всей числовой прямой. Так как $f'(2) = \frac{4}{\sqrt{14}} - \frac{6}{\sqrt{14}} < 0$, то единственный корень уравнения (1) принадлежит интервалу $(2, 4)$, и эта точка является точкой наименьшего значения функции $f(x)$. Получаем ответы: б) да, в) да, г) нет, д) да, ж) да.

Если $x < 0$, то

$$f(x) = \int_{6x}^{x^2+8} \frac{dt}{\sqrt{|t|+2}} > \int_0^{x^2+8} \frac{dt}{|t|+2} \geq \frac{x^2+8}{\sqrt{x^2+10}} > \sqrt{x^2+8}.$$

Значит, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Ответ на вопрос а) нет, на вопрос е) нет.

Нетрудно видеть, что при $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+10/x^2}} - \frac{6}{6|x|+2} < 2.$$

Поэтому при $x \geq 4$ функция $f(x) \leq f(4) + 2(x-4) = 2x - 8$, что не превосходит $6x$ при всех $x \geq 4$. Ответ на вопрос з) нет.

Задача 3. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Перенеся в левую часть все, что зависит от x (заметим, что делить на $x^2 + 1$ можно при всех x), а в правую — все, что зависит от t , и интегрируя, получаем

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int t dt \Rightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow x(t) = \operatorname{tg} \left(\frac{t^2}{2} + C \right),$$

где $C \in \mathbf{R}$ — произвольная постоянная, определяемая из начального условия:

$$x(0) = a = \operatorname{tg} C \Rightarrow C = \operatorname{arctg} a \Rightarrow x(t) = \operatorname{tg} \left(\frac{t^2}{2} + \operatorname{arctg} a \right).$$

Здесь значение t должно быть достаточно малым по абсолютной величине, чтобы на отрезке $[0, t]$ не было точек, при которых тангенс в правой части не определен. Это означает, что

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{t^2}{2} + \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow |t| < \sqrt{\pi - 2\operatorname{arctg} a}.$$

Это неравенство задает множество M — область определения максимального (непродолжаемого) решения $x(t)$.

Ответы на п. а)–з) такие:

а) да, так как множество $M \left(-\sqrt{\pi - 2\operatorname{arctg} a}, \sqrt{\pi - 2\operatorname{arctg} a} \right)$ ограничено при всех $a \in \mathbf{R}$;

б) нет, так как решение $x(t)$ — функция, дифференцируемая, а значит и непрерывная на всем множестве M и не может иметь разрыв второго рода;

в) да, так как функция $x(t)$ зависит только от t^2 и поэтому является четной на множестве M ;

г) да, так как $\sqrt{\pi - 2\operatorname{arctg} a} < \sqrt{2\pi} < 3$, т.е. $3 \notin M$;

д) нет, так как при $a \ll 0$ функция

$$x''(t) = (t(1 + x(t)^2))' = 1 + x(t)^2 + 2tx(t)x'(t) = (1 + x(t)^2)(1 + 2t^2x(t))$$

принимает на M как положительные, так и отрицательные значения: при $t = 0$ $x''(t) = 1 + a^2 > 0$, а при $t = \sqrt{\pi/2}$ и $a \rightarrow -\infty$ величина $x''(t)$ стремится к $1 - \pi < 0$, так что при некотором $t \in M$ вторая производная функции $x(t)$ обращается в 0, меняя знак, и в этом месте график функции $x(t)$ имеет точку перегиба;

е) да, функция $x(t)$ достигает наименьшего значения на множестве M при $t = 0$, так как величина $x'(t) = t(1 + x(t)^2)$ положительна при $t > 0$ и отрицательна при $t < 0$;

ж) да: если $a = -1$, то множество $M = \left(-\sqrt{3\pi/2}, \sqrt{3\pi/2} \right)$ включает число 2, и $x(2) = \operatorname{tg} (2 - \pi/4) > 1$ (поскольку $2 - \pi/4 > \pi/4$);

з) нет: если $a = 1$, то $M = \left(-\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2} \right)$ и $2 \notin M$.

Задача 4. Отметим прежде всего, что функции $f_n(x)$ непрерывны на всей вещественной оси.

Найдем предельную функцию. Если $|x| > 1$ и $n > 1$, то

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^{2n} + 1)^{\frac{1}{n}} - (x^{2n} - 1)^{\frac{1}{n}} = x^2 \left(1 + \frac{1}{x^{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} - x^2 \left(1 - \frac{1}{x^{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \\ &= x^2 \left(1 + \frac{1}{n} \frac{1}{x^{2n}} \right) - x^2 \left(1 - \frac{1}{n} \frac{1}{x^{2n}} \right) + o \left(\frac{1}{x^{2n-2}} \right) = \\ &= 2 \frac{x^2}{n x^{2n}} + o \left(\frac{1}{x^{2n-2}} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если $|x| < 1$, то $x^{2n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому $f_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если $|x| = 1$, то $f_n(x)|_{|x|=1} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, предельная функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \neq 1, \\ 1, & |x| = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Отметим также, что $f_n(0) = 0$.

Найдем производную функции $f_n(x)$. Если $|x| > 1$, то

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{n}(x^{2n} + 1)^{\frac{1}{n}-1} \cdot 2nx^{2n-1} - \frac{1}{n}(x^{2n} - 1)^{\frac{1}{n}-1} \cdot 2nx^{2n-1} = \\ &= 2x^{2n-1} \left[(x^{2n} + 1)^{\frac{1}{n}-1} - (x^{2n} - 1)^{\frac{1}{n}-1} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что эта производная положительна при $x < -1$ и отрицательна при $x > 1$, а при $|x| \rightarrow 1$ эта производная не имеет предела. Если $|x| < 1$, то

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{1}{n}(1 + x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} \cdot 2nx^{2n-1} + \frac{1}{n}(1 - x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} \cdot 2nx^{2n-1} = \\ &= 2x^{2n-1} \left[(1 + x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} + (1 - x^{2n})^{\frac{1}{n}-1} \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что эта производная положительна при $x > 0$ и отрицательна при $x < 0$, при $|x| \rightarrow 1$ эта производная не имеет предела, а при $x = 0$ она обращается в ноль. Кроме того, следует отметить, что при $|x| \rightarrow \infty$ функции $f_n(x)$ монотонно стремятся к нулю при любом $n > 1$. Таким образом, исходя из знаков производной и асимптотик функций $f_n(x)$, можно сделать вывод о том, что каждая функция $f_n(x)$ при $n > 1$ обладает двумя строгими локальными максимумами в точках $x = \pm 1$ и одним строгим локальным минимумом в точке $x = 0$. Поэтому ответы на вопрос «а» — «нет», на вопрос «б» — «да».

Чтобы ответить на вопрос о дифференцируемости функций $f_n(x)$ на всей оси (вопрос «в»), найдем производную, например, в точке $x = 1$. Найдем вначале правую производную, т.е. предел при $h \rightarrow 0+$ от выражения

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{((1+h)^{2n} + 1)^{\frac{1}{n}} - ((1+h)^{2n} - 1)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{h} = \\ &= \frac{((1+2nh) + 1 + o(h))^{\frac{1}{n}} - ((1+2nh) - 1 + o(h))^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{h} = \\ &= \frac{2^{\frac{1}{n}}((1+nh) + o(h))^{\frac{1}{n}} - (2nh + o(h))^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}}}{h} = \\ &= \frac{2^{\frac{1}{n}}(1+h-1) - (2n)^{\frac{1}{n}}(h)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}} + o(h)}{h} = \\ &= \frac{2^{\frac{1}{n}}h - (2n)^{\frac{1}{n}}(h)^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n}} + o(h)}{h} = \\ &= 2^{\frac{1}{n}} - (2n)^{\frac{1}{n}}(h)^{\frac{1}{n}-1} + \frac{o(h)}{h}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое не зависит от h , последнее слагаемое стремится к нулю при $h \rightarrow 0+$, второе слагаемое имеет бесконечный предел при $h \rightarrow 0+$. Соответственно функции

$f_n(x)$ недифференцируемы в точке $x = 1$. Аналогично можно показать, что в точке $x = -1$ производная также не существует. Поэтому ответ на вопрос «в» — «нет».

Теперь можно ответить на остальные вопросы.

На вопрос «г» ответом является «нет», поскольку, как видно из выражения (3), $f'_n(x)(2017) < 0$, а $f'_n(x)(-2017) > 0$.

На вопрос «д» ответом является «нет», поскольку предел существует для всех $x \in \mathbf{R}$, а предельная функция на всей вещественной оси дается формулой (2).

На вопрос «е», как видно из формулы (2), ответом является «да».

Что касается равномерной сходимости, то она, очевидно, отсутствует, поскольку если последовательность непрерывных на всей оси функций сходится равномерно, то предельная функция также должна быть непрерывной, а в нашем случае предельная функция разрывна. Соответственно на вопрос «ж» ответом является «нет».

Наконец, на вопрос «з» ответом является «нет», поскольку положительные корни уравнения $f_n(x) = 1/2017$ сходятся к точке $x = 1$ при $n \rightarrow \infty$, а уравнение для предельной функции $f(x) = 1/2017$ не имеет решения.

4 Вступительный экзамен 2018 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «−0.25»
- * отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «−1»
- * отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt[4]{n}} \int_1^n \ln x \, dx$ равен

- A 0
- B e
- C $\ln 2$
- D 4
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2. Выберите истинное утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

- A пересечение любого числа компактных множеств является компактным множеством
- B объединение не более чем счетного числа ограниченных множеств является ограниченным множеством
- C пересечение любого числа дополнений к замкнутым множествам является дополнением к замкнутому множеству
- D любое множество является пересечением конечного числа множеств, каждое из которых является либо открытым либо замкнутым
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Интеграл $\int_1^2 \frac{x+3}{3x^2-x^3} dx$ равен

- A $\frac{1}{2}$
- B $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \ln 2$
- C $\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \ln 2$
- D $-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \ln 2$
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

4. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sqrt{1+x^2})^4 - (x - \sqrt{1+x^2})^4}{x}$ равен

- A 2
- B 4
- C 6
- D 8
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

5. Пусть $\{x_n\}$ — неограниченная последовательность. Тогда

- A множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной верхней грани
- B множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной нижней грани
- C если $x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ является ограниченной
- D последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, такую что $x_{k_n} > n$ или $x_{k_n} < -n$ для всех n

Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

6. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)^n$ равен

А 1

В -1

С e

Д 1/e

Е числу, отличному от перечисленных в А, В, С, D, или не существует

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема на интервале $(0, 1)$. Тогда существует значение $c \in \mathbf{R}$, такое что функция $g(x) = f(x) + cx$

А достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0, 1]$ в одной из точек $x = 0$ или $x = 1$

В достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0, 1]$ в одной из его внутренних точек

С имеет ненулевую производную ($g'(x) \neq 0$) при всех $x \in (0, 1)$

Д имеет нулевую производную ($g'(x) = 0$) в некоторой точке $x \in (0, 1)$

Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

8. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[0, 1]$, причем $f(0) > g(0)$ и $f(1) > g(1)$. Тогда

А если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет конечное количество решений, то это количество четное

В если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет бесконечное количество решений, то множество его решений несчетно

С если уравнение $f^2(x) = g^2(x)$ имеет решения, то и уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения

Д если для некоторого $x_0 < 0.5$ выполнено $f(2x_0) = g(2x_0)$, то количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0, 2x_0)$ совпадает с количеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(2x_0, 1)$

Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

9. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной прямой, причем принимает значения разных знаков. Тогда

- A функция $\operatorname{tg} f(x)$ определена на всей вещественной прямой
- B функция $\operatorname{tg} f(x)$ определена не на всей вещественной прямой
- C если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{arctg} f(x)$ достигает наибольшего значения
- D если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \frac{1-y^2}{2x}$ с начальным условием $y(2) = 3$. Выберите *ложное* утверждение:

- A $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 1$
- B $y'(1 + \sqrt{2}) = -1$
- C $y(3) = 2$
- D $y(-3) = 1/2$
- E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

11. График функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, построенный на плоскости в координатах (x, y) , имеет

- A ровно одну точку перегиба
- B точку касания с прямой $y = ax + b$ для любого $a \in \mathbf{R}$ при некотором $b \in \mathbf{R}$
- C наклонную асимптоту $y = ax + b$ для некоторых $a, b \in \mathbf{R}$
- D четное число точек пересечения с прямой $y = a$ при некотором $a \in \mathbf{R}$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\cos x} + \sin x)^{1/x}$ равен

- A 1
- B $\sqrt[4]{e^3}$
- C e
- D \sqrt{e}
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Найдите *ложное* утверждение.

- A если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится, то она достигает своей точной верхней или точной нижней грани
- B если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет условию $|a_{n+1} - a_n| < 1/2^n, n = 1, 2, \dots$, то она сходится.
- C если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена, то множество её частичных пределов не пусто
- D если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ монотонна и содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится
- E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

14. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3} \right)^n$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) равен

- A e^{abc}
- B $e^{(a+b+c)/3}$
- C $\sqrt[3]{abc}$
- D $\frac{a + b + c}{3}$
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Множество $A \in \mathbf{R}$ содержится в множестве своих предельных точек. Тогда

- A множество его граничных точек пусто
- B множество его изолированных точек пусто
- C множество A замкнуто
- D множество A не замкнуто
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Предел $\lim_{x \rightarrow 1} (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^{1/\ln x}$ равен

- A 0
- B 1
- C e
- D e^2
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ — сходящаяся последовательность, $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ — ограниченная последовательность. Обозначим через $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} z_n$ верхний предел последовательности $\{z_n, n = 1, 2, \dots\}$. Тогда

- A $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) > \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$
- B $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$
- C $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$
- D $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ не существует
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

- I. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $(1, +\infty)$.
- II. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $(0, 2) \cup (3, 5)$.
- III. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $[0, 2]$.

- A только I
- B только I и II
- C только I и III
- D I, II и III
- E ни одно из утверждений I, II и III

19. Кривая на координатной плоскости задана уравнением $x^3 + y^3 = 9$. Через точку $(1, 2)$ проведена касательная к этой кривой. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат, и отрезком касательной между осями координат, равна

- A $81/8$
- B $64/3$
- C $63/4$
- D $39/4$
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

20. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения в отрезке $[0, 1]$. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана рекуррентно: $x_1 \in [0, 1], x_n = f(x_{n-1}), n = 2, 3, \dots$ Тогда

- A если функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то для любого $x_1 \in [0, 1]$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- B если функция $f(x)$ не убывает, то для любого $x_1 \in [0, 1]$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$
- C если функция $f(x)$ разрывна на $[0, 1]$, то существует такое число $x_1 \in [0, 1]$, что предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не существует
- D если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ существует и равен c , то $f(c) = c$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Пусть A и B — две матрицы размера $m \times n$, где $m \geq 2$, $n \geq 2$. Обозначим через $\text{tr} X$ след (сумму диагональных элементов) квадратной матрицы X , также обозначим через X^T матрицу, транспонированную к X . Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

- I. Если $A \neq 0$, то $\text{tr}(A^T A) > 0$.
- II. $\text{tr}(A^T B) \leq \frac{\text{tr}(A^T A) + \text{tr}(B^T B)}{2}$.
- III. $(\text{tr}(A^T B))^2 \leq \text{tr}(A^T A) \text{tr}(B^T B)$.

- A ни одно из I, II, III
- B только I
- C только I и II
- D только I и III
- E I, II и III

22. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geq 2$. Обозначим через $p_X(\lambda) = \det(X - \lambda I)$ характеристический многочлен матрицы X . Тогда

- A $p_{A^2}(\lambda) = p_A(\lambda)$
- B $p_{A^2}(\lambda^2) = (p_A(-\lambda))^2$
- C $p_{A^2}(\lambda^2) = (p_A(\lambda))^2$
- D $p_{A^2}(\lambda^2) = p_A(\lambda) \cdot p_A(-\lambda)$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geq 2$, которые трактуются как линейные операторы в \mathbf{R}^n . Обозначим через $\text{Im} X$ и $\text{Ker} X$ образ и ядро матрицы X соответственно. Тогда

- A если $\text{Im } A \subset \text{Ker } B$, то $\text{Im}(AB) \subset \text{Ker}(AB)$
- B если $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$, то $\text{Im}(AB) \subset \text{Ker}(AB)$
- C если $\text{Im}(AB) \subset \text{Ker}(AB)$, то $\text{Im } A \subset \text{Ker } B$
- D если $\text{Im}(AB) \subset \text{Ker}(AB)$, то $\text{Im } A \subset \text{Ker } A$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — две системы векторов в \mathbf{R}^N , где $N \geq 2$. Обозначим через $L(X)$ и $L(Y)$ их линейные оболочки. Тогда

- A если $L(X) \subset L(Y)$ и система X линейно зависима, то $m \leq n$
- B если $L(X) \subset L(Y)$ и система X линейно независима, то $m \leq n$
- C если $L(X) \subset L(Y)$ и система Y линейно зависима, то $m \leq n$
- D если $L(X) \subset L(Y)$ и система Y линейно независима, то $m \leq n$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y + \sin x$, $y(0) = 0$. Тогда $y(x)$

- A не определена при $x = \pi$
- B определена при $x = 1\pi$, но не определена при $x = 2\pi$
- C определена при $x = 2\pi$, но не определена при $x = 4\pi$
- D определена при $x = 4\pi$, но не определена при $x = 8\pi$
- E определена при $x = 8\pi$

26. Интеграл $\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx$ равен

- A 1/60
- B 1/30
- C 1/3
- D 11/12
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

27. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой. Тогда

- A функция $\ln f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

- В функция $\arcsin f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой
- С функция $f^2(x) - 2f(x) + 3$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой
- D функция $\operatorname{tg} f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

28. Функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ на множестве $\{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$

- А достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках
- В достигает наибольшего значения ровно в двух точках, но не достигает наименьшего значения
- С достигает наименьшего значения ровно в двух точках, но не достигает наибольшего значения
- D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

29. Функция $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

- А достигает глобального максимума в точке $x = 0$
- В имеет точку перегиба в точке $x = 0$
- С достигает локального минимума в точке $x = 1$
- D не достигает глобального минимума
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

30. Непустые множества $A, B \subset \mathbf{R}$ таковы, что замыкание множества А равно замыканию множества В. Тогда

- А если x — внутренняя точка для А, то x — внутренняя точка для В
- В если x — внешняя точка для А, то x — внешняя точка для В
- С если x — граничная точка для А, то x — граничная точка для В
- D если $x \in A$ — предельная точка для А, то $x \in B$ и x — предельная точка для В
- Е все четыре утверждения А, В, С, D ложные

31. Пусть при $n \in \mathbf{N}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{n + x^2}$$

и $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (для тех значений $x \in \mathbf{R}$, при которых этот предел существует). Тогда при $n \rightarrow \infty$ функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$

- A равномерно на \mathbf{R}
- B равномерно на $(-\infty, -1]$
- C равномерно на $[1, +\infty)$
- D равномерно на $[-1, 1]$
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на множестве $M \subset \mathbf{R}$. Тогда

- A если $M = [0, +\infty)$ и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M , то $f(x)$ ограничена на M
- B если $M = (0, 1)$ и функция $f(x)$ дифференцируема на M , то $f(x)$ равномерно непрерывна на M
- C если $M = (0, 1)$, функция $f(x)$ дифференцируема на M и производная $f'(x)$ не ограничена на M , то $f(x)$ не является равномерно непрерывной функцией на M
- D если $M = [0, +\infty)$ и существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на M
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть A — ортогональная матрица порядка $2n$, где $n \geq 2$. Обозначим через a_1, a_2, \dots, a_{2n} столбцы матрицы A . Матрицы P и Q определяются следующим образом:

$$P = \sum_{i=1}^n a_i a_i^T, \quad Q = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i a_i^T,$$

где через a_i^T обозначена строка, транспонированная к столбцу a_i . Тогда

а) матрица P задает ортопроектор;

Да Нет

б) матрица Q ортогональная;

Да Нет

- в) матрица $P - Q$ ортогональная;
- Да Нет
- г) $P + Q = I$;
- Да Нет
- д) $QP = P$;
- Да Нет
- е) $A^T P A$ является диагональной матрицей;
- Да Нет
- ж) $A Q A^T$ является диагональной матрицей;
- Да Нет
- з) $A P A^T + A Q A^T$ является диагональной матрицей.
- Да Нет

2. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2x^2-x^4} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right).$$

Обозначим через M множество тех x , для которых ряд сходится, и для $x \in M$ обозначим сумму этого ряда через $f(x)$. Тогда

- а) множество M ограничено сверху;
- Да Нет
- б) множество M открыто;
- Да Нет
- в) граница множества M пуста;
- Да Нет
- г) уравнение $f(x) = 0$ имеет чётное число решений;
- Да Нет
- д) функция $f(x)$ является чётной;
- Да Нет
- е) интервал $(-3, -2)$ содержится в M , и на интервале $(-3, -2)$ ряд сходится равномерно;
- Да Нет

ж) интервал $(0, 1)$ содержится в M , и на интервале $(0, 1)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) функция $f(x)$ ограничена на M .

Да Нет

3. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^2 - y$, $y(0) = a$, где a — вещественный параметр. Тогда

а) при любом a область определения функции $y(x)$ является неограниченным множеством;

Да Нет

б) при любом a функция $y(x)$ строго монотонна;

Да Нет

в) при любом a график функции $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

г) при любом a функция $y(x)$ является не периодической функцией;

Да Нет

д) если $0 < a < 1$, то областью определения функции $y(x)$ является вся числовая прямая;

Да Нет

е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 1$ при любом $a \neq 0$;

Да Нет

ж) если $a = 3$, то $y(3) = \frac{3}{3 - 2e^3}$;

Да Нет

з) при любом a уравнение $y(x) = 1$ имеет не более одного решения.

Да Нет

4. Дана функция $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ и множество $M = \{(x, y) : y^2 + x^3 = 2\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ;

Да Нет

в) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да

Нет

г) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да

Нет

д) точка $(0, \sqrt{2})$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да

Нет

е) точка $(\sqrt[3]{2}, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да

Нет

ж) точка $(1, -1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M ;

Да

Нет

з) точка $(1, 1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M .

Да

Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. А. 2. А. 3. В. 4. D. 5. D. 6. Е. 7. D. 8. Е. 9. С. 10. D. 11. С. 12. С. 13. Е. 14. С. 15. В. 16. В. 17. С.
18. С. 19. А. 20. В. 21. Е. 22. D. 23. А. 24. В. 25. Е. 26. В. 27. С. 28. А. 29. Е. 30. В. 31. D. 32. D.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что матрицы P и Q можно представить в виде матричных произведений следующим образом:

$$P = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^T, \quad Q = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} A^T,$$

где 0 и I обозначают нулевую и единичную матрицы порядка n соответственно. Отсюда немедленно следует, что P и Q симметричные, и что

$$P^2 = \left(A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^T \right)^2 = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 A^T = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^T = P$$

($A^T A = I$ в силу ортогональности матрицы A), т. е. P задает ортопроектор (ответ на вопрос а) да).

Матрица Q вырожденная, поэтому ортогональной не является (ответ на вопрос б) нет).

Рассмотрим матрицу $P - Q$. Так как она симметричная, то

$$\begin{aligned} (P - Q)^T(P - Q) &= (P - Q)^2 = \left(A \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) A^T \right)^2 = \\ &= A \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^2 A^T = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} A^T = I, \end{aligned}$$

т. е. ответ на вопрос в) да.

Сумма матриц $P + Q$ равна

$$P + Q = A \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) A^T = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} A^T = I,$$

т. е. ответ на вопрос г) да.

Далее, $QP = (I - P)P = P - P^2 = P - P = 0$, т. е. ответ на вопрос д) нет.

Так как $A^T A = I$, то $A^T P A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и ответ на вопрос е) да. В то же время

$$A Q A^T = A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (A^2)^T,$$

что может и не быть диагональной матрицей. В качестве примера можно рассмотреть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для которой

$$A Q A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответственно, ответ на вопрос ж) нет. И наконец, так как $P + Q = I$, то $A P A^T + A Q A^T = A(P + Q)A^T = A I A^T = I$, то ответ на вопрос з) да.

Задача 2. Очевидно, что $0 \in M$ и $f(0) = 0$. Пусть $x \neq 0$. Известно, что

$$1 - \cos \frac{x}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{n} \right)^2 + o \left(\left(\frac{x}{n} \right)^2 \right) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из интегрального признака Коши следует, что если $2x^2 - x^4 < 1$, то ряд сходится, если $2x^2 - x^4 \geq 1$, то ряд расходится. Элементарный анализ показывает, что $2x^2 - x^4 < 1$

при $x^2 \neq 1$ и $2x^2 - x^4 \geq 1$ при $x^2 = 1$. Следовательно, $M = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, Поэтому ответы на вопросы а) нет, б) да, в) нет.

При любом $x \in M$ каждое слагаемое ряда — неотрицательное число. Если $x \neq 0$, найдётся такое n , что $0 < |x|/n < 2\pi$, и, значит, среди членов ряда будет положительное слагаемое. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение $x = 0$. Ответ на вопрос г) нет. Каждое слагаемое ряда является чётной функцией, следовательно, $f(x)$ — чётная функция. Ответ на вопрос д) да. В силу а) $(-3, -2) \subset M$. Функция $g(x) = 2x^2 - x^4$ на интервале $(-3, -2)$ возрастает, поэтому $n^{2x^2-x^4} < n^{-8}$ при $x \in (-3, -2)$. Значит,

$$\left| n^{2x^2-x^4} \left(1 - \cos \frac{x}{n} \right) \right| < \frac{2}{n^8} \text{ при } x \in (-3, -2),$$

и по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на интервале $(-3, -2)$. Ответ на вопрос е) да.

На интервале $(0, 1)$ функция $g(x) = 2x^2 - x^4$ является возрастающей, а функция $\cos(x/n)$ является убывающей при любом n . Значит, каждое слагаемое ряда является возрастающей функцией на $(0, 1)$, поэтому существует конечный или равный $+\infty$ предел $A = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$. Пусть $f_N(x) = \sum_{n=1}^N n^{2x^2-x^4} (1 - \cos(x/n))$. Так как слагаемые ряда неотрицательны, то $f_N(x) \leq f(x)$. Переходя к пределу при $x \rightarrow 1-$, получаем: $\sum_{n=1}^N n (1 - \cos(1/n)) \leq A$. Поскольку $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = 1/2$, то при n , больших некоторого N_0 выполняется неравенство $1 - \cos(1/n) \geq 1/(4n^2)$, и

$$\sum_{n=1}^N n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) \geq \sum_{n=1}^{N_0} n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{4} \sum_{n=N_0+1}^N \frac{1}{n}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится, то отсюда следует, что конечного предела $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ не существует, т.е. в окрестности $x = 1$ функция $f(x)$ является неограниченной. Как следствие, сходимость на интервале $(0, 1)$ неравномерная. Ответы на вопросы ж) нет, з) нет.

Задача 3. Если $a = 0$, то почти очевидно, что $y(x) = 0$. Если $a = 1$, то решение $y(x) = 1$. Пусть $a \neq 0$, $a \neq 1$. Тогда в окрестности точки $x = 0$ выполнены неравенства $y(x) \neq 0$, $y(x) \neq 1$ в силу непрерывности решения $y(x)$, и можно «разделить переменные». Имеем:

$$\frac{dy}{y^2 - y} = dx, \quad \frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y} = dx, \quad \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = x + C, \quad \left| \frac{y-1}{y} \right| = e^{x+C}.$$

Если $a > 1$, то $\frac{a-1}{a} = e^C$, $\left| \frac{y-1}{y} \right| = \frac{y-1}{y}$ и $y(x) = \frac{a}{a - (a-1)e^x}$. Область определения этой функции — полубесконечный интервал $\left(-\infty, \ln \frac{a}{a-1} \right)$.

Если $0 < a < 1$, то $\frac{1-a}{a} = e^C$, $\left| \frac{y-1}{y} \right| = \frac{1-y}{y}$ и вновь $y(x) = \frac{a}{a - (a-1)e^x}$. Область определения этой функции — вся числовая прямая.

Аналогично при $a < 0$ получаем такое же выражение: $y(x) = \frac{a}{a - (a - 1)e^x}$. Область определения этой функции — полубесконечный интервал $\left(\ln \frac{a}{a - 1}, +\infty\right)$.

Поэтому ответ на вопрос а) да. Ответ на вопрос б) нет, так как при $a = 0$ решение — это константа. Ответ на вопрос в) нет, а на вопрос д) да, так как при $0 < a < 1$ решение задано на всей числовой прямой. Ответ на вопрос г) нет, так как константа является периодической функцией. Ответ на вопрос е) нет, так как при $a < 0$ решение не определено в окрестности $-\infty$.

При $a = 3$ решение $y(x)$ не определено при $x \geq \ln(3/2)$, а поскольку $\ln(3/2) < 3$, то ответ на вопрос ж) нет.

При $a = 1$ уравнение $y(x) = 1$ имеет бесконечно много решений. Поэтому ответ на вопрос з) нет.

Задача 4. Заметим, что выразив $y^2 = 2 - x^3$ из соотношения, задающего множество M , и подставив его в функцию $f(x, y)$ мы получим функцию $g(x) = 3x^2 + 2(2 - x^3) = 4 + x^2 - 2x^3$, которую можно исследовать как функцию одной переменной. Так как $y^2 \geq 0$, то исследовать функцию $g(x)$ следует на множестве, где $2 - x^3 \geq 0$ или на полуинтервале $(-\infty, \sqrt[3]{2}]$. Как видим, при $x \rightarrow -\infty$ функция $g(x) \rightarrow +\infty$, поэтому у функции $g(x)$ на $(-\infty, \sqrt[3]{2}]$ (а значит и у $f(x, y)$ на множестве M) не достигается наибольшее значение, но достигается наименьшее значение (ответы на вопросы а) нет, б) да).

Рассмотрим условие первого порядка $g'(x) = 6x - 6x^2 = 0$, откуда получим два значения $x = 0$ и $x = 1$. Вторая производная $g''(x) = 6 - 12x$ в точке $x = 0$ положительная (локальный минимум), а в точке $x = 1$ отрицательная (локальный максимум). Значению $x = 0$ соответствуют две точки $x = 0, y = \pm\sqrt{2}$, они обе являются точками локального минимума (ответ на вопрос д) да), значению $x = 1$ также соответствуют две точки $x = 1, y = \pm 1$, они обе являются точками локального максимума (ответ на вопрос ж) нет, на вопрос з) да). Теперь исследуем поведение функции $g(x)$ на границе полуинтервала $(-\infty, \sqrt[3]{2}]$. Производная $g'(\sqrt[3]{2}) = 6\sqrt[3]{2}(1 - \sqrt[3]{2}) < 0$, а значит точка $x = \sqrt[3]{2}$ является точкой локального минимума (ответ на вопрос е) нет). Этой точке соответствует единственная точка $x = \sqrt[3]{2}, y = 0$. Таким образом, число локальных максимумов $f(x, y)$ на M равно два (ответ на вопрос в) нет), число локальных минимумов $f(x, y)$ на M равно три (ответ на вопрос г) да).

5 Формат вступительного экзамена 2019 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляет 3 часа, максимальная оценка — «12».
2. Тест состоит из двух частей. Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

Продолжительность первой части — 1.5 часа.

Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет».

Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

Продолжительность второй части — 1.5 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «-0.25»
- * отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- * правильный ответ — «+1»
- * неправильный ответ — «-1»
- * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.
5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».
6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.
8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780—819 баллов	11
750—779 баллов	10
720—749 баллов	9
680—719 баллов	8
640—679 баллов	7
600—639 баллов	6
560—599 баллов	5
520—559 баллов	4
480—519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской экономической школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

- * напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
- * прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
- * разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
- * повысить общий математический уровень слушателей;
- * подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

- * **Углубленный курс для программы МАЭ: март — июль 2019 г.**

Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда, 3 ак. часа лекция, и пятница, 2 ак. часа семинар).

- * **Ускоренный курс для прикладных программ: апрель — июль 2019 г.**

В ускоренном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы по математическому анализу, линейной алгебре и теории вероятностей. Занятия 2 раза в неделю (вторник и четверг, 3 ак. часа лекция).

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. +7-495-956-9508 (доб. 103), email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись лекций на подготовительных курсах РЭШ по математике. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Приемная комиссия РЭШ

Телефоны: +7-495-956-9508 (доб. 144), +7-993-222-7993.

Email: abiturnes.ru.

Web: <http://www.nes.ru>.

Адрес: Российская экономическая школа, 121353, город Москва, Сколковское шоссе, 45