# Решения вступительного экзамена по математике для прикладных программ РЭШ 2018 г.

## 1 Тест

**1.** Предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{tg}\pi x}$ равен

A $0$

B $1$

C $e$

D $\pi$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

**2.** Пусть $X$ и $Y$ — случайные величины, $\mathbf{Var}(X) = 9$, $\mathbf{Var}(Y) = 4$ и $\mathbf{Var}(2X - Y) = 25$, где через $\mathbf{Var}(Z)$ обозначается дисперсия случайной величины $Z$. Тогда коэффициент корреляции между $X$ и $Y$ равен (укажите ближайшее число)

A 0.625

B 0.483

C 0.345

D 0.296

E −0.564

**3.** Первообразной функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой является функция

A $F(x) = \begin{cases} e^x, & x \geqslant 0,\\ e^{-x}, & x < 0\end{cases}$

B $F(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \geqslant 0,\\ -e^{-x} + 3, & x < 0\end{cases}$

C $F(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \geqslant 0,\\ -e^{-x} - 1, & x < 0\end{cases}$

D $F(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \geqslant 0,\\ e^{-x} - 1, & x < 0\end{cases}$

E	первообразной на всей числовой прямой не существует

**4.** Система линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - \qquad\quad z = 2 \\ x + \ \ y + (\alpha - 4)z = 0 \\ \qquad \alpha y + \qquad \alpha z = 4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений

A	ни при каких $\alpha \in \boldsymbol{R}$

B	только при $\alpha = 0$

C	только при $\alpha = 2$

D	только при $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$

E	при всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$

**5.** Дана система векторов

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III, IV) истинные?

I. Любая подсистема системы $X$, состоящая из одного вектора, линейно зависимая.

II. Любая подсистема системы $X$, состоящая из двух векторов, линейно зависимая.

III. Любая подсистема системы $X$, состоящая из трёх векторов, линейно зависимая.

IV. Система $X$ линейно зависимая.

A	ни одно из утверждений I, II, III, IV

B	только IV

C	только III и IV

D	только II, III и IV

E	все утверждения I, II, III и IV

**6.** Определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен

A	0

B	12

C $-12$

D $14$

E $-14$

**7.** Матрица $A$ — симметричная квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Выберите *ложное* утверждение

A если матрица $A$ отрицательно определена, то матрица $A^2$ положительно определена

B если матрица $A$ отрицательно полуопределена, то матрица $A^2$ положительно полуопределена

C если матрица $A$ знакопеременная, то матрица $A^2$ положительно полуопределена

D если матрица $A$ положительно полуопределена, то матрица $A^2$ положительно полуопределена

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

**8.** Матрица

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

A симметричная

B кососимметричная

C треугольная

D ортогональная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

**9.** Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sin x)(\cos^2 x+1)-\frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x}$ равен

A $1$

B $2$

C $-1/2$

D $-1$

E равно другому числу либо не существует

**10.** Случайные величины $X$ и $Y$ имеют совместную плотность распределения

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot x^{\alpha} y^{\alpha}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $c$ — некоторая положительная константа. Тогда ковариация $\mathbf{cov}(X,Y)$ случайных величин $X$ и $Y$ положительна, если

A $\alpha = 0$

B $\alpha = 1$

C $\alpha = 2$

D $\alpha = 3$

E $\alpha$ равно числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо такого $\alpha$ не существует

**11.** Станок производит детали, 90% имеют хорошее качество, 5% — удовлетворительное, 5% — неудовлетворительное. Каждая деталь подвергается проверке. Все хорошие детали успешно проходят проверку. Половина удовлетворительных деталей успешно проходят проверку, половина отбраковывается. Все неудовлетворительные детали отбраковываются. Чему равна вероятность того, что деталь, прошедшая проверку, имеет хорошее качество (укажите ближайшее число)?

A 0.98

B 0.96

C 0.94

D 0.92

E 0.90

**12.** На грани тетраэдра (правильная треугольная пирамида) нанесены цифры 1, 2, 3, 4. Тетраэдр подбрасывается два раза. Обозначим через $X_1, X_2$ число очков на грани, которой тетраэдр упал на стол при первом и втором подбрасывании, соответственно. Пусть $M$ — максимальное из чисел $X_1, X_2$. Предполагается, что подбрасывания независимы. Тогда математическое ожидание $\mathbf{E}(M)$ равно

A 23/8

B 25/8

C 13/4

D 15/4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

**13.** Случайная величина $X$ нормально распределена со средним 5 и стандартным отклонением 3. Тогда математическое ожидание $\mathbf{E}(X(2X + 3))$ равно

A 65

B 43

C 83

D 59

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

**14.** Предел $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \log_2\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$ равен

A $0$

B $1$

C $\ln 2$

D $\log_2 e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

**15.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & \text{при } x > 0, \\ a + bx, & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}$$

($a$, $b$ — константы). Тогда функция $f(x)$ дифференцируема на $\boldsymbol{R}$, если

A $a = 1, b = -1/2$

B $a = 1, b = -1$

C $a = 0, b = -1$

D $a = 0, b = 2$

E Ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D не обеспечивает дифференцируемости функции $f(x)$

**16.** При тестировании нулевой гипотезы $\mathrm{H}_0$ против альтернативы $\mathrm{H}_1$ нулевая гипотеза отвергнута на 5%-ном уровне значимости. Тогда

A мощность теста не ниже 90%

B вероятность нулевой гипотезы $\mathrm{H}_0$ не выше 5%

C вероятность альтернативной гипотезы $\mathrm{H}_1$ не ниже 90%

D нулевая гипотеза $\mathrm{H}_0$ отвергается на 2%-ном уровне значимости

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

**17.** Пусть $A$ и $B$ — случайные события, $\mathbf{P}(A) = 0.6$, $\mathbf{P}(B) = 0.4$, $\mathbf{P}(A \mid B) = 0.5$. Тогда вероятность $\mathbf{P}(A \cup B)$ равна

A 0.75

B 0.80

C 0.70

D 0.90

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

**18.** Функция $f(x)$ задана на $[0, +\infty)$ и дифференцируема на $(0, +\infty)$. Тогда

A если $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ существует

B если предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ существует, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

C если график $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = ax+b$, $a \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$

D если $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$, то график $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = ax + b$, $a \neq 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

**19.** Предел $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x}{\sin 2x}$ равен

A $-2$

B $2$

C $1/2$

D $-1/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

**20.** Пусть $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$. Тогда

A функция $f(x)$ две точки локального максимума

B функция $f(x)$ достигает наименьшего значения

C значение функции $f(x)$ в одной из точек локального минимума равно $3\big/\sqrt[3]{4}$

D график функции $f(x)$ имеет точку перегиба при $x = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

**21.** Определённый интеграл $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ равен

A $0$

B $1$

C $1/e$

D $e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

**22.** Определённый интеграл $\displaystyle\int_0^1 24x^2(1-x)dx$ равен

A $0$

B $1$

C $2$

D 3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

**23.** Площадь области, заданной неравенствами $y \leqslant x$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant 2 - x^2$, равна

A $1/2$

B $5/3$

C $4\sqrt{2}/3$

D $(8\sqrt{2} - 7)/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

**24.** Неопределённый интеграл $\int \frac{x^2+1}{x+1} dx$ равен

A $\frac{x^3/3 + x}{x+1} + C$

B $\frac{(x+1)^2}{2} - 2x + 2\ln|1+x| + C$

C $\frac{x^3+1}{(x+1)^2} + C$

D $x^2/2 - x + C$

E функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

**25.** Неопределённый интеграл $\int x \sin x^2 \, dx$ равен

A $-\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

B $\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

C $\sin \frac{x^2}{2} + C$

D $-\cos \frac{x^2}{2} + C$

E функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

# 2 Решения теста

**1.** Так как $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{tg} \pi x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{tg}\pi x} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$. Ответ B.

**2.** Так как $\mathbf{Var}(2X - Y) = 4\,\mathbf{Var}(X) - 4\,\mathbf{cov}(X,Y) + \mathbf{Var}(Y) = 25$, то $\mathbf{cov}(X,Y) = 15/4$ и коэффициент корреляции есть $\rho(X,Y) = \frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{Var}(X)\,\mathbf{Var}(Y)}} = \frac{5}{8} = 0.625$. Ответ A.

**3.** В ответе A при $x < 0$ производная $F'(x) = -e^{-x} \neq f(x) = e^{-x}$. В ответах C, D функция $F(x)$ разрывна в точке $x = 0$ и, значит, не дифференцируема в этой точке. В ответе B производная $F'(x) = e^{x} = f(x)$ при $x > 0$ и $F'(x) = e^{-x} = f(x)$ при $x < 0$. Найдём $F'(0)$. По определению $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-2}{x}$. Если $x < 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{x} = $ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-x+o(x))}{x} = 1$. Если $x > 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x} = 1$ (один из замечательных пределов). Значит $F'(0) = 1 = f(0)$. Ответ B.

**4.** Матрица системы равна $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha-4 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$. Её определитель равен $\alpha(2-\alpha)$, он равен нулю только при $\alpha = 0$ или $\alpha = 2$. В остальных случаях по теореме Крамера решение существует и единственное. При $\alpha = 0$ последнее уравнение превращается в $0 = 4$, и значит решений нет. При $\alpha = 2$ нетрудно убедиться, что множество решений и правда бесконечное. Ответ C.

**5.** Если начать с утверждения IV и преобразовать матрицу методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то окажется, что ранг всей системы векторов равен 4, то есть она линейно независимая. Следовательно, любая её подсистема линейно независимая. Ответ A.

**6.** Разложив определитель по третьему столбцу, получим

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -(-1-4-2-(-1+2+4)) = 12.$$

Ответ B.

**7.** Так как собственные числа $A^2$ равны квадратам собственных чисел матрицы $A$, то $A^2$ всегда положительно полуопределена. В то же время если матрица $A$ отрицательно определена, то она невырожденная, и значит $A^2$ положительно определена. Все утверждения A, B, C, D истинные, значит ложное утверждение E.

**8.** Нетрудно проверить, что

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть матрица ортогональная. Ответ D.

**9.** Так как $\lim\limits_{x\to 0} \left((1-\sin x)(\cos^2 x + 1) - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 2$ и $\lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x = 1$, то искомый предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)(\cos^2 x + 1) - \frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x} = 2.$$

Ответ B.

**10.** Функция $f(x, y)$ является плотностью распределения при $\alpha > -1$. Из условия нормировки следует, что $C = (\alpha+1)^2$. Поэтому $f(x, y) = h(x) \cdot h(y)$, где $h(x) = (\alpha+1)x^\alpha$ при $x \in [0, 1]$ и $h(x) = 0$ при $x \notin [0, 1]$, и $h(x)$ — маржинальная плотность $X$, а $h(y)$ — маржинальная плотность $Y$. Значит, при любом $\alpha > -1$ случайные величины $X$, $Y$ независимы, следовательно, $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$. Ответ E.

**11.** Введём события:

$$G = \{\text{деталь хорошая}\},$$
$$S = \{\text{деталь удовлетворительная}\},$$
$$B = \{\text{деталь плохая}\},$$
$$A = \{\text{деталь прошла проверку}\}.$$

Тогда $\mathbf{P}(G) = 0.9$, $\mathbf{P}(S) = 0.05$, $\mathbf{P}(B) = 0.05$, $\mathbf{P}(A \mid G) = 1$, $\mathbf{P}(A \mid S) = 0.5$, $\mathbf{P}(A \mid B) = 0$. По формуле Байеса получаем:

$$\mathbf{P}(G \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \mid G)\,\mathbf{P}(G)}{\mathbf{P}(A \mid G)\,\mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(A \mid S)\,\mathbf{P}(S) + \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B)} = 0.973.$$

Ответ A.

**12.** В силу независимости $X_1, X_2$ имеем:

$$\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \mathbf{P}(X_1 = i)\,\mathbf{P}(X_2 = j) = 1/16, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Обозначим $M = \max X_1, X_2$. Простым перебором получаем: $\mathbf{P}(M = 1) = 1/16$, $\mathbf{P}(M = 2) = 3/16$, $\mathbf{P}(M = 3) = 5/16$, $P(M = 4) = 7/16$, и $\mathbf{E}(M) = 1 \cdot (1/16) + 2 \cdot (3/16) + 3 \cdot (5/16) + 4 \cdot (7/16) = 25/8$. Ответ B.

**13.** Имеем: $\mathbf{E}(X) = 5$, $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 9$. Поэтому $\mathbf{E}(X^2) = 34$. Значит, $\mathbf{E}(X(2X + 3)) = 2\,\mathbf{E}(X^2) + 3\,\mathbf{E}(X) = 83$. Ответ C.

**14.** Известно, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$, $a > 0$ (один из замечательных пределов). Обозначим $x = \dfrac{1}{2^n}$, ясно, что $x \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \log_2\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2(1 + x)}{x} = \log_2 e$. Ответ D.

**15.** Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}, & x > 0, \\ a + bx, & x \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Чтобы функция (1) была дифференцируема на $\boldsymbol{R}$, требуется, чтобы в каждой точке $x \in \boldsymbol{R}$ существовал предел

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}. \tag{2}$$

Рассмотрим эту функцию сначала при $x < 0$ и $x > 0$. Функция $a + bx$ определена и дифференцируема всюду на $\boldsymbol{R}$, поэтому при $x < 0$ для функции (1) предел (2) существует. Функция $\dfrac{\ln(1 + x)}{x}$ определена, непрерывна и дифференцируема при $x > -1$, $x \neq 0$, поэтому при $x > 0$ для функции (1) предел (2) также существует. Поэтому все, что требуется – это найти такие значения $a$ и $b$, для которых функция (1) непрерывна и дифференцируема в точке $x = 0$.

Отметим, что $f(0) = a$, поэтому для непрерывности функции $f(x)$ требуется, чтобы предел $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = a$. Поскольку мы не можем положить $x = 0$, вычислим этот предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln(1+x))'}{x'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{(1+x)}}{1} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Следовательно, равенство $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = a$ возможно только при $a = 1$.

Чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема при $x = 0$, нужно, чтобы $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{\ln(1+x)}{x} - f(0)}{x}$ существовал и был равен $b$. Найдем этот предел (сразу подставим $f(0) = 1$), опять-таки воспользовавшись правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln(1+x) - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1 - (1+x)}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x}{2x(1+x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, равенство $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = b$ возможно только при $b = -1/2$. Ответ A.

**16.** Утверждение A ложное, поскольку тесты с одним и тем же уровнем значимости могут иметь разные мощности. Гипотеза есть утверждение о генеральной совокупности и, следовательно, гипотеза не является случайным событием, поэтому нет смысла говорить о её вероятности. Значит, утверждения B, C ложные. Поскольку нулевая гипотеза отвергнута на 5%–ном уровне, $P$–значение теста меньше 0.05. Но оно может быть больше 0.02, а в этом случае нулевая гипотеза на 2%–ном уровне не отвергается. Значит, утверждение D ложное. Ответ E.

**17.** По определению $\mathbf{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$. Отсюда $\mathbf{P}(A \cap B) = 0.2$. По свойству аддитивности вероятности получаем: $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A \cap B) = 0.80$. Ответ B.

**18.** A и D — неверно: если $f(x) = \sin\sqrt{x} + ax$ ($a = 0$ для A и $a \neq 0$ для D), то $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = a$, но $f(x) - ax$ колеблется между $-1$ и 1 и не имеет предела при $x \to +\infty$. B и C — неверно: если $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x} + ax$ ($a = 0$ для B и $a \neq 0$ для C), то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = 0$, но $f'(x)$ не имеет предела при $x \to +\infty$. Ответ E.

**19.** Применяем правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\cos x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{-\sin x}{2\cos 2x} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. Ответ C.

**20.** Вычислим производную функции $f(x)$: $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$. При $x < 0$ производная $f'(x) < 0$ — нет локальных экстремумов. При росте $x$ от $-\infty$ до 0 функция $f(x)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$, так что $f(x)$ не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значения. Если $x > 0$, то $f'(x) < 0$ при $x < 2^{-1/3}$ и $f'(x) < 0$ при $x > 2^{-1/3}$, так что в точке $x = 2^{-1/3}$ функция $f(x)$ имеет локальный минимум, равный $3\big/\sqrt[3]{4}$. Ответ C.

**21.** Данный интеграл Римана не существует, так как функция $\ln x$ неограничена на промежутке $(0, 1]$. Ответ E.

**22.** $\displaystyle\int_0^1 24x^2(1-x)dx = \int_0^1 (24x^2 - 24x^3)dx = (8x^3 - 6x^4)\Big|_0^1 = 2$. Ответ C.

**23.** Область, заданная неравенствами $y \leqslant x, y \geqslant 0, y \leqslant 2 - x^2$ — «криволинейный треугольник», ограниченный снизу отрезком $[0, \sqrt{2}]$ оси $OX$, а сверху отрезком прямой $y = x$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$ и дугой параболы $y = 2 - x^2$ для $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Поэтому ее площадь равна интегралу

$$S = \int_0^1 x\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{x^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} - 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8\sqrt{2} - 7}{6}.$$

Ответ D.

**24.** Представим интеграл в следующем виде:

$$\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx = \int \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right) dx.$$

Далее получаем

$$\int \left(x - 1 + \frac{2}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x+1| + C.$$

Легко видеть, что это выражение отличается от выражения, приведенного в ответе B, только слагаемым $1/2$, которое можно включить в константу $C$. Ответ B.

**25.** Сделав замену $t = x^2$, интеграл можно привести к виду

$$\int x \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$$

Ответ A.