Современная экономическая наука и образование в России

РЭШ
Российская экономическая школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ПРОГРАММУ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» В РЭШ В 2017 ГОДУ

Москва 2017

Бремзен А. С., Головань С. В., Катышев П. К., Тонис А. С., Шибанов О. К.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в Российскую экономическую школу в 2017 году. — М., 2017 — 86 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ на программу «Магистр экономики» в 2017 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене на программу «Магистр экономики».

Содержание и форма экзамена в течение ряда лет оставались неизменными.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена по математике.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2014—2016 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

   Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. **Предел последовательности**

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. **Предел функции. Непрерывность функций (отображений)**

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. **Числовые функции одного (числового) аргумента**

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. **Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$**

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. **Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbf{R}^n$)**

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbf{R}^n$**

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. Определенный интеграл

Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. Числовые и функциональные ряды

Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. Степенные ряды

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М., Наука, 1984.

5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1987.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1989.

7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

8. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Наука, 1982.

9. Рудин У., *Основы математического анализа*. М., Мир, 1976.

10. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М., Наука, 1979.

11. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

12. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

13. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**
   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк.

Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. Векторные пространства

Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. Системы линейных (алгебраических) уравнений

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. Линейные операторы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

   Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

   Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

   Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

   Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. **Евклидовы пространства**

   Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

   Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

   Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**
   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 *Литература*

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1974.

5. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. М., Наука, 1966.

6. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.

7. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., Наука, 1970.

8. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1984.

10. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.

11. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., Наука, 1963.

12. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

13. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., Наука, 1980.

14. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

15. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М., Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2014 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

- правильный ответ — «+1»
- неправильный ответ — «-0.25»
- отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- правильный ответ — «+1»
- неправильный ответ — «-1»
- отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$.

II. Если $f(x)$ имеет разрыв первого рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

III. Если $f(x)$ имеет разрыв второго рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

A только I

B только I и II

C — только I и III

D — только II и III

E — I, II и III

2. Пусть A — счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A — множество внутренних точек A счетное

B — множество граничных точек A счетное

C — множество внешних точек A не более, чем счетное

D — множество внешних точек A имеет мощность континуума

E — все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — подмножества вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A — если среди множеств A_n есть хотя бы одно открытое, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

B — если среди множеств A_n есть хотя бы одно замкнутое, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

C — если все множества A_n открытые, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

D — если все множества A_n замкнутые, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

E — все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Пусть A и B — непустые ограниченные подмножества $\mathbf{R}$. Обозначим через $A - B$ множество $\{x - y \colon x \in A, y \in B\}$, а через $\sup X$ и $\inf X$ — точную верхнюю и точную нижнюю грань множества X соответственно. Найдите *ложное* утверждение

A — если $\sup A > \sup B$, то $\sup(A - B) > 0$

B — если $\sup A < \sup B$, то $\sup(A - B) < 0$

C — если $\sup A > \inf B$, то $\sup(A - B) > 0$

D — если $\sup A < \inf B$, то $\sup(A - B) < 0$

E — среди утверждений A, B, C, D есть ложное

5. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — две системы векторов в $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$, а L_X и L_Y — их линейные оболочки соответственно. Тогда

A — если сумма $L_X + L_Y$ прямая, то системы X и Y линейно независимые

B — если системы X и Y линейно независимые, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

C если объединенная система $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ линейно независимая, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

D если объединенная система $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ линейно зависимая, то сумма $L_X + L_Y$ не прямая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$, где $n, m \geqslant 2$, x — столбец длины n, y и b — столбцы длины m. Через A^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Тогда

A система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $BAx = Bb$

B система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $A^TAx = A^Tb$

C система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $ABy = b$

D система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $AA^Ty = b$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — ортогональные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $\det A = 1$, $\det B = -1$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ ортогональная

B при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ невырожденная

C существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ задает оператор проектирования

D существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ вырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, где $n, m \geqslant 2$. Обозначим через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Im} \mathbf{A} + \operatorname{Im} \mathbf{B}$

B $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \supset \operatorname{Im} \mathbf{A} \cap \operatorname{Im} \mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker} \mathbf{A} \cap \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker} \mathbf{A} + \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$, для которой выполнено равенство $A^2 + 2A = 0$. Тогда

A матрица A вырожденная

B у матрицы A существует положительное собственное число

C у матрицы A существует отрицательное собственное число

D матрица $-A$ задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть A и B — симметричные положительно определенные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A \neq B$ и $\det A = \det B$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Обозначим также через x^T транспонированный столбец x. Тогда

A множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ пустое

B множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ непустое ограниченное

C множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ неограниченное, не совпадающее с $\mathbf{R}^n$

D множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T(A - B)x = 1\}$ — все пространство $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Определим в $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение и обозначим через A^T матрицу, транспонированную к A. Тогда

A если A^TA задает ортопроектор в стандартном базисе, то A тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

B если A задает ортопроектор в стандартном базисе, то A^TA тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

C если A^TA задает проектор в стандартном базисе, то A тоже задает проектор в стандартном базисе

D если A задает проектор в стандартном базисе, то A^TA тоже задает проектор в стандартном базисе

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A — симметричная матрица порядка $n \geqslant 2$. Известно, что для любого столбца $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется равенство $x^TAx = 0$ (здесь через x^T обозначена строка, транспонированная к x). Тогда

A матрица A невырожденная

B матрица A ортогональная

C матрица A задает ортопроектор в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении

D матрица A задает проектор, но не ортопроектор, в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = (y^2+1)x$, $y(0) = 0$. Тогда значение $y(\pi)$ равно

A 0

B 1

C $\operatorname{arctg}\sqrt{\pi}$

D $\operatorname{tg}\dfrac{\pi^2}{2}$

E другому числу или не определено

14. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2}$, $y(1) = 1$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

15. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех вещественных чисел, причем функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ непрерывны в каждой точке. Тогда

A функция $f(g(f(x)))$ непрерывна в каждой точке

B функция $g(f(g(x)))$ дифференцируема в каждой точке

C функция $f^2(x) + g^2(x)$ непрерывна в каждой точке

D функция $f(g(f(g(x))))$ непрерывна в каждой точке

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-1, 1)$. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1,1)$, то и функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

B если существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наименьшего, либо наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1,1)$, то существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$

D если существуют конечные предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ и предел справа $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x,y) = \sin^4(\pi xy) + \cos^4(\pi xy)$ на множестве $\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

18. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках. Тогда

A множество точек, в которых $f(x)$ достигает наименьшего значения, содержит изолированные точки

B функция $f^3(x) - f^2(x) + 5f(x) - 14$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках

C на отрезке $[0,1]$ содержится не менее пяти точек, в которых производная $f'(x)$ существует и равна нулю

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Числовая функция $f(x)$ определена в окрестности точки 0 на вещественной прямой. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то она непрерывна и в некоторой окрестности точки 0

B если функция $f(x)$ дифференцируема в точке 0, то она дифференцируема и в некоторой окрестности точки 0

C если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то функция $g(x, y) = f(xy)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

D если функция $f^2(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $f^3(x)$ непрерывна в точке 0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{1/x} - x^2 - x - \alpha)$ при $\alpha > 0$

A равен 0

B равен $1 - \alpha$

C равен $-\alpha$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{672} - 2\cos(x^{1007}) - \sin(x^{672}) + 2}{x^{2014}}$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

22. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - (\cos x)^{\ln(x+1)}}{x^4}$

A равен 0

B равен 5

C равен 10

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{k^2+1}$

A равен 1

B равен 2

C	равен $\ln 2$

D	равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E	не существует

24. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

A	равен 0

B	равен 1

C	равен $1/e$

D	равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E	не существует

25. Сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

равна

A	$3/2$

B	$3\ln(2)$

C	$2\ln(3)$

D	числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E	не существует

26. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2014}{2^n}$$

равна

A	-2012

B	-2011

C	-2010

D	-2009

E	-2008

27. Сумма ряда

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+3}$$

равна

A 1/4

B 1/2

C 3/4

D 1

E 3/2

28. Точка A движется по прямой $4x = 3y$ с постоянной скоростью 5 м/сек, точка B движется по прямой $5x = 12y$ с постоянной скоростью 13 м/сек. Обе точки движутся в направлении увеличения координат. В начальный момент точка A имеет координаты $(6\,\text{м}, 8\,\text{м})$, точка B в начальный момент находится в начале координат. Через сколько секунд после начала движения расстояние между точками A и B будет наименьшим?

A через 11/13 секунды

B через 31/41 секунды

C через 23/25 секунды

D через 12/17 секунды

E через число секунд, отличное от указанных в A, B, C, D

29. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два числовых ряда. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если оба ряда сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

II. Если оба ряда абсолютно сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

III. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ абсолютно сходится.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

30. Числовая функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является ограниченным множеством

B если функция $f(x)$ не ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является неограниченным множеством

C если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ компактно, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является компактным множеством

D если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не является открытым, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ не является открытым множеством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. К графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ проведена касательная в точке $\left(a, \dfrac{1}{a^2}\right)$, $a > 0$. Пусть $S(a)$ — площадь треугольника, образованного отрезком касательной между осями координат и отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат. Тогда производная $S'(3)$ равна

A $-1/4$

B $3/2$

C $-2/3$

D $1/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

32. Пусть

$$f(x) = \int_1^{2x} \sqrt{1+t^2}\, dt, \; x \in \mathbf{R}.$$

Через $f^{-1}(x)$ обозначим функцию, обратную к $f(x)$. Тогда

A $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

B $(f^{-1})'(0) = 2\sqrt{2}$

C $(f^{-1})'(0) = 2$

D $(f^{-1})'(0) = 0$

E производная $(f^{-1})'(0)$ равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует.

33. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^2 + y^3 - 6y^2 + 9y = 8$. Через точку $(2, 1)$ проведена касательная к этой кривой. Тогда

A касательная пересекает ось Oy в точке $(0, 5)$

B касательная пересекает ось Oy в точке $(0, -5)$

C касательная пересекает ось Oy в точке $(0, 3)$

D касательная не пересекает ось Oy

E в точке $(2, 1)$ не существует касательной к этой кривой

34. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и $c \leqslant f(x) \leqslant d$ при любом $x \in [a, b]$, а функция $g(x)$ задана на отрезке $[c, d]$. Найдите *ложное* утверждение

A если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и функция $g(x)$ непрерывна на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

B если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и функция $g(x)$ интегрируема на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

C если функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$ и функция $g(x)$ возрастает на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

D если функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$ и функция $g(x)$ убывает на $[c, d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

35. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 1}$ при $n \geqslant 1$. Тогда

A существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена

B существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится

C существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не убывает

D существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не возрастает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ равен

A -1

B 0

C 1

D e

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

37. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(1/x)(1-\cos x)}{x}$ равен

A 0

B 1

C $1/e$

D e

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{n}(x-4)^n$ равна

A $(4-1/e, 4+1/e)$

B $(4-1/e, 4+1/e]$

C $[4-1/e, 4+1/e)$

D $[4-1/e, 4+1/e]$

E множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

39. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\pi\prod\limits_{k=2}^{n}(1-1/k)\right)^n$ равен

A 0

B 1

C π^e

D e^π

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

40. Интеграл $\int_0^{2x} |t-x| dt$ при $x \geqslant 0$ равен

A 0

B 1

C x

D x^2

E выражению, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2.1.2 Вторая часть теста

1. Матрица P задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^4$, и два вектора

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

являются ее собственными векторами. Известно, что ранг матрицы P равен двум, и матрица $2P - I$, где через I обозначается единичная матрица, ортогональная. Тогда

а) матрица P симметричная;

Да Нет

б) матрица P не симметричная;

Да Нет

в) существует ровно две матрицы P, удовлетворяющие поставленным условиям;

Да Нет

г) существует ровно шесть матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

д) существует бесконечно много матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

е) сумма элементов матрицы P равна 2;

Да Нет

ж) матрица P имеет ровно шесть положительных элементов;

Да Нет

з) матрица P имеет ровно шесть отрицательных элементов.

Да Нет

2. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n + x|^{\alpha}},$$

где $\alpha \geqslant 0$ — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости, а через $f(x)$ — сумму этого ряда для всех $x \in M$. Тогда а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является открытым;

Да Нет

в) существует α, для которого множество M содержит изолированную точку;

Да Нет

г) для любого α ряд на множестве M сходится равномерно;

Да Нет

д) при $\alpha = 2$ множество M является замкнутым;

Да Нет

е) при $\alpha = 3$ ряд на множестве $M \cap [1, +\infty)$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет более 2014 решений на множестве M;

Да Нет

з) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет не более одного решения на множестве M.

Да Нет

3. Дано семейство функций $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - a} - 3}{x - b}$, где параметры $a, b \in \mathbf{R}$. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}^2$ множество пар чисел (a, b), для которых существует и конечен предел $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, а через $K \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $f(x)$. Тогда

а) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K симметрично относительно нуля;

Да Нет

б) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K не симметрично относительно нуля;

Да Нет

в) существует более одной пары чисел (a, b), для которых множество $\mathbf{R} \setminus K$ не замкнуто и не открыто;

Да Нет

г) существует пара чисел (a, b), для которой функция $f(x)$ ограничена на K;

Да Нет

д) множество $M \cap (-\infty, 0)^2$ не ограничено;

Да Нет

е) множество $M \cap (0, +\infty)^2$ не ограничено;

Да Нет

ж) множество значений предела $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ при $(a, b) \in M \cap (0, +\infty)^2$ ограничено;

Да Нет

з) множество значений предела $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ при $(a, b) \in M \cap \{(a, b)\colon a^2 + b^2 \leqslant 9\}$ имеет непустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2 e^{-t}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) при любом значении x_0 функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) множество значений x_0, при которых $x(t)$ ограничена на своей области определения, открыто;

Да Нет

в) существуют значения x_0, при которых $x(t)$ периодическая;

Да Нет

г) при любом x_0 множество нулей функции $x(t)$ открыто;

Да Нет

д) если в некоторой точке t значение второй производной функции $x(t)$ равно нулю, то и значение самой функции в этой точке равно нулю;

Да Нет

е) если $x_0 = 2/3$, то $\sin x(t)$ возрастает на своей области определения;

Да Нет

ж) если $x_0 = 2$, то $x(1) = \dfrac{2e}{2-e}$;

Да Нет

з) если $x_0 = -1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -1/2$.

Да Нет

5. Дана функция $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon xy+yz+xz = 1\}$. Тогда

а) множество M компактное;

Да Нет

б) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

в) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

г) число точек локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M не меньше трех;

Да Нет

д) точка $(1, 1, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

е) число точек локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M нечетно;

Да Нет

ж) точка $\left(0, 2, \dfrac{1}{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. B. **2.** E. **3.** E. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** D. **8.** A. **9.** E. **10.** C. **11.** B. **12.** C. **13.** E. **14.** A. **15.** D. **16.** E. **17.** D. **18.** B. **19.** C. **20.** D. **21.** B. **22.** E. **23.** D. **24.** A. **25.** E. **26.** A. **27.** C. **28.** B. **29.** D. **30.** E. **31.** A. **32.** A. **33.** D. **34.** B. **35.** C. **36.** C. **37.** A. **38.** C. **39.** D. **40.** D.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Возведем в квадрат матрицу $2P - I$ и преобразуем полученное выражение, воспользовавшись соотношением $P^2 = P$, справедливым для проектора P:

$$(2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I.$$

По условию известно, что $(2P - I)(2P - I)^T = I$ (так как матрица $2P - I$ ортогональная), поэтому $(2P - I)^T = 2P - I$, а значит и $P^T = P$ (ответы на вопросы а) — да, б) — нет).

Так как P задает проектор в $\mathbf{R}^4$ и имеет ранг 2, то она имеет два собственных числа — единицу и ноль, оба кратности 2. Так как матрица P симметричная, то она задает ортопроектор, и собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны друг другу (при стандартном скалярном произведении). И так как собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

не ортогональны, то они соответствуют одному собственному числу, обозначим его через λ. Это может быть как единица, так и ноль. В первом случае P задает ортопроектор на двумерное подпространство — *линейную оболочку*

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

во втором случае P задает ортопроектор на ортогональное дополнение к L. Ответы на вопросы в) — да, г) — нет, д) — нет.

Далее, заметим, что вектор

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ортогонален обоим из заданных векторов. Поэтому это тоже собственный вектор, и он соответствует другому собственному числу $1-\lambda$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_{ij} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} P \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} &= \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} P \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \left(\lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ 1-\lambda\\ 1-\lambda\end{pmatrix} = 2\lambda + 2(1-\lambda) = 2
\end{aligned}
$$

(ответ на вопрос e) — да).

Чтобы сосчитать число положительных и отрицательных элементов матрицы P, найдем ее. А именно, воспользуемся соотношением

$$
P = X \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} X^{-1},
$$

где столбцы матрицы X являются соответствующими собственными векторами матрицы P. Можно заметить, что если векторы

$$
\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}
$$

являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу λ, то векторы

$$
\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}
$$

ортогональны им, а значит являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу $1-\lambda$. Также ортогонализуем исходную пару векторов (вычтем первый вектор из второго) и получим:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Нормируем эти четыре вектора и получим ортонормированную систему состоящую из собственных векторов матрицы P:

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix},$$

и матрицу

$$X = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2\end{pmatrix},$$

для которой $X^{-1} = X^{T}$. Теперь легко сосчитать для $\lambda = 1$

$$P = X\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}X^{T} = \begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix},$$

и в ней ровно 6 отрицательных и 10 положительных элементов. Для $\lambda = 0$

$$P = I - \begin{pmatrix}3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4\\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4\\ -1/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4\\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix},$$

и в ней тоже ровно 6 отрицательных и 10 положительных элементов (ответы на вопросы ж) — нет, з) — да).

Задача 2. Данный ряд имеет счётное число особенностей — он не определён в точках $x = -1, -2, -3, \ldots$. Кроме того, ряд не определён в точках, в которых $x(x-1) < 0$, т. е. на интервале $(0, 1)$, — на нём при достаточно большом значении n числитель не определён. Отметим, что для любого α ряд сходится в точках $x = 0$ и $x = 1$, и что все члены ряда неотрицательны.

а) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится в точках, сколь угодно близких к -1, поскольку при $n \geqslant 3$

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^4} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^4} = \frac{n}{|n+x|}\frac{x(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant 3\frac{x(x-1)}{|n-1|^3}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, и следовательно, сходится исходный ряд. В то же время в точке -1 ряд не определён, следовательно, множество сходимости не является замкнутым.

б) Ответ: нет. Поскольку точки 0 и 1 всегда являются точками сходимости ряда, а точки внутри интервала $(0, 1)$ таковыми не являются, то множество сходимости не является открытым.

в) Ответ: да. Например, для $\alpha = 1$ ряд сходится в точке $x = 0$, не определён при $x \in (0, 1)$ и не сходится в левой окрестности точки $x = 0$: при $x < 0$

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1 + x(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1 + x(x-1))}{n}.$$

Поскольку ряд из последних слагаемых не сходится, то и исходный ряд не сходится.

г) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится на множестве $M = [0, +\infty) \cup (-1, 0] \cup (-2, -1) \cup \cup (-3, -2) \cup \ldots$ (рассуждения такие же, как и в пункте а). В то же время для любого n

$$\lim_{x \to -n} \frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|} = +\infty,$$

откуда следует, что общий член ряда не стремится к нулю равномерно на M, а значит ряд не сходится равномерно на M.

д) Ответ: нет. Мы можем оценить при $x \in (-1, 0)$ и достаточно больших n

$$\ln(1 + nx(x-1)) \leqslant \ln(1 + 2n) \leqslant Cn^{1/2},$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Тогда

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^2} \leqslant \frac{Cn^{1/2}}{|n+x|^2} = \frac{n^{1/2}}{|n+x|^{1/2}}\frac{C}{|n+x|^{3/2}} \leqslant \frac{2C}{|n-1|^{3/2}}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, значит, сходится и исходный ряд. В то же время, в точке -1 ряд не определен, и значит, множество M не замкнутое.

е) Ответ: да. При $\alpha = 3$ и $x \geqslant 1$ общий член ряда можно оценить следующим образом:

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx^2}{(n+x)^3} \leqslant \frac{n}{(n+1)^3}$$

(последнее неравенство верно, так как функция $\dfrac{nx^2}{(n+x)^3}$ убывает при $x \geqslant 1$). Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исходный ряд сходится равномерно.

ж–з). Отметим, что по соображениям, аналогичным пункту а), данный ряд сходится на множестве $M = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n, -n+1)\right) \cup [1, +\infty)$.

Отметим также, что числитель дроби убывает по x при $x < 0$.

Рассмотрим поведение ряда в полуинтервале $x \in (-n, -n + 1/2]$, $n = 2, 3, \ldots$. На нём член ряда с номером n можно оценить как

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} \geqslant \frac{\ln(1 + n(-n+1/2)(-n-1/2))}{|1/2|^{2014}} = \\ = 2^{2014}\ln(1 + n(n^2 - 1/4)) \geqslant 2^{2014}.$$

В то же время на полуинтервале $x \in [-n + 1/2, -n + 1)$ член ряда с номером $n + 1$ можно оценить как

$$\frac{\ln(1 + (n+1)x(x-1))}{|n+x|^{2014}} \geqslant \frac{\ln(1 + (n+1)(-n+1)(-n))}{|1/2|^{2014}} = \\ = 2^{2014}\ln(1 + (n+1)(n^2 - n)) \geqslant 2^{2014}.$$

Поскольку все члены ряда неотрицательные и по крайней мере один из них превосходит 2014, то решений на интервалах $(-n, -n + 1)$, $n = 2, 3, \ldots$нет.

На множестве $x \in [1, \infty)$ решений нет, поскольку ряд можно оценить следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx(x-1)}{|n+x|^{2014}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|n+x|}\frac{x^2}{|n+x|^2}\frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Остаётся исследовать полуинтервал $(-1, 0]$. При приближении к левой его точке сумма ряда растёт неограниченно. В правой точке значение ряда равно 0. При этом каждый член ряда убывает по x в этом полуинтервале. Следовательно, у уравнения есть единственное решение именно в полуинтервале $(-1, 0]$.

Ответ на вопрос ж) — нет, на вопрос з) — да.

Задача 3. *Для последовательности пар чисел* $(a, b) = (n^2, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x \colon x^2 \geqslant n^2\}$ симметрично относительно нуля, поэтому а) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (0, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x \colon x \neq \neq n\}$ не симметрично относительно нуля, поэтому б) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (n^2, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $R \setminus K = (- -n, n]$ не замкнуто и не открыто, поэтому в) — да.

Для пары чисел $(a, b) = (1, 0)$, множество $K = \{x \colon x^2 \geqslant 1\}$, и $|f(x)| \leqslant |\sqrt{1 - x^{-2}}| + |3/x| < < 4$ на K, поэтому г) — да.

Если предел $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ конечен, то необходимо, чтобы $\lim\limits_{x \to b} \sqrt{x^2 - a} - 3 = 0$, т. е. $a = b^2 - 9$. Поэтому $M \cap (-\infty, 0)^2 \subset [-9, 0]^2$, д) — нет.

Если $a = b^2 - 9$, то предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует и равен $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a}} = b/3$, а $M = \{(a, b) \in R^2 \colon a = b^2 - 9\}$, поэтому е) — да, ж) — нет.

Парабола $a = b^2 - 9$ пересекает окружность $a^2 + b^2 = 9$ в четырех точках: $(0, 3)$, $(0, -3)$, $(-1, 2\sqrt{2})$ и $(-1, -2\sqrt{2})$. На множестве $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$ параметр b принимает значения $[-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3]$. Так как $e < 2.8 < 2\sqrt{2}$, то множество значений предела $\lim\limits_{x\to b} f(x) = b/3$, имеет пустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$, поэтому з) – нет (см. рис. 1).

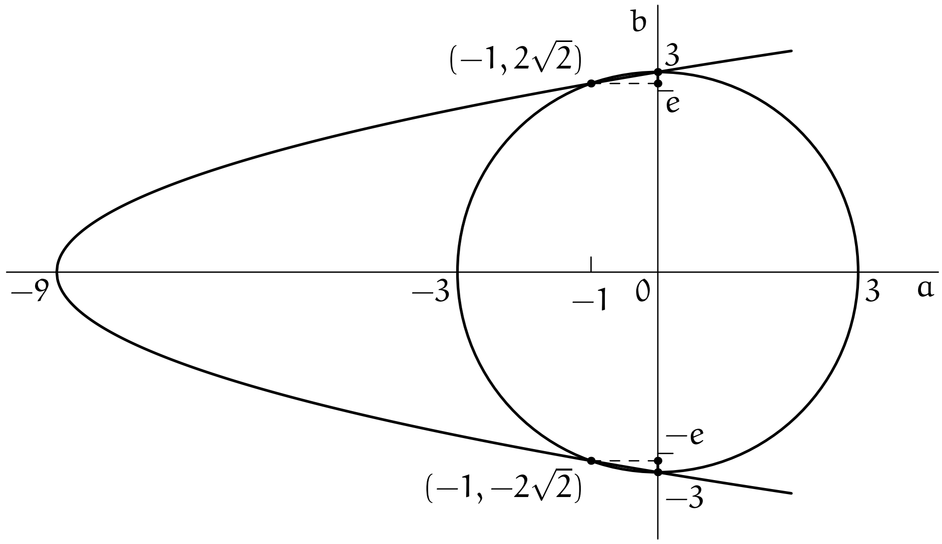

Рис. 1. Множество $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$

Задача 4. Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = e^{-t}dt,$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = -e^{-t},$$

так что при $x_0 \neq 0$

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t} + 1/x_0 - 1}.$$

Видно, что при $x_0 > 1$ знаменатель обращается в ноль при некотором t (ответ на вопрос а) — нет). Далее, при $x_0 = 0$ решение тождественно равно нулю (ответ на вопрос в) — да), а при любом отрицательном x_0 знаменатель обращается в 0 при некотором t_0 и при приближении к t_0 решение неограниченно растет по абсолютной величине (ответ на вопрос б) — нет). Функция $x(t)$ не обращается в ноль ни при каких t при $x_0 \neq 0$ (ответ на вопрос г) — да). Для ответа на вопрос д) заметим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}x^2e^{-t} = -x^2e^{-t} + 2xe^{-t}\frac{dx}{dt} = x^2e^{-t}\left(2xe^{-t} - 1\right),$$

что, например, при $x_0 = e/(e+1)$ обращается в ноль при $t = 1$, так что ответ — нет.

При $x_0 = 2/3$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} + 1/2)$ возрастает на всей прямой, принимая значения в интервале $(0, 2)$, однако функция $\sin x$ на этом интервале не возрастает монотонно (ответ на вопрос е) — нет). При $x_0 = 2$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 1/2)$ определено только при $t < \ln 2$ (ответ на вопрос ж) — нет). Наконец, при $x_0 = -1$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 2)$ определено при всех $t > 0$ и стремится к $-1/2$ при $t \to +\infty$ (ответ на вопрос з) — да).

Задача 5. Заметим, что точка $(n, 1/n, 0)$ принадлежит множеству M при любом натуральном n. Значит, множество M не ограничено, а значит и не является компактным. Ответ на вопрос а) — нет. Имеем $f(n, 1/n, 0) = n^2 + 1/n^2$, т. е. значения функции $f(x, y, x)$ на M не ограничены сверху. Поэтому ответ на вопрос б) — нет.

Так как $f(x, y, z) \geqslant 0$ при всех x, y, z, то существует точная нижняя грань $\inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\}$. Обозначим ее через a. Точка $(1, 1, 0)$ принадлежит M, и $f(1, 1, 0) = 2$, значит $a \leqslant 2$. Рассмотрим куб $K = \{(x, y, z)\colon |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2, |z| \leqslant 2\}$. Ясно, что если $(x, y, z) \notin K$, то $f(x, y, z) > 2$. Значит,

$$a = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\} = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M \cap K\}.$$

Множество M замкнуто как поверхность уровня непрерывной функции, а куб K компактен. Значит, множество $M \cap K$ компактно, и по теореме Вейерштрасса точная нижняя грань достигается, поскольку функция $f(x, y, z)$ непрерывна. Ответ на вопрос в) — да.

Обозначим $g(x, y, z) = xy + xz + yz - 1$. Нетрудно проверить, что градиент функции $g(x, y, z)$ равен нулю только в точке $(0, 0, 0)$, а она не принадлежит M. Поэтому функцию Лагранжа для этой задачи можно взять сразу в виде $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(y + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(x + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda(x + y) = 0. \end{cases}$$

Складывая почленно все уравнения, получаем $(x + y + z)(\lambda + 1) = 0$.

1-й случай: $x + y + z = 0$. Возводя в квадрат обе части равенства и проводя элементарные преобразования, получаем $xy + xz + yz = -\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \leqslant 0$, что несовместимо с ограничением $g(x, y, z) = 0$.

2-й случай: $\lambda = -1$. Вычитая из первого уравнения второе получаем $x = y$, и аналогично $y = z$. Следовательно, единственной стационарной точкой задачи является точка $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Поскольку существование наименьшего значения функции $f(x, y, z)$ на множестве M доказано, то точка A и есть единственная точка, в которой это наименьшее значение достигается.

Ответы на вопросы г), д), ж) — нет, на вопросы е), з) — да.

3 Вступительный экзамен 2015 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена для программы МЭРЭ 2.5 часа, для программы МАЭ 4 часа, максимальная оценка — «12».

Каждый тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, для абитуриентов программы МАЭ одинаково. Для абитуриентов программы МЭРЭ первая часть теста имела больший вес. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест 1 (общий для программ МАЭ и МЭРЭ)

3.1.1 Первая часть теста

1. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = (y+1)\cos 8x$, $y(0) = 0$. Тогда $y(x)$

A определена при $x = 1/4$, но не определена при $x = 1/2$

B определена при $x = 1/2$, но не определена при $x = 1$

C определена при $x = 1$, но не определена при $x = 2$

D определена при $x = 2$, но не определена при $x = 4$

E   определена при $x = 4$

2. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^2 \sin x$, $y(0) = 1$ на своей области определения

A   не имеет нулей

B   имеет ровно один ноль

C   имеет ровно два нуля

D   имеет ровно четыре нуля

E   имеет более четырех нулей

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки 0, причем $f(0) = g(0) = 0$. Тогда

A   функция $f(g(x))$ определена в некоторой окрестности точки 0, причем $f(g(0)) = 0$

B   если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ непрерывна в точке 0

C   если функция $f(x)$ разрывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ разрывна в точке 0

D   если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке 0, то и функция $\operatorname{arctg}(f^2(x) + g^2(x))$ непрерывна в точке 0.

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной прямой. Тогда

A   если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{tg} f(x)$ достигает наибольшего значения

B   если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{arctg} f(x)$ достигает наибольшего значения

C   если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D   если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения.

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Функция $f(x, y) = \operatorname{tg}(\pi x y/2)$ на множестве $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

6. Функция $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + 4xy + 4y^2 = 2\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

7. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках, не совпадающих ни с 0, ни с 1. Тогда

A функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее, чем в трех точках

B функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения не менее, чем в двух точках

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$, то производная $f'(x)$ равна нулю не менее, чем в трех точках

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Функция $f(x)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1]$. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

B если функция $f(x)$ монотонно убывает, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x такая, что $f'(x) = 0$

D если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x такая, что $f'(x) = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Интеграл $\int_{-1}^{0} \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$ равен

A $-6\ln 2$

B $-18\ln 2$

C $-2\ln 2$

D $6\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

10. Интеграл $\int_{0}^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin x - 1)\,dx$ равен

A 0

B $1 - 3\pi/4$

C $1 - \pi/4$

D $1 - \pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

11. Интеграл $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ равен

A 0

B $\ln 2$

C $-\ln 2$

D 2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

12. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{0}^{n} \frac{(2+n)^n}{(1+x^2)n^n}\,dx$ равен

A $e^2\pi$

B $e^2\pi/6$

C $e^2\pi/4$

D $e^2\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

13. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 e^{-x}}{1-\cos x}$ равен

A 2

B $2e$

C 4

D $4e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

14. Предел $\lim\limits_{x\to 1+0} x^{2/(x^2-1)}$ равен

A 2

B e

C 1

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

15. Интеграл $\int_0^1 \left(\sin^2 x + \operatorname{tg} x\right) dx$ равен

A $1/2 - 1/4\sin 1 - \ln(\cos 1)$

B $1/2 - 1/4\sin 1 + \ln(\cos 1)$

C $1/2 - 1/4\sin 2 - \ln(\cos 1)$

D $-1/2 + 1/4\sin 2 - \ln(\cos 1)$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - 1 - x - x^2}{x^2}$

A равен 0

B равен $1/2$

C равен $-1/2$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

17. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x) - x + x^2}{\ln x + x - x^2}$

A равен -3

B равен -1

C равен 3

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

18. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^4}$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

19. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{3}{k^2-k-2}$

A равен 0

B равен $1/3$

C равен $\dfrac{\ln 2}{2}$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

20. Для натуральных чисел m, n предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$

A равен $(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$

B равен $(-1)^{m-n}\dfrac{n}{m}$

C равен $\dfrac{m}{n}$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

21. Сумма ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\frac{1}{\sqrt{5\cdot 7}}+\dots$$

равна

A $\sqrt{2}$

B $2\sqrt{3}$

C $3\sqrt{3}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

22. Сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$$

равна

A $\dfrac{1}{\ln 2}$

B $\dfrac{1}{\ln 3}$

C $\dfrac{1}{\ln 4}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Предел $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{ctg} x$

A равен 0

B равен 1

C равен -1

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

24. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$ и $M = \{(x, y)\colon x^2 y = 1\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в одной точке

B функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в одной точке

D функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся, последовательность $\{y_n\}$ — расходящейся. Тогда

A последовательность $\{x_n y_n\}$ является расходящейся

B если $y_n \neq 0$ при всех n, то последовательность $\{x_n/y_n\}$ является расходящейся

C если $x_n > 0$ при всех n, то последовательность $\{x_n^{y_n}\}$ является расходящейся

D если $y_n > 0$ при всех n, то последовательность $\{y_n^{x_n}\}$ является расходящейся

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^3 + y^3 + 2x^2y^2 = 17$. Через точку $(1, 2)$ проведена касательная $y = kx + b$ к этой кривой. Тогда угловой коэффициент k этой касательной равен

A $19/20$

B $-19/20$

C $20/19$

D $-20/19$

E числу, отличному от перечисленных в A–D

27. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$, непрерывна и положительна. Тогда предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

равен

A $\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)dx\right)$

B $\ln\left(\int_0^1 \exp f(x)dx\right)$

C $\exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$

D $\ln\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$

E числу, отличному от указанных в A–D, или не существует

28. Пусть $f(x) = \int_x^{x^2} y\sqrt{1+y}\,dy$. Тогда производная $f'(2)$

A равна $16\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

B равна $8\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

C равна $4\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

D равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

29. Даны матрицы A и B размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$, у которых строки линейно независимые. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Тогда

A матрица AA^T невырожденная

B матрица B^TB невырожденная

C матрица AB^T невырожденная

D матрица A^TB невырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. В линейном пространстве даны две системы векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Через L_X и L_Y обозначим линейные оболочки систем X и Y соответственно, а через $\dim L_X$ и $\dim L_Y$ — их размерности. Тогда

A если $n > m$, то $\dim L_X > \dim L_Y$

B если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система Y линейно независимая, то $n > m$

C если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система X линейно зависимая, то $n > m$

D если $\dim L_X = \dim L_Y$, то $n = m$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

32. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ равен

A -1

B 0

C 1

D 2

E не существует

3.1.2 Вторая часть теста

1. Функция одной вещественной переменной задана формулой $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} |x^2 - 1|^{1/n} \operatorname{arctg}(x^n)$. Тогда

а) областью определения функции $f(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) областью определения функции $f(x)$ является полуинтервал $(-1, +\infty)$;

Да Нет

в) область определения функции $f(x)$ является замкнутым множеством;

Да Нет

г) на промежутке $(-1, 1)$ функция $f(x)$ четная;

Да Нет

д) в области определения функция $f(x)$ имеется один устранимый разрыв;

Да Нет

е) в области определения функция $f(x)$ имеется один неустранимый разрыв первого рода;

Да Нет

ж) множество значений функции $f(x)$ состоит из трех точек 0, $\pi/4$, $\pi/2$;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

2. Дана функция $f(x, y) = 2x - y$ и множество $M = \{(x, y)\colon x^2 + xy = -3\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетно;

Да Нет

г) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M четно;

Да Нет

д) точка $(1, -4)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(2, -\dfrac{7}{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(-1, 4)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) существует точка A локального минимума и точка B локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M, такие что $f(A) > f(B)$.

Да Нет

3.2 Тест 2 (программа МАЭ)

3.2.1 Первая часть теста

33. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\sin x)^{\ln(x^2+1)} - 1}{x^3}$

A равен -1

B равен 0

C равен 1

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

34. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2015+n}{3^n}$$

равна

A $\dfrac{3 \cdot 4033}{4}$

B $\dfrac{4033}{2}$

C $\dfrac{4033}{4}$

D $\dfrac{4033}{8}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

35. Пусть M — множество тех вещественных чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x^2+2}-$ $-1)$. Для $x \in M$ обозначим через $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x^2+2}-1)$. Найдите *ложное* утверждение.

A $\quad$ M — открытое множество

B $\quad$ M — замкнутое множество

C $\quad$ уравнение $f(x) = \ln 2$ имеет единственное решение

D $\quad$ $f'(1) = 1$

E $\quad$ среди утверждений A, B, C, D есть ложное

36. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $[0, +\infty)$. Найдите *ложное* утверждение.

A $\quad$ если $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$, то существует такой отрезок $[a, b] \subset [0, 1]$, что $f(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$

B $\quad$ если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, то существует предел $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$ и этот предел равен a

C $\quad$ если не существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то не существует предел $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$

D $\quad$ если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[0, 1]$, то для любого числа $a \in (0, 1)$ выполнено неравенство $a\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^a f(x)\,dx$

E $\quad$ среди утверждений A, B, C, D есть ложное

37. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

A $\quad$ матрица A имеет три разных вещественных собственных числа

B $\quad$ у матрицы A для всех вещественных собственных чисел их геометрическая кратность совпадает с алгебраической

C $\quad$ ноль является собственным числом матрицы A, и размерность соответствующего собственного подпространства равна 2

D $\quad$ наибольшее вещественное собственное число матрицы A равно 2

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

38. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где α — вещественный параметр. Тогда

A при всех α система $Ax = 0$ имеет единственное решение

B найдется α, такое что множество решений системы $Ax = 0$ двумерное

C найдется единственное α, такое что множество решений системы $Ax = 0$ одномерное

D найдется ровно два значения α, таких что множество решений системы $Ax = 0$ одномерное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Квадратная матрица A трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 4$, в котором задано стандартное скалярное произведение. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X, и через $L^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству L. Тогда

A если $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp$, то $A = A^T$

B если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^T$, то $A = A^T$

C если $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^T$, то $A = A^T$

D если $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A$, то $A \neq A^T$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Симметричная матрица A задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 3$, причем известно, что матрица A не является ни нулевой, ни единичной. Через x^T обозначим строку, транспонированную к столбцу x. Тогда

A множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^T A x = 1\}$ ограниченное

B множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^T A x = -1\}$ неограниченное

C множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^T A x = 0\}$ ограниченное

D множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^T A x = 0\}$ является подпространством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3.2.2 Вторая часть теста

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2+1}, \ x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда а) при любом значении x_0 функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) при любом значении x_0 функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) существуют значения x_0, при которых $x(t)$ периодическая;

Да Нет

г) множество значений x_0, при которых область определения функции $x(t)$ открыта, открыто;

Да Нет

д) существует значение $x_0 \neq 0$, при котором $x(t)$ нечетна на своей области определения;

Да Нет

е) при $x_0 \neq 0$ функция $x(t)$ не обращается в ноль на своей области определения;

Да Нет

ж) если $x_0 = \pi/2$, то $x(1) = 4/\pi$;

Да Нет

з) если $x_0 = 4/\pi$, то $x(\sqrt{3}) = \pi/12$.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^x}{|x|^n}$. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$. Тогда

а) множество M является симметричным относительно нуля;

Да Нет

б) множество M является замкнутым;

Да Нет

в) множество M не является открытым;

Да Нет

г) функция $f(x)$ ограничена на множестве $(-\infty, -1)$;

Да Нет

д) на множестве M ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) на множестве $[100, +\infty)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) уравнение $f(x) = 0$ имеет более одного решения на множестве $(-\infty, -1)$;

Да Нет

з) множество отрицательных решений уравнения $f(x) = 1/x$ ограничено.

Да Нет

5. Матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times m$, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2m$, трактуются как линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ соответственно. Известно, что существует матрица $P = B(AB)^{-1}A$. Также в R^n задано стандартное скалярное произведение. Тогда

а) ранг матрицы P равен n;

Да Нет

б) ранг матрицы P равен m;

Да Нет

в) ядро матрицы A совпадает с образом матрицы B;

Да Нет

г) пересечение ядра матрицы A и образа матрицы B есть нулевое подпространство;

Да Нет

д) матрица P симметричная;

Да Нет

е) матрица P задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

ж) если $AB = I$, где через I обозначается единичная матрица, то матрица P задает ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

з) если ядро матрицы A ортогонально образу матрицы B, то матрица P задает ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$.

Да Нет

3.3 Ответы и решения теста

3.3.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** A. **3.** D. **4.** B. **5.** A. **6.** E. **7.** C. **8.** A. **9.** A. **10.** C. **11.** B. **12.** D. **13.** A. **14.** B. **15.** C. **16.** E. **17.** D. **18.** E. **19.** A. **20.** A. **21.** E. **22.** E. **23.** C. **24.** D. **25.** E. **26.** B. **27.** A. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** C. **32.** A. **33.** A. **34.** C. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** D. **39.** D. **40.** D.

3.3.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Обозначим через M область определения функции $f(x)$, то есть множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} |x^2-1|^{1/n} \operatorname{arctg}(x^n)$.

Очевидно, что $1 \in M$, $-1 \in M$ и $f(-1) = f(1) = 0$. Заметим, что если $x \neq -1$ и $x \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x^2-1|^{1/n}$. Если $x < -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n)$ не существует, поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{arctg}(x^{2k}) = \pi/2$, $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{arctg}(x^{2k+1}) = -\pi/2$. Значит $(-\infty,-1) \cap M = \varnothing$. Если $-1 < x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n) = 0$. Если $x > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n) = \pi/2$. Окончательно получаем: $M = [-1,+\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \pi/2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Получаем ответы: а) — нет, б) — нет, в) — да, г) — да, д) — нет, е) — да, ж) — нет, з) — да.

Задача 2. Множество M можно представить в виде $M = \{(x,y)\colon y = -3/x - x\}$. Ясно, что если $(x,y) \in M$ и $x \to 0+$, то $y \to -\infty$ и $f(x,y) \to +\infty$; если $(x,y) \in M$ и $x \to 0-$, то $y \to +\infty$ и $f(x,y) \to -\infty$. Следовательно, функция $f(x,y)$ на множестве M не ограничена ни сверху, ни снизу. Ответы на вопросы а) и б) — нет.

Обозначим для краткости $g(x,y) = x^2 + xy + 3$. Имеем: $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x$. Система $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, которое не удовлетворяет ограничению $g(x,y) = 0$. Иными словами, все точки множества M регулярны. Поэтому функция Лагранжа в данном случае имеет вид $L(x,y,\lambda) = 2x - y + \lambda(x^2 + xy + 3)$. Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x + \lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -1 + \lambda x = 0,$$

откуда следует, что $\lambda x = 1$, $\lambda y = -4$ и $y = -4x$. Учитывая ограничение $g(x,y) = 0$, получаем две точки, подозрительные на экстремум:

$$A_1 = (1,-4), \quad \lambda = 1, f(1,-4) = 6,$$

и

$$A_2 = (-1,4), \quad \lambda = -1, f(-1,4) = -6,$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа есть $D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Направления допустимых вариаций $dg(x,y) = 0$ имеют вид $(2x + y)dx + xdy = 0$.

Для точки A_1 получаем следующую квадратичную форму:

$$\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} D^2L \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & 2dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx & 2dx \end{pmatrix} = 6dx^2.$$

Значит, точка A_1 — это точка локального минимума. Аналогично получаем, что точка A_2 — это точка локального максимума.

Получаем ответы: в) — да, г) — нет, д) — да, е) — нет, ж) — да, з) — да.

Задача 3. Решим данное дифференциальное уравнение. Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{t^2+1}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} t + C.$$

Таким образом, общее решение равно $x(t) = \dfrac{1}{-C - \operatorname{arctg} t}$, и если подставить начальное условие $x(0) = x_0$, то получим $x(t) = \dfrac{1}{1/x_0 - \operatorname{arctg} t}$. Кроме того, при разделении переменных мы потеряли нулевое решение $x(t) \equiv 0$, добавим его. Можно перенести x_0 в числитель дроби, тогда общее решение уравнения примет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \operatorname{arctg} t}.$$

На каком интервале определено *максимальное решение* при разных x_0? Оно продолжается до тех пор, пока $1 - x_0 \operatorname{arctg} t \neq 0$. Следовательно, для $x_0 \in [-2/\pi, 2/\pi]$ решение $x(t)$ определено при всех $t \in \mathbf{R}$, для $x_0 > 2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t \in (-\infty, \operatorname{tg}(1/x_0))$, и для $x_0 < -2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t \in (\operatorname{tg}(1/x_0), +\infty)$. Таким образом, ответ на вопрос (а) — нет.

При $x_0 > 2/\pi$, если $t \to \operatorname{tg}(1/x_0)-$, то $x(t) \to +\infty$, поэтому ответ на вопрос (б) — нет.

При $x_0 = 0$ функция $x(t) \equiv 0$, это тривиальная периодическая функция, так что ответ на вопрос (в) — да.

Так как максимальное решение задачи Коши всегда определено на интервале, и решение существует при любом начальном условии x_0, то ответ на вопрос (г) — да, множество таких x_0 совпадает с $\mathbf{R}$.

Если функция $x(t)$ нечетная, то $x(0) = 0$, а это и есть x_0. Ответ на вопрос (д) — нет.

Так как правая часть уравнения непрерывна при всех значениях $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, то уравнение удовлетворяет теореме единственности, поэтому графики никаких двух решений не пересекаются. Так как функция $x(t) \equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}$ является решением уравнения, то никакое другое решение не равно нулю ни в одной точке. Ответ на вопрос (е) — да.

При $x_0 = \pi/2 > 2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t < \operatorname{tg}(2/\pi) < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, поэтому $x(1)$ не определено, и ответ на вопрос (ж) — нет.

При $x_0 = 4/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, поэтому $x(\sqrt{3})$ не определено, и ответ на вопрос (з) — нет.

Задача 4. Рассмотрим данный ряд при $x = 1$ и $x = -1$. При $x = 1$ это $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, он расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$. При $x = -1$ это $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, то есть ряд сходится как ряд Лейбница. Значит ответ на вопрос (а) — нет.

Заметим, что при $|x| > 1$ ряд сходится абсолютно. Действительно,

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{(n+1)^x|x|^n}{n^x|x|^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{1}{|x|} \to \frac{1}{|x|}$$

при $n \to \infty$. Поэтому по признаку Даламбера ряд из абсолютных величин сходится. Отсюда следует, что множество M не замкнутое, так как его предельная точка 1 ему не принадлежит (ответ на вопрос (б) — нет).

Если теперь рассмотреть любое $x \in (-1, 1)$, то легко видеть, что $\dfrac{n^x}{|x|^n} \to +\infty$ при $n \to$ $\to \infty$, и ряд расходится. Так как он сходится в точке $x = -1$, то множество M не является открытым (ответ на вопрос (в) — да). Мы получили, что множество $M = (-\infty, -1] \cup$ $\cup\, (1, +\infty)$.

Для ответа на вопросы (д) и (е) рассмотрим общий член ряда $a_n(x)$ в точке $x = n$. Он равен

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n n^n}{|n|^n} = (-1)^n.$$

Отсюда следует, что при $n \geqslant 100$ верхняя грань $\sup\limits_{x\in M}|a_n(x)| \geqslant \sup\limits_{x\in[100,+\infty)}|a_n(x)| \geqslant 1$, то есть общий член ряда не сходится к нулю равномерно ни на $[100, +\infty)$, ни тем более на всем M. Поэтому ряд равномерно не сходится. Ответ на вопрос (д) — нет, на вопрос (е) — нет.

При отрицательных $x \in M$ данный ряд является рядом Лейбница общим членом. Так как его первый член отрицательный, то для его суммы $f(x)$ выполняются неравенства

$$f(x) \geqslant a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) = -\frac{1}{|x|} + \frac{2^x}{|x|^2} - \frac{3^x}{|x|^3} > \frac{1}{x}$$

и

$$f(x) \leqslant a_1(x) + a_2(x) = -\frac{1}{|x|} + \frac{2^x}{|x|^2} < 0.$$

Поэтому ни у уравнения $f(x) = 0$, ни у уравнения $f(x) = 1/x$ отрицательных решений не существует. Поэтому ответ на вопрос (ж) — нет, на вопрос (з) — да.

Задача 5. Так как существует матрица $P = B(AB)^{-1}A$, то матрица AB невырожденная и, следовательно, имеет ранг m. Так как $\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} A$ и $\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} B$, то $\operatorname{rank} A =$ $= \operatorname{rank} B = m$ (больше, чем m он быть не может, поскольку матрица A имеет m строк, а матрица B имеет m столбцов).

Рассмотрим матрицу $APB = AB(AB)^{-1}AB = AB$. Ее ранг равен m. Но так как $\operatorname{rank} APB \leqslant \operatorname{rank} P$, то $\operatorname{rank} P \geqslant m$. А так как $P = B(AB)^{-1}A$, то $\operatorname{rank} P \leqslant m$, а значит он равен m (ответы на вопросы (а) — нет, (б) — да).

Если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} B$, то $AB = 0$, что невозможно, так как матрица AB невырожденная (ответ на вопрос (в) — нет).

Если $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B$, то $ABx = 0$, а так как AB невырожденная, то и $x = 0$ (ответ на вопрос (г) — да).

Для построения примера несимметричной матрицы P можно взять блочные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица 2×2. Тогда $AB = I$ и

$$P = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос (д) — нет). Этот же пример подходит и для вопроса (ж), так как несимметричная матрица P не задает ортогональный проектор при стандартном скалярном произведении (ответ — нет).

Рассмотрим теперь матрицу $P^2 = B(AB)^{-1}AB(AB)^{-1}A = B(AB)^{-1}A = P$. Отсюда по характеристическому свойству проектора получаем, что матрица P задает оператор проектирования (ответ на вопрос (е) — да).

И наконец, так как P задает проектор, то ее образ является подпространством, на которое происходит проектирование, а ее ядро является подпространством, параллельно которому происходит проектирование. Если они ортогональны друг другу, то проектирование ортогональное (ответ на вопрос (з) — да).

4 Вступительный экзамен 2016 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Определенный интеграл $\int_1^3 \frac{x\,dx}{(x^2-4)^2}$ равен

A 0

B $1/15$

C $\frac{1}{2}\ln(5/3)$

D $\frac{1}{2}\ln 15$

E не существует

2. Определенный интеграл $\int_1^e \ln x \, dx$ равен

A $1/e$

B 1

C e

D $e-1$

E не существует

3. Неопределенный интеграл $\int \frac{3dx}{x^2+x-2}$ при $x \in (-2, 1)$ равен

A $\ln(1-x) - \ln(x+2) + C$

B $\ln(2-x) - \ln(x+1) + C$

C $\ln(1-x) + 2\ln(x+2) + C$

D $\frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C$

E $\frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) + C$

4. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ равен

A $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}+1}{\sqrt{1+e^{2x}}-1}\right) + C$

B $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right) + C$

C $2\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1) + C$

D $\operatorname{arctg} \sqrt{1+e^{2x}} + C$

E $-\operatorname{arctg} \sqrt{1+e^{2x}} + C$

5. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2}\right)$ равен

A -1

B 0

C $1/3$

D 1

E не существует

6. Предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1/3$

C $\quad 2/3$

D $\quad 1$

E $\quad$ не существует

7. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1/4$

C $\quad 1/2$

D $\quad 1$

E $\quad$ не существует

8. Пусть $x_n=\dfrac{n^n}{n!}$, $n=1,2,\ldots$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 1/e$

C $\quad 1$

D $\quad e$

E $\quad$ не существует

9. Дана функция $f(x,y)=y-2x$ и множество $M=\{(x,y)\colon y^2-4x^2=1\}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наибольшего значения

B $\quad$ функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наименьшего значения

C $\quad$ множество значений функции $f(x,y)$ на множестве M является открытым множеством

D $\quad$ множество значений функции $f(x,y)$ на множестве M является замкнутым множеством

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть M — подмножество числовой прямой. Известно, что существует граничная точка множества M, ему не принадлежащая. Тогда

A множество M замкнутое

B множество M открытое

C множество M несчетное

D множество M бесконечное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, и пусть $F(x)$ — ее первообразная на всей числовой прямой. Тогда

A если $f(x)$ — периодическая функция, то $F(x)$ — периодическая функция

B если $f(x)$ — нечетная функция, то $F(x)$ — четная функция

C если $f(x)$ — четная функция, то $F(x)$ — нечетная функция

D если $f(x)$ — ограниченная функция, то $F(x)$ — ограниченная функция

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Дана функциональная последовательность $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на M

B множество M ограничено и замкнуто

C множество M ограничено и открыто

D функция $f(x)$ является неограниченной на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Множество $M \subset \mathbf{R}$ не имеет предельных точек. Тогда

A множество M конечно

B множество M бесконечно

C множество M замкнуто

D множество M открыто

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln^n(x^2+y^2)}{n}$. Обозначим через M множество пар (x, y), для которых этот ряд сходится. Тогда

A множество M замкнутое

B множество M открытое

C множество M ограниченное

D множество M неограниченное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. К кривой, заданной уравнением $2x^2 + y^2 = 3$, через точку $(1, 1)$ проведена касательная. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на координатных осях, и отрезком касательной между координатными осями, равна

A $9/4$

B 2

C $7/2$

D 3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы и непрерывны на множестве $[a, +\infty)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на $(a, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

II. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и равномерно непрерывны на $[a, +\infty)$, то функция $f(x)g(x)$ равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$.

A только II

B только III

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

17. Даны два числовых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда

A если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится

B если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

C если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

D если $a_n > 0$ при всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — множество на числовой прямой, такое что его дополнение $\mathbf{R} \setminus M$ является счетным множеством. Тогда

A все точки множества M — внутренние

B все точки множества M — граничные

C множество M не имеет изолированных точек

D множество M не имеет предельных точек

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — непустое множество на числовой прямой, у которого нет изолированных точек. Тогда

A множество M — открытое

B множество M — замкнутое

C множество M содержит все свои предельные точки

D множество M содержится в множестве своих предельных точек

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$; A, B — подмножества числовой прямой, такие, что $B = f(A)$. Тогда

A если B — открытое множество, то A — тоже открытое множество

B если A — замкнутое множество, то B — тоже замкнутое множество

C если B — отрезок (т. е. $B = [c, d]$ для некоторых $c, d \in \mathbf{R}$), то A тоже является отрезком

D если A — интервал (т. е. $A = (c, d)$ для некоторых $c, d \in [a, b]$), то B тоже является интервалом

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, заданная на всей плоскости $\mathbf{R}^2$, такая, что для любых x, y выполнено равенство

$$\lim_{a\to 0} \frac{f(ax, ay)}{a} = x + y.$$

Тогда

A функция f непрерывна в точке $(0, 0)$

B функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$

C во всех точках (x, y), принадлежащих некоторой окрестности точки $(0, 0)$, существуют частные производные $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

D функция $g(x) = f(x, 0)$ дифференцируема при $x = 0$, причем $g'(0) = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$, $f(0) = 0$ и для всех $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ выполнено неравенство $f(y) - f(x) \leqslant (y - x)^2$. Тогда

A при всех $x \in (0, 1)$ функция $f(x)$ дифференцируема, причем $f'(x) \leqslant 1$

B $f(1) < 0$

C функция $|f(x)|$ является неубывающей при $x \in [0, 1]$

D функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \in [0, 1]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ на отрезке $[a, b]$ задана функция $f_n(x)$, интегрируемая по Риману на $[a, b]$ и такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится при всех $x \in [a, b]$. Какие из следующих равенств (I, II, III) верны?

I. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = 0.$

II. $\displaystyle\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} |f_n(x)|\right) dx = 0.$

III. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(x)| dx = 0.$

A только I

B только II

C только I и III

D I, II и III

E ни одно из равенств I, II, III не является верным

24. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$, $x(0) = x_0$, где $f(x)$ — функция, непрерывно дифференцируемая на всей числовой прямой. Тогда

A функция $x(t)$ — монотонная на своей области определения

B функция $x(t)$ — ограниченная на своей области определения

C функция $x(t)$ — непостоянная на своей области определения

D область определения функции $x(t)$ — вся числовая прямая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Функция $f(x) = (x-1)^3(x+1)^3$

A ограничена сверху при $x \in \mathbf{R}$

B неограничена снизу при $x \in \mathbf{R}$

C достигает локального максимума ровно в двух точках

D достигает локального минимума ровно в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите *ложное* утверждение:

A матрица A имеет три разных вещественных собственных числа

B у матрицы A для всех вещественных собственных чисел их геометрическая кратность совпадает с алгебраической

C ноль является собственным числом матрицы A, и размерность соответствующего собственного подпространства равна 2

D наибольшее вещественное собственное число матрицы A равно 2

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

27. Число инвариантных подпространств матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ равно

A 2

B 3

C 4

D 8

E бесконечно много

28. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

29. В *линейном* пространстве даны две системы векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Через L_X и L_Y обозначим *линейные оболочки* систем X и Y соответственно, а через $\dim L_X$ и $\dim L_Y$ — их размерности. Тогда

A если $\dim L_X \leqslant \dim L_Y$, то $n \leqslant m$

B если $n \leqslant m$, то $\dim L_X \leqslant \dim L_Y$ или система Y линейно зависимая

C если $n \leqslant m$, то $\dim L_X \leqslant \dim L_Y$ или система X линейно независимая

D если $n \neq m$, то $\dim L_X \neq \dim L_Y$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Квадратная матрица A трактуется как *линейный оператор* в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 4$, в котором задано стандартное скалярное произведение. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X, и через $L^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству L. Тогда

A если $A \neq A^T$, то $\operatorname{Ker} A \neq (\operatorname{Im} A)^\perp$

B если $A \neq A^T$, то $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Ker} A^T$

C если $A \neq A^T$, то $\operatorname{Im} A \neq \operatorname{Im} A^T$

D если $A = A^T$, то $\operatorname{Im} A \neq \operatorname{Ker} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Квадратная матрица A порядка $n \geqslant 1$, для которой существует базис в пространстве $\mathbf{R}^n$, состоящий из собственных векторов этой матрицы, называется *матрицей простой структуры*. Тогда

A   если матрица A невырожденная, то она является матрицей простой структуры

B   если матрица A имеет единственное собственное число 0, то она является матрицей простой структуры

C   если матрица A ортогональная, то она является матрицей простой структуры

D   если матрица A задает оператор проектирования, то она является матрицей простой структуры

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Даны матрицы A и B размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$, у которых строки линейно независимые. Пусть a — столбец длины m, b — столбец длины n, а через x обозначим неизвестный столбец подходящей длины. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Тогда

A   система линейных уравнений $(AA^T)x = a$ имеет решение при любом a

B   система линейных уравнений $(B^TB)x = b$ имеет решение при любом b

C   система линейных уравнений $(AB^T)x = a$ при любом a имеет не более одного решения

D   система линейных уравнений $(A^TB)x = b$ при любом b имеет не более одного решения

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$ трактуется как линейный оператор в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Для любого вектора x обозначим через $|x|$ его длину. Найдите *ложное* утверждение:

A   если $A^TA = 0$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

B   если $A^TA = I$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

C   если $A^TA = A$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

D   если $A^TA = A^T$, то $|Ax| \leqslant |x|$ для любого вектора x

E   среди утверждений A, B, C, D есть ложное

34. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^3/(x^2+1)$, $y(0) = 1$ на своей области определения

A   не имеет нулей

B   имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

35. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[0, 1]$, причем $f(0) < g(0)$, а $f(1) > g(1)$. Тогда

A уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не менее одного решения

B если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения, то таких решений нечетное число

C количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ совпадает с количеством решений уравнения $f^2(x) = g^2(x)$

D если $f(0.5) = g(0.5)$, то количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0, 0.5)$ совпадает с количеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0.5, 1)$.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой. Тогда

A функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

B если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $-f(x)$ достигает наибольшего значения

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

37. Функция $f(x, y) = x^2 - 2y^2$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках, но не достигает наименьшего значения

C достигает наименьшего значения ровно в двух точках, но не достигает наибольшего значения

D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

38. Функция $f(x, y, z) = 3\ln x + 2\ln y + \ln z$ на множестве $\{(x, y, z)\colon x > 0, y > 0, z > 0, 3x + 2y + z = 6\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в трех точках

D достигает наибольшего значения более чем в трех точках

E не достигает наибольшего значения

39. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на интервале $(0, 1)$. Тогда

A функция $f(x)$ ограничена на интервале $(0, 1)$

B функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(0, 1)$

C если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(0, 1)$, то существуют точки x и x', такие, что $x < x'$ и $f'(x) \geqslant f'(x')$

D если функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения по крайней мере в двух различных точках, то и функция $f(x)$ достигает наибольшего значения по крайней мере в двух различных точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Функция $f(x)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[-1, 0]$. Тогда

A существует точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) < -x$

B существует точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) \geqslant x$

C если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то существует точка $x \in [0, 1]$ такая, что $f(x) = x - 1$

D если функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[0, 1]$, то и функция $g(x) = \operatorname{tg}(\pi \cdot x)$ достигает наименьшего значения на отрезке $[0, 1]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4.1.2 Вторая часть теста

1. Дано множество $M = \{(x, y)\colon (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6) = 0\}$ и функция $f(x, y) = 3x + 4y$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ не достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) у функции $f(x, y)$ на множестве M есть ровно два локальных минимума;

Да Нет

г) точка $(3/5, 4/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

д) точка $(9/5, -3/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M чётное;

Да Нет

ж) точка $(3, 3)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) в точке $(21/5, 13/5)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M.

Да Нет

2. Дана последовательность функций

$$f_n(x) = \frac{x^n + 1}{x^{2n} + 1},$$

где $n = 1, 2, \ldots$, и $x \in \mathbf{R}$. Обозначим через M множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) существует ровно одно значение $x \in M$, при котором котором функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода;

Да Нет

в) уравнение $f(x) = x + 1$ имеет ровно одно решение при $x \in M$;

Да Нет

г) при любом $n = 1, 2, \ldots$ функция $f_n(x)$ является ограниченной;

Да Нет

д) при любом $n = 1, 2, \ldots$ функция $f_n(x)$ имеет ровно один строгий локальный минимум;

Да Нет

е) ни при каком $n = 1, 2, \ldots$ функция $f_n(x)$ не достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

ж) последовательность $\{f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$, сходится к $f(x)$ равномерно на интервале $(0, 1)$;

Да Нет

з) последовательность $\{f_n(x),\ n = 1, 2, \ldots\}$, сходится к $f(x)$ равномерно на интервале $(1, 2)$.

Да Нет

3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & \alpha^2 \\ -\alpha^2 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1+\alpha & 1 \\ \alpha^2 & 1+\alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1+\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

где α — вещественный параметр. Подпространства $L \subset \mathbf{R}^3$ и $M \subset \mathbf{R}^3$ определяются как множества решений систем линейных уравнений $Ax = 0$ и $Bx = 0$ соответственно. Также в пространстве $\mathbf{R}^3$ задано стандартное скалярное произведение. Тогда

а) существует единственное α, при котором $L \cap M \neq \{0\}$;

Да Нет

б) существует ровно два значения α, при которых $L \cap M \neq \{0\}$;

Да Нет

в) существует единственное α, при котором $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

г) существует ровно два значения α, при которых $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

д) если размерность $\dim L > \dim M$, то $L \supset M$;

Да Нет

е) если размерность $\dim L = \dim M$, то $\mathbf{R}^3 = L + M$;

Да Нет

ж) если подпространства L и M ортогональны друг другу, то $\mathbf{R}^3$ разлагается в прямую сумму L и M;

Да Нет

з) если $\mathbf{R}^3$ разлагается в прямую сумму L и M, то подпространства L и M ортогональны друг другу.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\dot{x} = \frac{\alpha x}{t} + t^{\beta}, \quad x(1) = x_1,$$

где x_1, α и β — вещественные параметры. Тогда

а) при любых значениях параметров функция $x(t)$ определена при всех $t > 0$;

Да Нет

б) существует комбинация значений параметров, при которой функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

в) существует комбинация значений параметров, при которой функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) существует комбинация значений параметров, при которой $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$;

Да Нет

д) существует комбинация значений параметров, при которой $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ конечен, но не равен нулю;

Да Нет

е) если $x_1 < 0$, то $x(t) < 0$ везде на своей области определения;

Да Нет

ж) если $\alpha = \beta = x_1 = 2$, то $x(2) = 16$;

Да Нет

з) если $\alpha = 3$ а $\beta = 2$, то при любом x_1 предел $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$.

Да Нет

5. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} g(t)dt,$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 + \alpha t}{|t|}, & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

и α — вещественный параметр. Тогда

а) для любого α функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) для любого α функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения;

Да Нет

в) для любого α функция $f(x)$ дифференцируема на своей области определения;

Да Нет

г) существует α, при котором функция $f(x)$ является ограниченной;

Да Нет

д) существует α, при котором функция $f(x)$ является выпуклой на своей области определения;

Да Нет

е) для любого α точка $x = 1/2 - \alpha$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

ж) для любого α у функции $f(x)$ существует единственная точка локального минимума;

Да Нет

з) для любого α график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** B. **3.** A. **4.** B. **5.** A. **6.** B. **7.** C. **8.** B. **9.** C. **10.** D. **11.** B. **12.** E. **13.** C. **14.** C. **15.** A. **16.** D. **17.** C. **18.** C. **19.** D. **20.** B. **21.** E. **22.** C. **23.** B. **24.** A. **25.** E. **26.** C. **27.** D. **28.** C. **29.** B. **30.** D. **31.** D. **32.** A. **33.** E. **34.** A. **35.** E. **36.** E. **37.** A. **38.** A. **39.** C. **40.** C.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что множество является объединением двух множеств: $M_1 = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ и $M_2 = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = (x-3)^2 + (y-1)^2 - 4 = 0\}$. Как видим, каждое множество представляет собой окружность, поэтому они оба компактные. Следовательно, и множество M компактное, а значит непрерывная функция $f(x, y)$ достигает на M наибольшего и наименьшего значений (ответ на вопрос (а) — да, на вопрос (б) — нет).

Воспользуемся тем, что любая точка локального экстремума на объединении множеств $M_1 \cup M_2$ является точкой экстремума хотя бы на одном из множеств M_1 и M_2, и исследуем функцию $f(x, y)$ на множествах M_1 и M_2 по отдельности.

Функция Лагранжа на множестве M_1:

$$L = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 + 2\lambda x = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4 + 2\lambda y = 0,$$

откуда, исключив λ, получаем соотношение $3y = 4x$. Подставляя его в уравнение множества, получаем две точки: $(-3/5, -4/5)$, $\lambda = 5/2$, $f(x, y) = -5$ и $(3/5, 4/5)$, $\lambda = -5/2$, $f(x, y) = 5$. Подставив эти точки в уравнение для множества M_2, получаем, соответственно, $(-3/5)^2 + (-4/5)^2 - 6 \cdot (-3/5) - 2 \cdot (-4/5) + 6 = 61/5 \neq 0$ и $(3/5)^2 + (4/5)^2 - 6 \cdot (3/5) - 2 \cdot (4/5) + 6 = 9/5 \neq 0$. Это значит, что если эти точки являются точками локального экстремума функции $f(x, y)$ на M_1, то они являются точками локального экстремума и на всем множестве M.

Функция Лагранжа на множестве M_2:

$$L = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6).$$

Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3 + \lambda(2x - 6) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4 + \lambda(2y - 2) = 0,$$

откуда, исключив λ, получаем соотношение $3(y-1) = 4(x-3)$. Подставляя его в уравнение множества, получаем две точки: $(9/5, -3/5)$, $\lambda = 5/4$, $f(x, y) = 3$ и $(21/5, 13/5)$, $\lambda = 5/4$, $f(x, y) = 23$. Подставив эти точки в уравнение для множества M_1, получаем, соответственно, $(9/5)^2 + (-3/5)^2 - 1 = 13/5 \neq 0$ и $(21/5)^2 + (13/5)^2 - 1 = 117/5 \neq 0$. Это значит, что если эти точки являются точками локального экстремума функции $f(x, y)$ на M_2, то они являются точками локального экстремума и на всем множестве M.

Таким образом, точка $(-3/5, -4/5)$ является точкой глобального, а значит и локального минимума, а точка $(21/5, 13/5)$ является точкой глобального, а значит и локального максимума (ответ на вопрос (з) — да).

В точке $(3, 3)$ не выполняется условие первого порядка, поэтому это не экстремум (ответ на вопрос (ж) — нет).

Рассмотрим две оставшиеся точки и проверим, выполняется ли достаточное условие экстремума. Опять же, достаточно проверять условие второго порядка на соответствующем подмножестве M_1 или M_2.

Рассмотрим точку $(3/5, 4/5)$ на множестве M_1. Вторая производная функции Лагранжа

$$D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица отрицательно определена, поэтому точка $(3/5, 4/5)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на M_1, а значит и на M (ответ на вопрос (г) — нет).

Рассмотрим точку $(9/5, -3/5)$ на множестве M_2. Вторая производная функции Лагранжа

$$D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена, поэтому точка $(9/5, -3/5)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на M_2, а значит и на M (ответ на вопрос (д) — да).

Также получилось, что у функции $f(x, y)$ по два локальных минимума и максимума на множестве M, поэтому ответы на вопросы (в) — да и (е) — да.

На рисунке 2 изображено множество M, стационарные точки и линии уровня функции $f(x, y)$.

Задача 2. При $|x| > 1$ знаменатель растет при $n \to \infty$ быстрее, чем числитель, так что $f(x) = 0$. При $|x| < 1$ знаменатель и числитель стремятся к 1, так что $f(x) = 1$. При $x = -1$ знаменатель равен 2, а числитель — то 2, то 0, в зависимости от четности n, так что значение $f(-1)$ не определено. При $x = 1$ знаменатель и числитель равны 2, так что

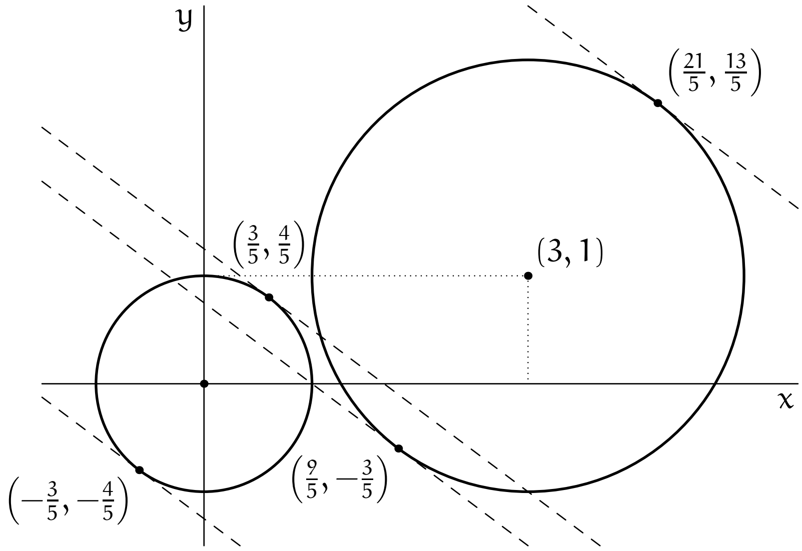

Рис. 2. Множество M и линии уровня функции $f(x, y)$

$f(1) = 1$. Таким образом,

$$M = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ 1, & -1 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

(см. рис. 3). Функция $f_n(x)$ стремится к 0 при $x \to \pm\infty$, равна 1 при $x = 0$ и $x = 1$;

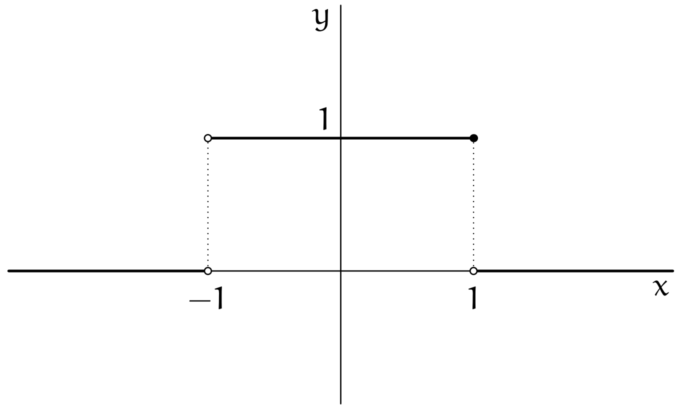

Рис. 3. График функции $f(x)$

$f_n(-1) = 1$ при четных n и 0 при нечетных n. Производная

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1 - 2x^n - x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2}$$

принимает нулевое значение при $x^n = -1 + \sqrt{2}$, $x^n = -1 - \sqrt{2}$ или $x = 0$. При этом в первом случае $f_n(x) = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$, во втором случае, реализующемся только при нечетных n, $f_n(x) = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$, а в третьем случае $f_n(x) = 1$. Только эти точки могут быть точками локальных экстремумов, и только в них может достигаться наибольшее или наименьшее значение функции $f_n(x)$.

Таким образом, ответы на вопросы следующие:

а) нет, так как -1 — предельная точка множества M, не принадлежащая ему;

б) да, так как всего существует две точки разрыва, 1 и -1, но только одна из них, 1, принадлежит множеству M;

в) да, поскольку значение $f(-1)$ не определено и $f(0) = 1$;

г) да, поскольку $f_n(x)$ — непрерывная функция, стремящаяся к 0 при $x \to \pm\infty$;

д) да, поскольку, как показывает сравнение значений функции $f_n(x)$ в критических точках, при четных n значение $x = 0$ — локальный минимум, $x = \pm\left(-1+\sqrt{2}\right)^{1/n}$ — локальные максимумы; при нечетных n $x = \left(-1-\sqrt{2}\right)^{1/n}$ — локальный (и глобальный) минимум, $x = \left(-1+\sqrt{2}\right)^{1/n}$ — локальный максимум, а значение $x = 0$ не является локальным экстремумом (см. рис. 4 и 5);

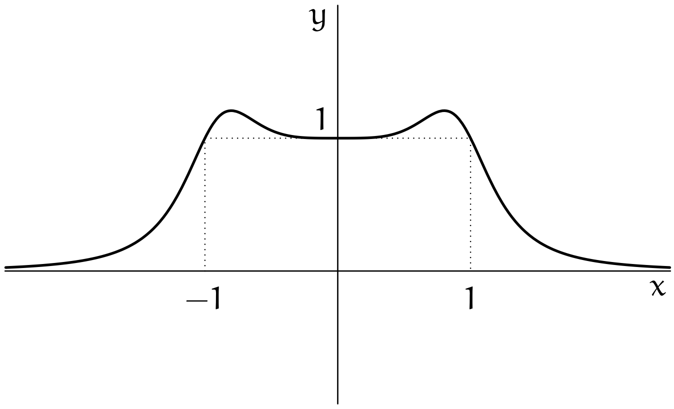

Рис. 4. График функции $f_n(x)$ для $n = 4$

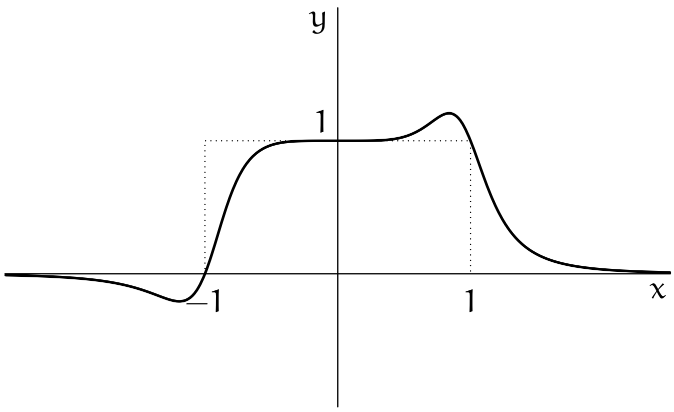

Рис. 5. График функции $f_n(x)$ для $n = 5$

е) нет, так как при нечетных n наименьшее значение достигается в точке $x = \left(-1-\sqrt{2}\right)^{1/n}$ (при четных n — не достигается);

ж) нет, так как максимум величины $|f_n(x) - f(x)|$ на $(0,1)$ достигается в точке $x = \left(-1-\sqrt{2}\right)^{1/n}$ и равен $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ независимо от n;

з) нет, так как точная верхняя грань величины $|f_n(x) - f(x)|$ на $(1,2)$ равна 1 ($|f_n(x) - f(x)| \to 1$ при $x \to 1$ справа), а значит, не стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Задача 3. Рассмотрим матрицу A и заметим, что ее вторая и третья строки пропорциональны друг другу (коэффициент пропорциональности равен $-\alpha$). Поэтому ранг матрицы A не превосходит двух при любых значениях α. Если теперь рассмотреть угловой минор второго порядка, то он равен

$$\det\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha\\ -\alpha^2 & \alpha\end{pmatrix} = \alpha^2-\alpha^3 = \alpha^2(1-\alpha).$$

Этот минор не равен нулю при $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$, и ранг матрицы A при этом равен 2. При $\alpha = 0$ матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

и ее ранг равен 1. Решив систему $Ax = 0$, получаем, что пространство L равно линейной оболочке

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \alpha = 0.$$

При $\alpha = 1$ матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

и ее ранг тоже равен 1. Решив соответствующую систему, получаем

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \alpha = 1.$$

Если же $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$, то решив систему $Ax = 0$ (например, методом Гаусса), получаем, что

$$L = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\1\end{pmatrix}\right), \quad \alpha\neq 0, \alpha\neq 1.$$

Вычислим теперь определитель матрицы B:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\alpha^2 & 1+\alpha & 1\\ \alpha^2 & 1+\alpha & \alpha^2\\ \alpha & 1+\alpha & \alpha\end{pmatrix} &= \alpha(1+\alpha)\det\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\ \alpha & 1 & \alpha^2\\ 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix} =\\ &= \alpha(1+\alpha)(\alpha^2+\alpha^2+\alpha-1-\alpha^2-\alpha^3) =\\ &= -\alpha(1+\alpha)(1-\alpha)^2(1+\alpha) =\\ &= -\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2.\end{aligned}$$

Как видим, при $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -1$ он не равен нулю, и соответствующее множество решений $M = \{0\}$.

При $\alpha = 0$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} B = 2, \quad M = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

При $\alpha = 1$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} B = 1, \quad M = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

При $\alpha = -1$ матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} B = 1, \quad M = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Теперь можно ответить на вопросы. Ответ (а) — нет, (б) — да ($\alpha = 0$ и $\alpha = 1$). Ответ (в) — нет, (г) — да ($\alpha = 1$ и $\alpha = -1$). Неравенство $\dim L > \dim M$ выполняется при $\alpha \neq -1$ и $\alpha \neq 1$. В каждом из этих случаев $L \supset M$, поэтому ответ (д) — да. Равенство $\dim L = \dim M$ выполняется только при $\alpha = 1$, нетрудно видеть, что при этом $\mathbf{R}^3 = L + M$, и ответ (е) — да. Контрпримером к вопросу (ж) служит случай $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -1$, когда $M = \{0\}$, а $\dim L = 2$, то есть ответ (ж) — нет. И наконец, R^3 разлагается в прямую сумму L и M только в случае $\alpha = -1$. Нетрудно видеть, что при этом L и M действительно ортогональны друг другу, то есть ответ (з) — да.

Задача 4. Так как уравнение является линейным, то его решение определено на максимальном интервале (содержащем точку $t = 1$), для которого правая часть определена, то есть на $(0, +\infty)$. Поэтому ответ на вопрос (а) — да, на вопрос (б) — нет (заметим, что при $\alpha = 0$ правая часть уравнения тоже не определена при $t = 0$).

Решим это уравнение. Начнем с однородного:

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha}{t} \implies \ln|x| = \alpha \ln|t| = \alpha \ln t,$$

откуда получаем, что $x(t) = Ct^{\alpha}$.

Теперь применим метод вариации постоянной, чтобы найти частное решение неоднородного уравнения. Положим $C = C(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \dot{C}(t)t^{\alpha} + C(t)\alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha C(t)t^{\alpha}}{t} + t^{\beta}, \\ &\dot{C}(t) = t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить, например, что $C(t) = \ln t$ при $\alpha = 1+\beta$, и $C(t) = \dfrac{t^{\beta-\alpha+1}}{\beta-\alpha+1}$ при $\alpha \neq 1+\beta$. Подставив эти выражения обратно, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$x(t) = \begin{cases} t^{\alpha}\ln t + Ct^{\alpha}, & \text{при } \alpha = 1+\beta, \\ \dfrac{t^{\beta+1}}{\beta-\alpha+1} + Ct^{\alpha}, & \text{при } \alpha \neq 1+\beta. \end{cases}$$

Теперь подставим начальное условие. (1) $\alpha = 1+\beta$: $x_1 = 1^{\alpha}\ln 1 + C1^{\alpha} = C$; (2) $\alpha \neq 1+\beta$: $x_1 = \dfrac{1^{\beta+1}}{\beta-\alpha+1} + Ct^{\alpha} = \dfrac{1}{\beta-\alpha+1} + C$, откуда находим решение задачи Коши:

$$x(t) = \begin{cases} (\ln t + x_1)t^{\alpha}, & \text{при } \alpha = 1+\beta, \\ \dfrac{t^{\beta+1}}{\beta-\alpha+1} + \left(x_1 - \dfrac{1}{\beta-\alpha+1}\right)t^{\alpha}, & \text{при } \alpha \neq 1+\beta. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\alpha = \beta = -1$, $x_1 = 1$. В этом случае $x(t) \equiv 1$, то есть ответ на вопрос (в) — да. Кроме того, $x(t) \to 1$ при $t \to +\infty$, поэтому ответ на вопрос (д) — да.

Рассмотрим случай $\alpha = -1$, $\beta = -2$, x_1 — любое. Тогда $x(t) = \dfrac{\ln t + x_1}{t} \to 0$ при $t \to +\infty$, и ответ на вопрос (г) — да.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $x_1 = -1$. Решение $x(t) = \ln t - 1 \to +\infty$ при $t \to +\infty$, и ответ на вопрос (е) — нет.

Подставим $\alpha = \beta = x_1 = 2$: $x(t) = t^3/1 + (2-1/1)t^2 = t^3 + t^2$. То есть $x(2) = 2^3 + 2^2 = 12$ (ответ на вопрос (ж) — нет).

Если $\alpha = 3$, $\beta = 2$, то решение равно $x(t) = (\ln t + x_1)t^3$. Так как t^3 стремится к нулю быстрее, чем $\ln t$ стремится к бесконечности при $t \to +0$, то ответ на вопрос (з) — да.

Задача 5. Упростим выражение для функции $g(t)$. Для этого заметим, что $t^2/|t| = |t|$ и $t/|t| = \operatorname{sign} t$, откуда получим выражение

$$g(t) = \begin{cases} -t-\alpha & \text{при } t < 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \\ t+\alpha & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция $g(t)$ определена на всей прямой $\mathbf{R}$ и непрерывна только при $\alpha = 0$ (иначе у нее появляется разрыв в точке $t = 0$). На рисунке 6 приведен график функции $g(t)$ для $\alpha = -0.4$.

Теперь найдем функцию $f(x)$. При $x \leqslant 0$

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} (-t-\alpha)dt = (-t^2/2 - \alpha t)\Big|_{x-1}^{x} = -x - \alpha + 1/2.$$

При $x \geqslant 1$

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} (t+\alpha)dt = (t^2/2 + \alpha t)\Big|_{x-1}^{x} = x + \alpha - 1/2.$$

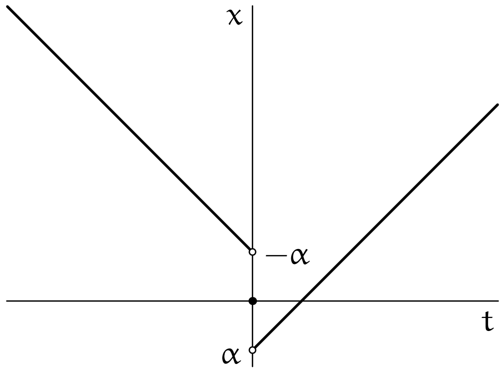

Рис. 6. График функции $g(t)$ для $\alpha = -0.4$

И, наконец, при $0 < x < 1$

$$f(x) = \int_{x-1}^{0} (-t-\alpha)dt + \int_0^x (t+\alpha)dt =$$
$$= (-t^2/2 - \alpha t)\Big|_{x-1}^{0} + (t^2/2+\alpha t)\Big|_0^x = x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2$$

(график функции $f(x)$ для $\alpha = -0.4$ изображен на рисунке 7).

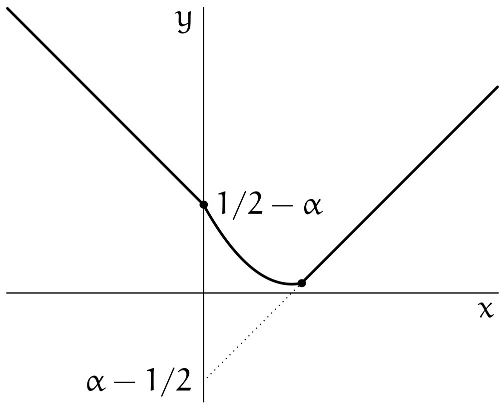

Рис. 7. График функции $f(x)$ для $\alpha = -0.4$

Таким образом, функция $f(x)$ определена при всех $x \in \mathbf{R}$ (ответ на вопрос (а) — да). Также из линейности функции $f(x)$ на $(-\infty, 0]$ и $[1, +\infty)$ следует, что у нее существуют две наклонные асимптоты (ответ на вопрос (з) — да). Далее, заметим, что по построению вне точек $x = 0$ и $x = 1$ функция $f(x)$ непрерывна, а также непрерывна слева в точке $x = 0$ и справа в точке $x = 1$. Пределы

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x^2 + (2\alpha-1)x - \alpha + 1/2) = -\alpha + 1/2 = -0 - \alpha + 1/2 = f(0)$$

и

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x^2 + (2\alpha-1)x - \alpha + 1/2) = \alpha + 1/2 = 1 + \alpha - 1/2 = f(1),$$

откуда следует непрерывность в точках $x = 0$ и $x = 1$, и ответ на вопрос (б) — да.

Рассмотрим теперь производную справа и слева в точке $x = 0$.

$$f'(0-0) = (-x - \alpha + 1/2)' = -1,$$
$$f'(0+0) = (x^2 + (2\alpha-1)x - \alpha + 1/2)' = 2x + 2\alpha - 1 = 2\alpha - 1.$$

Эти выражения совпадают только при $\alpha = 0$. Таким образом, не при всех α функция $f(x)$ дифференцируемая (ответ на вопрос (в) — нет).

Далее, предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, поэтому ответ на вопрос (г) — нет.

Найдем также производную слева и справа в точке $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1-0) &= (x^2 + (2\alpha - 1)x - \alpha + 1/2)' = 2x + 2\alpha - 1 = 2\alpha + 1, \\ f'(1+0) &= (x + \alpha - 1/2)' = 1 \end{aligned}$$

(график производной при $\alpha = -0.4$ изображен на рисунке 8).

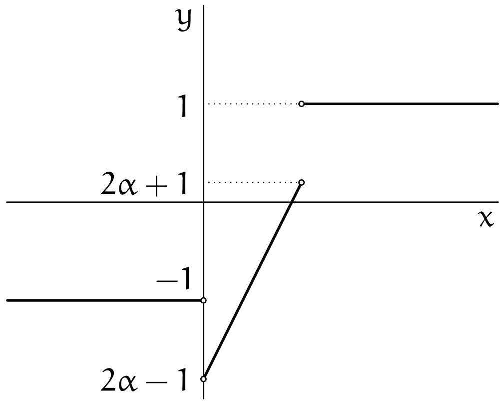

Рис. 8. График функции $f'(x)$ для $\alpha = -0.4$

Как видно, в этой точке производная существует тоже только при $\alpha = 0$. При этом она равна

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \leqslant 0, \\ 2x - 1 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 1, \end{cases}$$

то есть, монотонно не убывает. Отсюда следует, что при $\alpha = 0$ функция $f(x)$ выпуклая (ответ на вопрос (д) — да).

Далее, легко видеть, что при $x > 1$ функция $f(x)$ строго возрастает. Поэтому, например, при $\alpha < -1/2$ точка $x = 1/2 - \alpha$ никак не может быть точкой локального минимума функции $f(x)$ (ответ на вопрос (е) — нет).

Наконец, рассмотрим производную $f'(x)$ при всех значениях α:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } t \leqslant 0, \\ 2x + 2\alpha - 1 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Как можно заметить, производная меняет знак всего один раз, с отрицательного на положительный. При $\alpha \leqslant -1$ это происходит в точке $x = 1$, при $\alpha \geqslant 1$ — в точке $x = -1$, и при $-1 < \alpha < 1$ в точке $1/2 - \alpha$. Таким образом, у функции $f(x)$ действительно существует единственная точка локального минимума (она же является и точкой глобального минимума), и ответ на вопрос (ж) — да.

5 Формат вступительного экзамена 2017 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляет 3 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей. Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 1.5 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет».

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 1.5 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780—819 баллов	11
750—779 баллов	10
720—749 баллов	9
680—719 баллов	8
640—679 баллов	7
600—639 баллов	6
560—599 баллов	5
520—559 баллов	4
480—519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской экономической школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей;
* подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Углубленный курс для программы МАЭ: март—июль 2017 г. Начало занятий — 1 марта.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда, 3 ак. часа лекция, и пятница, 2 ак. часа семинар).
* **Ускоренный курс для прикладных программ: апрель—июль 2017 г. Начало занятий — 25 апреля.**
  В ускоренном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы по математическому анализу, линейной алгебре и теории вероятностей. Занятия 2 раза в неделю (вторник и четверг, 3 ак. часа лекция).

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. +7-495-956-9508 (доб. 103), email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись лекций на подготовительных курсах РЭШ по математике. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Календарь абитуриента 2017 г.

8.1 Заполнение анкеты с приложениями online

с 1 июня по 20 июля 2017 г.

8.2 Вступительные экзамены

с 24 по 28 июля 2017 г.

8.3 Прием документов для прошедших по конкурсу

до 4 августа 2017 г.

9 Приемная комиссия РЭШ

Телефоны: +7-495-956-9508 (доб. 103, 143), +7-903-188-5516.

Email: abitur@nes.ru.

Web: http://www.nes.ru.

Адрес: 143026, Москва, деревня Сколково, ул. Новая, д.100А, РЭШ