Современная экономическая наука и образование
в России

РЭШ
Российская
экономическая
школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ПРОГРАММУ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» В РЭШ В 2016 ГОДУ

Москва 2016

Бремзен А. С., Головань С. В., Катышев П. К., Хейфец И. Л., Шибанов О. К.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в Российскую экономическую школу в 2016 году. — М., 2016 —

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ на программу «Магистр экономики» в 2016 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене на программу «Магистр экономики».

Содержание и форма экзамена в течение ряда лет оставались неизменными.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена по математике.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2013—2015 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

   Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. Предел последовательности

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. Предел функции. Непрерывность функций (отображений)

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbf{R}^n$)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$**

   Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

    Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

    Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

    Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

    Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. **Степенные ряды**

    Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**
    Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М., Наука, 1984.

5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1987.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1989.

7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

8. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Наука, 1982.

9. Рудин У., *Основы математического анализа*. М., Мир, 1976.

10. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М., Наука, 1979.

11. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

12. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

13. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

   Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

   Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. **Определитель матрицы**

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. **Линейные операторы**

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. **Евклидовы пространства**

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.* М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра.* М., Наука, 1974.

5. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц.* М., Наука, 1966.

6. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре.* М., 2000.

7. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* М., Наука, 1970.

8. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра.* М., Изд-во МГУ, 1998.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра.* М., Наука, 1984.

10. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов.* М., Изд-во МГУ, 1987.

11. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры.* М., Наука, 1963.

12. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре.* М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

13. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры.* М., Наука, 1980.

14. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа.* (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

15. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства.* М., Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2013 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Пусть M — счетное множество на числовой прямой, $P = \mathbf{R} \setminus M$ — дополнение множества M. Тогда

A у множества P существует внутренняя точка

B у множества P существует внешняя точка

C у множества P существует изолированная точка

D у множества P существует граничная точка

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x^4}dx$ равен

A $-x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

B $-x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

C $-x + \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg} x^2 + C$

D $-x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

3. Пусть M — подмножество числовой прямой и P — множество его изолированных точек. Тогда

A множество P непустое

B множество P открытое

C множество P замкнутое

D множество P ограниченное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Для подмножества M числовой прямой обозначим через ∂M множество его граничных точек, а через $\overline{M}$ — его замыкание. Тогда

A $\partial(M \cup N) = \partial M \cup \partial N$

B $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

C если множество M не содержит изолированных точек, то ∂M совпадает с множеством предельных точек множества M

D $M = \overline{M} \setminus \partial M$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Неопределенный интеграл $\int \frac{x^4}{x+1}dx$ равен

A $-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + C$

B $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$

C $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$

D $\frac{(x+1)^4}{4} - x + \ln|x+1| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

6. Пусть A, B — ограниченные подмножества числовой прямой, $A+B=\{x+y, x\in A, y\in B\}$, $A-B=\{x-y, x\in A, y\in B\}$, $A\cdot B=\{x\cdot y, x\in A, y\in B\}$. Тогда

A $\quad \sup(A\cdot B)=\sup A\cdot\sup B$

B $\quad \inf(A\cdot B)=\inf A\cdot\inf B$

C $\quad \sup(A-B)=\sup A-\inf B$

D $\quad \sup(A+B)=\sup A+\inf B$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ задана рекуррентно:

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=\sqrt{5+x_n},\ n=1,2,\ldots,$$

где $a\geqslant 0$. Тогда

A $\quad$ при любом $a\geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ строго возрастает

B $\quad$ существует такое $a\geqslant 0$, что последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ не ограничена

C $\quad$ существуют такие числа a_1, $a_2\geqslant 0$, что соответствующие последовательности $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ сходятся к разным пределам

D $\quad$ при любом $a\geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ имеет предел

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дан функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^n$. Обозначим через M множество его сходимости и через $S(x)$, $x\in M$, его сумму. Тогда

A $\quad$ множество M замкнутое

B $\quad$ множество M ограниченное

C $\quad$ функция $S(x)$ является неограниченной функцией

D $\quad$ интервал $(4,5)\subset M$ и на $(4,5)$ ряд сходится равномерно

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Даны функция двух переменных $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ и множество $M=\{(x,y)\colon x^2+y^2=2\}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке

B функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке

C точка $(1, 1)$ есть точка локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D точка $(0, -\sqrt{2})$ есть точка локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Предел $\lim\limits_{x \to 2} \left(2 - \dfrac{x}{2}\right)^{1/(x^3-8)}$ равен

A $\dfrac{1}{\sqrt[24]{e}}$

B $\sqrt[24]{e}$

C $\dfrac{1}{\sqrt[12]{e}}$

D $\sqrt[6]{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

11. Концы стержня AB, длина которого равна 5 м, закреплены на двух взаимно перпендикулярных направляющих и могут скользить по ним. Пусть O — точка пересечения направляющих. Точка A движется от точки O с постоянной скоростью 1 м/с. Чему равно абсолютное значение скорости точки B в момент времени, когда длина отрезка AO равна 3 м?

A 0.50 м/с

B 0.75 м/с

C 1.00 м/с

D 1.25 м/с

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

12. Предел $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{2x} (\sin t)^t dt$ равен

A 1

B 2

C 3

D 4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt[7]{n^7+7n^6}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ равен

A $\quad -1$

B $\quad -5/2$

C $\quad -4$

D $\quad -5$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. $\sup\limits_{|x|\leqslant 1} \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} x^n$ равен

A $\quad -\pi/4$

B $\quad \pi/4$

C $\quad 1$

D $\quad \pi/2$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n - x^{4n}\right)\sin(xn)$ равна

A $\quad (-1, 1)$

B $\quad [-1, 1)$

C $\quad (-1, 1]$

D $\quad [-1, 1]$

E $\quad$ множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Тогда

A $\quad$ последовательность $\{(-1)^n|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

B $\quad$ последовательность $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

C $\quad$ последовательность $\{\sqrt{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

D $\quad$ последовательность $\{a_n + k(n-k)a_{n-k}\}_{n=k+1}^{\infty}$ сходится при некотором натуральном k

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\left(1+x/2+x^2/4\right)}{x^2}$ равен

A $\quad -1/4$

B 1/4

C −1/8

D 1/8

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

18. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{2n+3k}{n}\right)^2$ равен

A 0

B 30

C 39

D 62

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, не постоянная и четная, а функция $g(x)$ определена на всех числовой оси, не постоянная и периодическая. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существуют функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что функция $f(x)g(x)$ периодическая.

II. Функция $f(x)+xg(x)$ не периодическая.

III. Функция $f(x)+g(x)+x$ не является четной.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

20. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$, не убывает и принимает на нем значения между нулем и единицей. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Решения уравнения $f(x)=x$ существуют, и их конечное число.

II. Если $f(1)=1$, то у уравнения $f(x)=x$ существует не менее двух решений.

III. Если $f(f(x))$ непрерывна, то и $f(x)$ непрерывна.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E все утверждения I, II, III ложные

21. Пусть функция двух переменных задана следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} a + 2x^2 - b(y-c), & \text{если } x^2 > 2 + x \text{ и } y < 6, \\ 3 + cx - y, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция является непрерывной на всей плоскости, если

A $a = 3,\ b = 1,\ c = 2$

B $a = 3,\ b = 0,\ c = 2$

C $a = 2,\ b = 0,\ c = 1$

D $a = -3,\ b = 1,\ c = 2$

E таких значений параметров не существует

22. Пусть $f(x) = -\exp\left(-\dfrac{a}{x}\right) + 1 - \dfrac{a}{x}$, где $a > 0$. Тогда

A функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$

B функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $a > 1$, и только при таких значениях параметра a

C функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $0 < a \leqslant 1$, и только при таких значениях параметра a

D функция $f(x)$ положительна при всех $x > 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть функция $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. У функции $f(x)$ существует первообразная, являющаяся всюду непрерывной функцией.

II. Существует функция $f(x)$, у которой в точке разрыва существует производная.

III. Множество значений функции $f(x)$ является выпуклым множеством.

A   только I

B   только II

C   только III

D   только I и III

E   все утверждения I, II, III ложные

24. Функции $f(x), g(x)$ определены и непрерывны на числовой прямой $\mathbf{R}$, и не равны тождественно нулю. Пусть точка $x_0 \in \mathbf{R}$. Тогда

A   если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, а у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

B   если у функции $f(x)$ не существует производной в точке x_0, и у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

C   если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, то у функции $f(x)$ существует производная в некоторой окрестности точки x_0

D   если у функций $f(x)$, $g(x)$ существуют производные в точке x_0, то у функции $f(g(x))$ существует производная в точке x_0

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой и обладает свойством: $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^\alpha$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $\alpha > 1$, то функция $f(x)$ постоянная.

II. Если $\alpha = 1$, то функция $f(x)$ дифференцируемая.

III. Если $0 < \alpha < 1$, то функция $f(x)$ непрерывная.

A   только I

B   только I и II

C   только I и III

D   только II и III

E   I, II и III

26. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $x^2 + xy - y^2 = x$ в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$. Тогда ее производная в точке $x = 1$

A равна -1

B равна 0

C равна 1

D не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y^2x^3$, $y(0) = 8$. Тогда значение $y(1)$ равно

A $1/8$

B $8/3$

C 8

D -8

E другому числу или не существует

28. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{\cos x}$, $y(0) = 2$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

29. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-1, 1)$ и дважды дифференцируема в каждой точке $(-1, 1)$. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на $(-1, 1)$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет не менее двух решений

B если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) < 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

C если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) > 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

D если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наибольшего, либо наименьшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Функция $f(x,y) = \sin(\pi xy)$ на множестве $\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

31. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом $f(x)$ принимает не менее двух значений. Тогда

A множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть открытым

B множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть замкнутым

C если множества точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения, оба конечны, то количества элементов в них различаются не более чем на 1

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на интервале $(0,1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x,y)$ определена в окрестности точки $(0,0)$. Тогда

A если для любого t функция $g(x) = f(x,tx)$ непрерывна в точке $x=0$, то функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$

B если для любого t функция $g(x) = f(x,tx)$ дифференцируема в точке $x=0$, то функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$

C если функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$, то функция $h(x,y) = xyf(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$

D если функция $u(x,y) = \sin f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$, то и функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Дана система векторов $\{x_1,\ldots,x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что вектор x_{m+1} линейно выражается через $x_1,\ldots,x_m$. Через $\mathscr{L}(z_1,\ldots,z_k)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{z_1,\ldots,z_k\}$, а через $\dim\mathscr{L}(z_1,\ldots,z_k)$ — ее размерность. Тогда

A система $\{x_1, \dots, x_m\}$ линейно зависимая

B $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = m$

C $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_{m+1}) = m$

D если система $\{x_1, \dots, x_{m+1}\}$ линейно независимая, то $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_{m+1}) \leqslant \leqslant m$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

34. Пусть L_1 — множество решений системы $Ax = 0$, L_2 — множество решений системы $Bx = 0$, где A и B — матрицы размера $m \times n$ (m, $n \geqslant 2$), а x — неизвестный столбец подходящей длины. Тогда

A $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $A^{\mathsf{T}}Bx = 0$ (через A^{T} обозначается матрица, транспонированная к A)

B $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$

C $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} x = 0$

D $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $(A + B)x = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначим определитель матрицы X. Тогда

A если $\det(AB) = \det(BA)$, то $AB = BA$

B если $A^2 = B^2$, то $A = B$ или $A = -B$

C если $(A - B)^2 = 0$, то $A = B$

D если $\det A = \det B \neq 0$, то матрица AB^{-1} ортогональная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Дан *нильпотентный* линейный оператор $\mathbf{A}$, действующий из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$ (т. е. $\mathbf{A}^m = 0$ для некоторого $m \geqslant 1$). Через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A} > 0$

B если $\mathbf{A} \neq 0$, то $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}^2 > \dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}$

C $\mathbf{A}^n = 0$

D пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в сумму подпространств $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{A}$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

37. Число инвариантных подпространств матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

равно

A 1

B 2

C 3

D 4

E бесконечно много

38. Пусть A — симметричная матрица третьего порядка, а x — неизвестный столбец длины 3. Тогда

A если множество $\{x\colon x^{\mathsf{T}}Ax = a\}$ неограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A знакопеременная (не является ни положительно, ни отрицательно полуопределенной)

B если множество $\{x\colon x^{\mathsf{T}}Ax = a\}$ ограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A положительно определенная

C если множество $\{x\colon x^{\mathsf{T}}Ax = a\}$ при всех $a \geqslant 0$ содержит в себе прямую, то матрица A положительно полуопределенная

D уравнение $x^{\mathsf{T}}Ax = a$ имеет решение при всех $a \in \mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A^2 = I$, где I — единичная матрица. Пусть $L_1 = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = x\}$ и $L_{-1} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = -x\}$. Тогда

A Числа 1 и -1 оба являются собственными числами матрицы A

B подпространства L_1 и L_{-1} ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$

C пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму L_1 и L_{-1}

D матрица A симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть P и Q — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, задающие проекторы на одно и то же подпространство $L \subset \mathbf{R}^n$. Через $\operatorname{Ker} X$ и $\operatorname{Im} X$ обозначим ядро и образ оператора, заданного матрицей X, соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $PQ = Q$

B $QP = P$

C $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$

D $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} Q$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

2.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть $f(x) = \int_{4x}^{x^2+3} e^{-t^2}\,dt$, где $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) при всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$;

Да Нет

б) уравнение $f(x) = 0$ имеет четное число корней;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) функция $f(x)$ имеет локальный минимум, который принадлежит интервалу $(1, 3)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ не убывает на множестве $[3, +\infty)$;

Да Нет

ж) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту с ненулевым углом наклона;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

Да Нет

2. Для семейства функций $f(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \in \mathbf{R}$, рассмотрим предел

$$\lim_{\mu \to 0} \left\{ \lim_{\nu \to 0} \frac{f(\mu + \nu + x) - f(\mu + x) - f(\nu + x) + f(x)}{\mu\nu} \right\}.$$

Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество, где он существует и конечен, и через $g(x)$ — его значение для $x \in M$. Тогда

а) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv 0$ на M;

Да Нет

б) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv \gamma$ на M;

Да Нет

в) если $g(x) \not\equiv \gamma$ на M, то число решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четное;

Да Нет

г) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) > 0$ на M;

Да Нет

д) существуют более одного значения γ, при которых $g(x)$ не ограничена на M;

Да Нет

е) существуют более одного значения γ, при которых $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

ж) существуют более одного значения γ, при которых $M \neq \mathbf{R}$;

Да Нет

з) если $\gamma = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}$, то $g(x)$ не равно 0 ни в одной точке M.

Да Нет

3. Даны функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2|x|y^3$ и множество $M = \{(x, y) \colon |x| + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке $\left(1/2, 1/\sqrt{2}\right)$;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в точке $(16/25, -3/5)$;

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

е) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

ж) точка $(0, -1)$ является точкой локального минимума функцим $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{\sqrt{16 - t^2}}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) существует x_0 такое, что функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) при любом x_0 функция $x(t)$ определена в точке $t = 3$;

Да Нет

в) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) при любом $x_0 \neq 0$ функция $x(t)$ монотонно возрастает на своей области определения;

Да Нет

д) для любого $\tau > 0$ существует $x_0 > 0$ такое, что $x(t)$ не определена в точке τ;

Да Нет

е) если $x_0 > 1$ и $x(t)$ определена в точке $t = 2$, то $x(2) > 2$;

Да Нет

ж) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t) - x_0$ является нечетной;

Да Нет

з) если $x_0 < 1$, то $x(t)$ определена в точке $t = 7/2$.

Да Нет

5. Три вектора

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 1+\alpha \end{pmatrix},$$

являются собственными векторами симметричной матрицы A третьего порядка. Известно, что

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5\alpha \\ 1+2\alpha \\ 2-5\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда

а) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

б) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ матрица A является ортогональной матрицей;

Да Нет

г) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

д) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

е) при $\alpha = -1$ существует бесконечно много матриц A;

Да Нет

ж) при $\alpha = -1$ существует единственная матрица A;

Да Нет

з) при $\alpha = -1$ не существует матрицы A.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** A. **3.** E. **4.** E. **5.** B. **6.** C. **7.** D. **8.** C. **9.** C. **10.** A. **11.** B. **12.** B. **13.** D. **14.** B. **15.** E. **16.** C. **17.** D. **18.** C. **19.** C. **20.** E. **21.** E. **22.** A. **23.** E. **24.** E. **25.** C. **26.** A. **27.** E. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** A. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** E. **36.** D. **37.** B. **38.** A. **39.** C. **40.** D.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Для начала заметим, что подынтегральная функция положительная и непрерывная на всем $\mathbf{R}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff x^2+3 > 4x \iff x \notin [1,3], \\ f(x) = 0 &\iff x^2+3 = 4x \iff x \in \{1,3\}, \\ f(x) < 0 &\iff x^2+3 < 4x \iff x \in (1,3). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x) = 0$ в двух точках $x = 1$ и $x = 3$, вопрос б) — да. При $x \in (1,3)$ функция $f(x) < 0$, поэтому вопрос а) — нет.

Так как $f(x) \leqslant 0 \iff x \in [1,3]$ и функция $f(x)$ непрерывна, то она достигает наименьшего значения на $[1,3]$, и это значение является наименьшим значением на всем $\mathbf{R}$ (вопрос г) — да). Достигается оно внутри отрезка (где значения функции отрицательные), и так как глобальный минимум является локальным, то д) — да.

Теперь заметим, что если $x > 0$, то $f(-x) > f(x)$ (поскольку подынтегральная функция положительная и $[4(-x), 3(-x)^2+3] \supset [4x, 3x^2+3]$). Поэтому при $x > 0$ наибольшее значение достигаться не может. Если же $x \leqslant 0$, то

$$f'(x) = 2xe^{-(x^2+3)^2} - 4e^{-(4x)^2} < 0,$$

что означает, что $f(x)$ убывающая, и локальных, а значит и глобальных максимумов при $x \leqslant 0$ у нее нет. Поэтому вопрос в) — нет.

Далее, поскольку подынтегральная функция e^{-t^2} очень быстро стремится к нулю при $t \to \pm\infty$, то $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (так как оба предела интегрирования стремятся к $+\infty$) и $f(x) \to A > 0$ при $x \to -\infty$ (здесь нижний предел стремится к $-\infty$, а верхний — к $+\infty$). Поэтому у функции $f(x)$ есть две горизонтальные асимптоты и нет наклонных (вопросы ж) — нет, з) — да).

Если же предположить, что $f(x)$ не убывает на $[3, +\infty)$, то так как при $x > 3$ функция $f(x) > 0$, то и предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ (предел неубывающей ограниченной функции). Это вступает в противоречие с тем, что предел на самом деле равен нулю (вопрос е) — нет).

Задача 2. Заметим, что предел в условии задачи является определением второй производной, соответственно, множество M — множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует $f''(x)$. Для заданной функции $f(x)$ вторая производная равна $g(x) = f''(x) = \gamma(\gamma-1)|x|^{\gamma-2}$ при $x \in M$.

При $\gamma \in \{0, 1\}$, $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому а) — да.

При $\gamma = 0$, $g(x) \equiv 0$ на $M = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, при $\gamma = 2$, $g(x) \equiv 2$ на $M = \mathbf{R}$. Поэтому б) — да.

При всех $\gamma \geqslant 2$ вторая производная существует на всей прямой, то есть $M = R$. Поэтому е) — да.

При всех $\gamma \leqslant 0$ сама функция $f(x)$, а значит и ее вторая производная не существует в нуле, поэтому $M \neq \mathbf{R}$ и ж) — да.

Заметим, что при $\gamma \notin \{0, 1\}$ функция $g(x)$ может равняться нулю только в точке $x = 0$. Поэтому при всех $\gamma < 0$ и $x \in M$ $g(x) > 0$, а значит г) — да.

При всех $\gamma > 2$ вторая производная существует на всей прямой и не ограничена. Поэтому д) — да.

Если $\gamma = 1$, то $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому з) — нет.

Наконец заметим, что $g(x)$ — четная функция, поэтому количество ненулевых решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четно. Нулевое решение могло бы быть возможно только при $\gamma = g(0) = 0$, однако тогда $M = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ и $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому в) — да.

Задача 3. Выразим $|x| = 1 - y^2$ из определения множества M и подставим в функцию $f(x, y)$:

$$g(y) = (1-y^2)^2 + 2y^2 + 2(1-y^2)y^3 = -2y^5 + y^4 + 2y^3 + 1,$$

где $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Исследуем функцию $g(y)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Возьмём производную и посмотрим, в каких точках $g'(y)$ обращается в ноль:

$$g'(y) = -10y^4 + 4y^3 + 6y^2 = 2y^2(3 + 2y - 5y^2) = 2y^2(1-y)(3+5y).$$

Это означает, что точки, которые могут быть экстремумами функции $f(x, y)$ — это $y = 0, x = \pm 1$, $y = 1, x = 0$ и $y = -3/5, x = \pm 16/25$. Также возможно, что существует экстремум на границе области определения $[-1, 1]$ функции $g(y)$, то есть в точке $y = -1, x = 0$ для функции $f(x, y)$.

Вторая и третья производные функции $g(y)$ равны

$$g''(y) = -40y^3 + 12y^2 + 12y = 4y(3 + 3y - 10y^2),$$
$$g'''(y) = -120y^2 + 24y + 12 = 12(1 + 2y - 10y^2).$$

Найдем знаки второй производной функции $g(y)$ в точках экстремума, знак третьей производной в точке $(1,0)$, а также значения функции $g(y)$ в этих точках:

$$g''(0) = 0,\ g'''(0) > 0,\ g''\left(-\frac{3}{5}\right) > 0,\ g''(1) < 0,\ g''(-1) > 0,$$
$$g(0) = 1,\ g\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2666}{3125} \approx 0.853,\ g(1) = 2,\ g(-1) = 2.$$

Следовательно, точки $y = 0, x = \pm 1$ являются точками локального минимума функции $f(x,y)$, точки $y = \pm 1, x = 0$ являются точками локального и глобального максимума функции $f(x,y)$, точки $y = -3/5, x = \pm 16/25$ являются точками локального и глобального минимума функции $f(x,y)$. Отсюда следуют ответы на вопросы задачи: а) нет, б) нет, в) да, г) да, д) да, е) нет, ж) нет, з) нет.

Задача 4. Правая часть дифференциального уравнения не определена при $t \geqslant 4$, так что никакое решение задачи Коши не может быть определено при всех t (ответ на вопрос а) — нет).

Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{\sqrt{16 - t^2}},$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = \arcsin\frac{t}{4},$$

так что

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 - \arcsin(t/4)}.$$

Видно, что при $x_0 > 1/\arcsin(3/4)$ знаменатель обращается в ноль при подходящем $t < 3$ (ответ на вопрос б) — нет). Напротив, при малых x_0 (меньших $2/\pi$) знаменатель положителен и отделен от нуля при всех $t < 4$, так что решение ограничено (ответ на вопрос в) — да). Положительный ответ на вопрос г) следует из явного вида решения задачи Коши. Ответ на вопрос д) — да (достаточно выбрать $x_0 = 1/\arcsin(\tau/4)$). Далее, для того, чтобы было определено $x(2)$, требуется $x_0 < 2/\pi < 1$ и значит посылка в утверждении е) никогда не выполнена, таким образом, ответ на вопрос е) — да. Из явного вида функции $x(t)$ имеем

$$x(t) - x(0) = \frac{x_0^2 \arcsin(t/4)}{1 - x_0 \arcsin(t/4)},$$

так что ответ на вопрос ж) — нет. Наконец, нетрудно видеть, что при $x_0 = 3/\pi < 1$ решение задачи Коши существует только при $t < 2\sqrt{3} < 7/2$, так что ответ на вопрос з) — нет.

Задача 5. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что все три вектора попарно ортогональны, поэтому они образуют базис и могут соответствовать разным собственным числам матрицы A. Обозначим эти собственные числа через λ_1, λ_2 и λ_3 соответственно. Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$. Следовательно,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, откуда следует, что матрица A ортогональная (вопросы а) нет, б) нет, в) да).

Пусть $\alpha = 0$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что в этом случае векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3x_1 + x_2 + 3x_3$. Следовательно,

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = 3Ax_1 + Ax_2 + 3Ax_3 = 3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 3\lambda_1 x_3 =$$

$$= 3\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} + 3\lambda_1\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\lambda_1 - 2\lambda_2\\ \lambda_2\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, откуда следует, что матрица A задает проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором x_2 (вопросы г) да, д) нет).

Пусть $\alpha = -1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$. Аналогично случаю $\alpha = 0$ векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = -3x_1 + x_2 - 3x_3$. Следовательно,

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = -3Ax_1 + Ax_2 - 3Ax_3 = -3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 3\lambda_1 x_3 =$$

$$= -3\lambda_1\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} - 3\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\lambda_1 - 2\lambda_2\\ \lambda_2\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-1\\7\end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что эта система не имеет решений (вопросы е) нет, ж) нет, з) да).

3 Вступительный экзамен 2014 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

- правильный ответ — «$+1$»
- неправильный ответ — «-0.25»
- отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- правильный ответ — «$+1$»
- неправильный ответ — «-1»
- отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$.

II. Если $f(x)$ имеет разрыв первого рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

III. Если $f(x)$ имеет разрыв второго рода на $\mathbf{R}$, то ее график незамкнут в $\mathbf{R}^2$.

A только I

B только I и II

C   только I и III

D   только II и III

E   I, II и III

2. Пусть A — счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A   множество внутренних точек A счетное

B   множество граничных точек A счетное

C   множество внешних точек A не более, чем счетное

D   множество внешних точек A имеет мощность континуума

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть A_1, A_2, … — подмножества вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A   если среди множеств A_n есть хотя бы одно открытое, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

B   если среди множеств A_n есть хотя бы одно замкнутое, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

C   если все множества A_n открытые, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открытое

D   если все множества A_n замкнутые, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ замкнутое

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Пусть A и B — непустые ограниченные подмножества $\mathbf{R}$. Обозначим через $A - B$ множество $\{x - y\colon x \in A, y \in B\}$, а через $\sup X$ и $\inf X$ — точную верхнюю и точную нижнюю грань множества X соответственно. Найдите *ложное* утверждение

A   если $\sup A > \sup B$, то $\sup(A - B) > 0$

B   если $\sup A < \sup B$, то $\sup(A - B) < 0$

C   если $\sup A > \inf B$, то $\sup(A - B) > 0$

D   если $\sup A < \inf B$, то $\sup(A - B) < 0$

E   среди утверждений A, B, C, D есть ложное

5. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — две системы векторов в $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$, а L_X и L_Y — их линейные оболочки соответственно. Тогда

A   если сумма $L_X + L_Y$ прямая, то системы X и Y линейно независимые

B   если системы X и Y линейно независимые, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

C если объединенная система $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ линейно независимая, то сумма $L_X + L_Y$ прямая

D если объединенная система $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\}$ линейно зависимая, то сумма $L_X + L_Y$ не прямая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$, где $n, m \geqslant 2$, x — столбец длины n, y и b — столбцы длины m. Через A^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Тогда

A система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $BAx = Bb$

B система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $A^T Ax = A^T b$

C система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $ABy = b$

D система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда совместна система $AA^T y = b$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — ортогональные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $\det A = 1$, $\det B = -1$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ ортогональная

B при любом $\lambda \in [0, 1]$ матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ невырожденная

C существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ задает оператор проектирования

D существует $\lambda \in [0, 1]$, при котором матрица $\lambda A + (1 - \lambda)B$ вырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, где $n, m \geqslant 2$. Обозначим через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Im} \mathbf{A} + \operatorname{Im} \mathbf{B}$

B $\operatorname{Im}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \supset \operatorname{Im} \mathbf{A} \cap \operatorname{Im} \mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker} \mathbf{A} \cap \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \subset \operatorname{Ker}\mathbf{A} + \operatorname{Ker}\mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$, для которой выполнено равенство $A^2 + 2A = 0$. Тогда

A матрица A вырожденная

B у матрицы A существует положительное собственное число

C у матрицы A существует отрицательное собственное число

D матрица $-A$ задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть A и B — симметричные положительно определенные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A \neq B$ и $\det A = \det B$, где через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Обозначим также через x^{T} транспонированный столбец x. Тогда

A множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ пустое

B множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ непустое ограниченное

C множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ неограниченное, не совпадающее с $\mathbf{R}^n$

D множество $\{x \in \mathbf{R}^n \colon x^{\mathsf{T}}(A-B)x = 1\}$ — все пространство $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Определим в $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение и обозначим через A^{T} матрицу, транспонированную к A. Тогда

A если $A^{\mathsf{T}}A$ задает ортопроектор в стандартном базисе, то A тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

B если A задает ортопроектор в стандартном базисе, то $A^{\mathsf{T}}A$ тоже задает ортопроектор в стандартном базисе

C если $A^{\mathsf{T}}A$ задает проектор в стандартном базисе, то A тоже задает проектор в стандартном базисе

D если A задает проектор в стандартном базисе, то $A^{\mathsf{T}}A$ тоже задает проектор в стандартном базисе

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A — симметричная матрица порядка $n \geqslant 2$. Известно, что для любого столбца $x \in \mathbf{R}^n$ выполняется равенство $x^T A x = 0$ (здесь через x^T обозначена строка, транспонированная к x). Тогда

A   матрица A невырожденная

B   матрица A ортогональная

C   матрица A задает ортопроектор в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении

D   матрица A задает проектор, но не ортопроектор, в стандартном базисе при стандартном скалярном произведении

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = (y^2 + 1)x$, $y(0) = 0$. Тогда значение $y(\pi)$ равно

A 0

B 1

C $\operatorname{arctg} \sqrt{\pi}$

D $\operatorname{tg} \dfrac{\pi^2}{2}$

E   другому числу или не определено

14. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2}$, $y(1) = 1$ на своей области определения

A   не имеет нулей

B   имеет ровно один ноль

C   имеет ровно два нуля

D   имеет ровно четыре нуля

E   имеет более четырех нулей

15. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех вещественных чисел, причем функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ непрерывны в каждой точке. Тогда

A   функция $f(g(f(x)))$ непрерывна в каждой точке

B   функция $g(f(g(x)))$ дифференцируема в каждой точке

C   функция $f^2(x) + g^2(x)$ непрерывна в каждой точке

D функция $f(g(f(g(x))))$ непрерывна в каждой точке

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-1,1)$. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1,1)$, то и функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

B если существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наименьшего, либо наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1,1)$, то существует конечный предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$

D если существуют конечные предел слева $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ и предел справа $\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения на интервале $(-1,1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x,y) = \sin^4(\pi xy) + \cos^4(\pi xy)$ на множестве $\{(x,y)\colon x^2+y^2=1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

18. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках. Тогда

A множество точек, в которых $f(x)$ достигает наименьшего значения, содержит изолированные точки

B функция $f^3(x) - f^2(x) + 5f(x) - 14$ достигает наибольшего значения ровно в трех точках

C на отрезке $[0,1]$ содержится не менее пяти точек, в которых производная $f'(x)$ существует и равна нулю

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Числовая функция $f(x)$ определена в окрестности точки 0 на вещественной прямой. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то она непрерывна и в некоторой окрестности точки 0

B если функция $f(x)$ дифференцируема в точке 0, то она дифференцируема и в некоторой окрестности точки 0

C если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то функция $g(x, y) = f(xy)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

D если функция $f^2(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $f^3(x)$ непрерывна в точке 0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{1/x} - x^2 - x - \alpha)$ при $\alpha > 0$

A равен 0

B равен $1 - \alpha$

C равен $-\alpha$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{672} - 2\cos(x^{1007}) - \sin(x^{672}) + 2}{x^{2014}}$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

22. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - (\cos x)^{\ln(x+1)}}{x^4}$

A равен 0

B равен 5

C равен 10

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+1}$

A равен 1

B равен 2

C равен $\ln 2$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

24. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

A равен 0

B равен 1

C равен $1/e$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

25. Сумма ряда

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

равна

A $3/2$

B $3\ln(2)$

C $2\ln(3)$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

26. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2014}{2^n}$$

равна

A -2012

B -2011

C -2010

D -2009

E $\quad -2008$

27. Сумма ряда

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 3}$$

равна

A $\quad 1/4$

B $\quad 1/2$

C $\quad 3/4$

D $\quad 1$

E $\quad 3/2$

28. Точка A движется по прямой $4x = 3y$ с постоянной скоростью 5 м/сек, точка B движется по прямой $5x = 12y$ с постоянной скоростью 13 м/сек. Обе точки движутся в направлении увеличения координат. В начальный момент точка A имеет координаты $(6\,\text{м}, 8\,\text{м})$, точка B в начальный момент находится в начале координат. Через сколько секунд после начала движения расстояние между точками A и B будет наименьшим?

A $\quad$ через 11/13 секунды

B $\quad$ через 31/41 секунды

C $\quad$ через 23/25 секунды

D $\quad$ через 12/17 секунды

E $\quad$ через число секунд, отличное от указанных в A, B, C, D

29. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два числовых ряда. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если оба ряда сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

II. Если оба ряда абсолютно сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

III. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ абсолютно сходится.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

30. Числовая функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является ограниченным множеством

B если функция $f(x)$ не ограничена на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не ограничено, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является неограниченным множеством

C если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ компактно, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ является компактным множеством

D если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и множество $B \subset \mathbf{R}$ не является открытым, то полный прообраз $f^{-1}(B)$ не является открытым множеством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. К графику функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ проведена касательная в точке $\left(a, \dfrac{1}{a^2}\right)$, $a > 0$. Пусть $S(a)$ — площадь треугольника, образованного отрезком касательной между осями координат и отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат. Тогда производная $S'(3)$ равна

A $-1/4$

B $3/2$

C $-2/3$

D $1/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

32. Пусть

$$f(x) = \int_1^{2x} \sqrt{1+t^2}\,dt, \ x \in \mathbf{R}.$$

Через $f^{-1}(x)$ обозначим функцию, обратную к $f(x)$. Тогда

A $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

B $(f^{-1})'(0) = 2\sqrt{2}$

C $(f^{-1})'(0) = 2$

D $(f^{-1})'(0) = 0$

E производная $(f^{-1})'(0)$ равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует.

33. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^2+y^3-6y^2+9y=8$. Через точку $(2,1)$ проведена касательная к этой кривой. Тогда

A касательная пересекает ось Oy в точке $(0,5)$

B касательная пересекает ось Oy в точке $(0,-5)$

C касательная пересекает ось Oy в точке $(0,3)$

D касательная не пересекает ось Oy

E в точке $(2,1)$ не существует касательной к этой кривой

34. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и $c \leqslant f(x) \leqslant d$ при любом $x \in [a,b]$, а функция $g(x)$ задана на отрезке $[c,d]$. Найдите *ложное* утверждение

A если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и функция $g(x)$ непрерывна на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

B если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и функция $g(x)$ интегрируема на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

C если функция $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и функция $g(x)$ возрастает на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

D если функция $f(x)$ возрастает на $[a,b]$ и функция $g(x)$ убывает на $[c,d]$, то функция $g(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

35. Последовательность $\{x_n, n = 1,2,\ldots\}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2+1}$ при $n \geqslant 1$. Тогда

A существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1,2,\ldots\}$ ограничена

B существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1,2,\ldots\}$ сходится

C существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1,2,\ldots\}$ не убывает

D существует такое число x_1, что последовательность $\{x_n, n = 1,2,\ldots\}$ не возрастает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ равен

A -1

B 0

C 1

D e

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

37. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2(1/x)(1-\cos x)}{x}$ равен

A 0

B 1

C $1/e$

D e

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Область сходимости функционального ряда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n}(x-4)^n$ равна

A $(4-1/e, 4+1/e)$

B $(4-1/e, 4+1/e]$

C $[4-1/e, 4+1/e)$

D $[4-1/e, 4+1/e]$

E множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

39. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\pi\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-1/k)\right)^n$ равен

A 0

B 1

C π^e

D e^π

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

40. Интеграл $\displaystyle\int_0^{2x}|t-x|dt$ при $x\geqslant 0$ равен

A 0

B 1

C x

D x^2

E выражению, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

3.1.2 Вторая часть теста

1. Матрица P задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^4$, и два вектора

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

являются ее собственными векторами. Известно, что ранг матрицы P равен двум, и матрица $2P - I$, где через I обозначается единичная матрица, ортогональная. Тогда

а) матрица P симметричная;

Да Нет

б) матрица P не симметричная;

Да Нет

в) существует ровно две матрицы P, удовлетворяющие поставленным условиям;

Да Нет

г) существует ровно шесть матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

д) существует бесконечно много матриц P, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

е) сумма элементов матрицы P равна 2;

Да Нет

ж) матрица P имеет ровно шесть положительных элементов;

Да Нет

з) матрица P имеет ровно шесть отрицательных элементов.

Да Нет

2. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^{\alpha}},$$

где $\alpha \geqslant 0$ — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости, а через $f(x)$ — сумму этого ряда для всех $x \in M$. Тогда

а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является открытым;

Да Нет

в) существует α, для которого множество M содержит изолированную точку;

Да Нет

г) для любого α ряд на множестве M сходится равномерно;

Да Нет

д) при $\alpha = 2$ множество M является замкнутым;

Да Нет

е) при $\alpha = 3$ ряд на множестве $M \cap [1, +\infty)$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет более 2014 решений на множестве M;

Да Нет

з) при $\alpha = 2014$ уравнение $f(x) = 2^{2014}$ имеет не более одного решения на множестве M.

Да Нет

3. Дано семейство функций $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-a}-3}{x-b}$, где параметры $a, b \in \mathbf{R}$. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}^2$ множество пар чисел (a, b), для которых существует и конечен предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, а через $K \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $f(x)$. Тогда а) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K симметрично относительно нуля;

Да Нет

б) существует бесконечно много пар чисел (a, b), для которых множество K не симметрично относительно нуля;

Да Нет

в) существует более одной пары чисел (a, b), для которых множество $\mathbf{R} \setminus K$ не замкнуто и не открыто;

Да Нет

г) существует пара чисел (a, b), для которой функция $f(x)$ ограничена на K;

Да Нет

д) множество $M \cap (-\infty, 0)^2$ не ограничено;

Да Нет

е) множество $M \cap (0, +\infty)^2$ не ограничено;

Да Нет

ж) множество значений предела $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ при $(a, b) \in M \cap (0, +\infty)^2$ ограничено;

Да Нет

з) множество значений предела $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ при $(a, b) \in M \cap \{(a, b)\colon a^2 + b^2 \leqslant 9\}$ имеет непустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2 e^{-t}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) при любом значении x_0 функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) множество значений x_0, при которых $x(t)$ ограничена на своей области определения, открыто;

Да Нет

в) существуют значения x_0, при которых $x(t)$ периодическая;

Да Нет

г) при любом x_0 множество нулей функции $x(t)$ открыто;

Да Нет

д) если в некоторой точке t значение второй производной функции $x(t)$ равно нулю, то и значение самой функции в этой точке равно нулю;

Да Нет

е) если $x_0 = 2/3$, то $\sin x(t)$ возрастает на своей области определения;

Да Нет

ж) если $x_0 = 2$, то $x(1) = \dfrac{2e}{2-e}$;

Да Нет

з) если $x_0 = -1$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -1/2$.

Да Нет

5. Дана функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon xy + yz + xz = 1\}$. Тогда

а) множество M компактное;

Да Нет

б) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

в) функция $f(x, y, z)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

г) число точек локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M не меньше трех;

Да Нет

д) точка $(1, 1, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

е) число точек локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M нечетно;

Да Нет

ж) точка $\left(0, 2, \frac{1}{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. B. **2.** E. **3.** E. **4.** B. **5.** C. **6.** D. **7.** D. **8.** A. **9.** E. **10.** C. **11.** B. **12.** C. **13.** E. **14.** A. **15.** D. **16.** E. **17.** D. **18.** B. **19.** C. **20.** D. **21.** B. **22.** E. **23.** D. **24.** A. **25.** E. **26.** A. **27.** C. **28.** B. **29.** D. **30.** E. **31.** A. **32.** A. **33.** D. **34.** B. **35.** C. **36.** C. **37.** A. **38.** C. **39.** D. **40.** D.

3.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Возведем в квадрат матрицу $2P - I$ и преобразуем полученное выражение, воспользовавшись соотношением $P^2 = P$, справедливым для проектора P:

$$(2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = 4P - 4P + I = I.$$

По условию известно, что $(2P-I)(2P-I)^T = I$ (так как матрица $2P-I$ ортогональная), поэтому $(2P - I)^T = 2P - I$, а значит и $P^T = P$ (ответы на вопросы а) — да, б) — нет).

Так как P задает проектор в $\mathbf{R}^4$ и имеет ранг 2, то она имеет два собственных числа — единицу и ноль, оба кратности 2. Так как матрица P симметричная, то она задает ортопроектор, и собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны друг другу (при стандартном скалярном произведении). И так как собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

не ортогональны, то они соответствуют одному собственному числу, обозначим его через λ. Это может быть как единица, так и ноль. В первом случае P задает ортопроектор на двумерное подпространство — линейную оболочку

$$L = \mathscr{L}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

во втором случае P задает ортопроектор на ортогональное дополнение к L. Ответы на вопросы в) — да, г) — нет, д) — нет.

Далее, заметим, что вектор

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

ортогонален обоим из заданных векторов. Поэтому это тоже собственный вектор, и он соответствует другому собственному числу $1-\lambda$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p_{ij} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} P \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} P \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \left(\lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\1-\lambda\\1-\lambda\end{pmatrix} = 2\lambda + 2(1-\lambda) = 2$$

(ответ на вопрос е) — да).

Чтобы сосчитать число положительных и отрицательных элементов матрицы P, найдем ее. А именно, воспользуемся соотношением

$$P = X \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} X^{-1},$$

где столбцы матрицы X являются соответствующими собственными векторами матрицы P. Можно заметить, что если векторы

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу λ, то векторы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ортогональны им, а значит являются собственными векторами матрицы P и соответствуют собственному числу $1-\lambda$. Также ортогонализуем исходную пару векторов (вычтем первый вектор из второго) и получим:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нормируем эти четыре вектора и получим ортонормированную систему состоящую из собственных векторов матрицы P:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

и матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix},$$

для которой $X^{-1} = X^{\mathsf{T}}$. Теперь легко сосчитать для $\lambda = 1$

$$P = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

и в ней ровно 6 отрицательных и 10 положительных элементов. Для $\lambda = 0$

$$P = I - \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix},$$

и в ней тоже ровно 6 отрицательных и 10 положтельных элементов (ответы на вопросы ж) — нет, з) — да).

Задача 2. Данный ряд имеет счётное число особенностей — он не определён в точках $x = -1, -2, -3, \ldots$. Кроме того, ряд не определён в точках, в которых $x(x-1) < 0$, т. е. на интервале $(0, 1)$, — на нём при достаточно большом значении n числитель не определён. Отметим, что для любого α ряд сходится в точках $x = 0$ и $x = 1$, и что все члены ряда неотрицательны.

а) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится в точках, сколь угодно близких к -1, поскольку при $n \geqslant 3$

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^4} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^4} = \frac{n}{|n+x|}\frac{x(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant 3\frac{x(x-1)}{|n-1|^3}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, и следовательно, сходится исходный ряд. В то же время в точке -1 ряд не определён, следовательно, множество сходимости не является замкнутым.

б) Ответ: нет. Поскольку точки 0 и 1 всегда являются точками сходимости ряда, а точки внутри интервала $(0, 1)$ таковыми не являются, то множество сходимости не является открытым.

в) Ответ: да. Например, для $\alpha = 1$ ряд сходится в точке $x = 0$, не определён при $x \in (0, 1)$ и не сходится в левой окрестности точки $x = 0$: при $x < 0$

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1 + x(x-1))}{|n+x|} \geqslant \frac{\ln(1 + x(x-1))}{n}.$$

Поскольку ряд из последних слагаемых не сходится, то и исходный ряд не сходится.

г) Ответ: нет. При $\alpha = 4$ ряд сходится на множестве $M = [0, +\infty) \cup (-1, 0] \cup \cup (-2, -1) \cup (-3, -2) \cup \ldots$ (рассуждения такие же, как и в пункте а). В то же время для любого n

$$\lim_{x \to -n} \frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|} = +\infty,$$

откуда следует, что общий член ряда не стремится к нулю равномерно на M, а значит ряд не сходится равномерно на M.

д) Ответ: нет. Мы можем оценить при $x \in (-1, 0)$ и достаточно больших n

$$\ln(1 + nx(x-1)) \leqslant \ln(1 + 2n) \leqslant Cn^{1/2},$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Тогда

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^2} \leqslant \frac{Cn^{1/2}}{|n+x|^2} = \frac{n^{1/2}}{|n+x|^{1/2}}\frac{C}{|n+x|^{3/2}} \leqslant \frac{2C}{|n-1|^{3/2}}.$$

Ряд из последних слагаемых сходится, значит, сходится и исходный ряд. В то же время, в точке -1 ряд не определен, и значит, множество M не замкнутое.

е) Ответ: да. При $\alpha = 3$ и $x \geqslant 1$ общий член ряда можно оценить следующим образом:

$$\frac{\ln(1 + nx(x-1))}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx(x-1)}{|n+x|^3} \leqslant \frac{nx^2}{(n+x)^3} \leqslant \frac{n}{(n+1)^3}$$

(последнее неравенство верно, так как функция $\dfrac{nx^2}{(n+x)^3}$ убывает при $x \geqslant 1$). Следовательно, по признаку Вейерштрасса, исходный ряд сходится равномерно.

ж–з). Отметим, что по соображениям, аналогичным пункту а), данный ряд сходится на множестве $M = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(-n, -n+1)\right) \cup [1, +\infty)$.

Отметим также, что числитель дроби убывает по x при $x < 0$.

Рассмотрим поведение ряда в полуинтервале $x \in (-n, -n+1/2]$, $n = 2, 3, \ldots$. На нём член ряда с номером n можно оценить как

$$\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} \geqslant \frac{\ln(1+n(-n+1/2)(-n-1/2))}{|1/2|^{2014}} = \\ = 2^{2014}\ln(1+n(n^2-1/4)) \geqslant 2^{2014}.$$

В то же время на полуинтервале $x \in [-n+1/2, -n+1)$ член ряда с номером $n+1$ можно оценить как

$$\frac{\ln(1+(n+1)x(x-1))}{|n+x|^{2014}} \geqslant \frac{\ln(1+(n+1)(-n+1)(-n))}{|1/2|^{2014}} = \\ = 2^{2014}\ln(1+(n+1)(n^2-n)) \geqslant 2^{2014}.$$

Поскольку все члены ряда неотрицательные и по крайней мере один из них превосходит 2014, то решений на интервалах $(-n, -n+1)$, $n = 2, 3, \ldots$ нет.

На множестве $x \in [1, \infty)$ решений нет, поскольку ряд можно оценить следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+nx(x-1))}{|n+x|^{2014}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx(x-1)}{|n+x|^{2014}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|n+x|}\frac{x^2}{|n+x|^2}\frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n+x|^{2011}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Остаётся исследовать полуинтервал $(-1, 0]$. При приближении к левой его точке сумма ряда растёт неограниченно. В правой точке значение ряда равно 0. При этом каждый член ряда убывает по x в этом полуинтервале. Следовательно, у уравнения есть единственное решение именно в полуинтервале $(-1, 0]$.

Ответ на вопрос ж) — нет, на вопрос з) — да.

Задача 3. Для последовательности пар чисел $(a, b) = (n^2, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x\colon x^2 \geqslant n^2\}$ симметрично относительно нуля, поэтому а) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (0, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $K = \{x\colon x \neq n\}$ не симметрично относительно нуля, поэтому б) — да.

Для последовательности пар чисел $(a, b) = (n^2, n)$, $n = 1, 2, \ldots$, множество $R \setminus K = (-n, n]$ не замкнуто и не открыто, поэтому в) — да.

Для пары чисел $(a, b) = (1, 0)$, множество $K = \{x\colon x^2 \geqslant 1\}$, и $|f(x)| \leqslant |\sqrt{1 - x^{-2}}| + |3/x| < 4$ на K, поэтому г) — да.

Если предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ конечен, то необходимо, чтобы $\lim\limits_{x\to b} \sqrt{x^2 - a} - 3 = 0$, т. е. $a = b^2 - 9$. Поэтому $M \cap (-\infty, 0)^2 \subset [-9, 0]^2$, д) — нет.

Если $a = b^2 - 9$, то предел $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ существует и равен $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a}} = b/3$, а $M = \{(a, b) \in R^2\colon a = b^2 - 9\}$, поэтому е) — да, ж) — нет.

Парабола $a = b^2 - 9$ пересекает окружность $a^2 + b^2 = 9$ в четырех точках: $(0, 3)$, $(0, -3)$, $(-1, 2\sqrt{2})$ и $(-1, -2\sqrt{2})$. На множестве $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$ параметер b принимает значения $[-3, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, 3]$. Так как $e < 2.8 < 2\sqrt{2}$, то множество значений предела $\lim\limits_{x\to b} f(x) = b/3$, имеет пустое пересечение с множеством $(-e/3, e/3)$, поэтому з) – нет (см. рис.

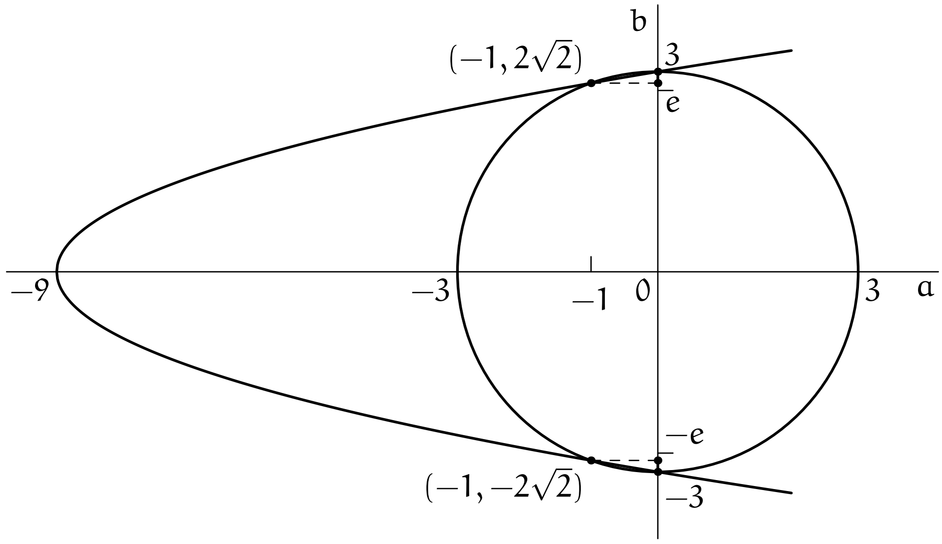

Рис. 1. Множество $M \cap \{a^2 + b^2 \leqslant 9\}$

Задача 4. Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = e^{-t} dt,$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = -e^{-t},$$

так что при $x_0 \neq 0$

$$x(t) = \frac{1}{e^{-t} + 1/x_0 - 1}.$$

Видно, что при $x_0 > 1$ знаменатель обращается в ноль при некотором t (ответ на вопрос а) — нет). Далее, при $x_0 = 0$ решение тождественно равно нулю (ответ на вопрос в) — да), а при любом отрицательном x_0 знаменатель обращается в 0 при некотором t_0 и при приближении к t_0 решение неограниченно растет по абсолютной величине (ответ на вопрос б) — нет). Функция $x(t)$ не обращается в ноль ни при каких t при $x_0 \neq 0$ (ответ на вопрос г) — да). Для ответа на вопрос д) заметим, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}x^2e^{-t} = -x^2e^{-t} + 2xe^{-t}\frac{dx}{dt} = x^2e^{-t}\left(2xe^{-t} - 1\right),$$

что, например, при $x_0 = e/(e+1)$ обращается в ноль при $t = 1$, так что ответ — нет.

При $x_0 = 2/3$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} + 1/2)$ возрастает на всей прямой, принимая значения в интервале $(0, 2)$, однако функция $\sin x$ на этом интервале не возрастает монотонно (ответ на вопрос е) — нет). При $x_0 = 2$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 1/2)$ определено только при $t < \ln 2$ (ответ на вопрос ж) — нет). Наконец, при $x_0 = -1$ решение $x(t) = 1/(e^{-t} - 2)$ определено при всех $t > 0$ и стремится к $-1/2$ при $t \to +\infty$ (ответ на вопрос з) — да).

Задача 5. Заметим, что точка $(n, 1/n, 0)$ принадлежит множеству M при любом натуральном n. Значит, множество M не ограничено, а значит и не является компактным. Ответ на вопрос а) — нет. Имеем $f(n, 1/n, 0) = n^2 + 1/n^2$, т. е. значения функции $f(x, y, x)$ на M не ограничены сверху. Поэтому ответ на вопрос б) — нет.

Так как $f(x, y, z) \geqslant 0$ при всех x, y, z, то существует точная нижняя грань $\inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\}$. Обозначим ее через a. Точка $(1, 1, 0)$ принадлежит M, и $f(1, 1, 0) = 2$, значит $a \leqslant 2$. Рассмотрим куб $K = \{(x, y, z)\colon |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2, |z| \leqslant 2\}$. Ясно, что если $(x, y, z) \notin K$, то $f(x, y, z) > 2$. Значит,

$$a = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M\} = \inf\{f(x, y, z), (x, y, z) \in M \cap K\}.$$

Множество M замкнуто как поверхность уровня непрерывной функции, а куб K компактен. Значит, множество $M \cap K$ компактно, и по теореме Вейерштрасса точная нижняя грань достигается, поскольку функция $f(x, y, z)$ непрерывна. Ответ на вопрос в) — да.

Обозначим $g(x, y, z) = xy + xz + yz - 1$. Нетрудно проверить, что градиент функции $g(x, y, z)$ равен нулю только в точке $(0, 0, 0)$, а она не принадлежит M. Поэтому функцию Лагранжа для этой задачи можно взять сразу в виде $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(y + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(x + z) = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda(x + y) = 0. \end{cases}$$

Складывая почленно все уравнения, получаем $(x + y + z)(\lambda + 1) = 0$.

1-й случай: $x + y + z = 0$. Возводя в квадрат обе части равенства и проводя элементарные преобразования, получаем $xy + xz + yz = -\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \leqslant 0$, что несовместимо с ограничением $g(x, y, z) = 0$.

2-й случай: $\lambda = -1$. Вычитая из первого уравнения второе получаем $x = y$, и аналогично $y = z$. Следовательно, единственной стационарной точкой задачи является точка $A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Поскольку существование наименьшего значения функции $f(x, y, z)$ на множестве M доказано, то точка A и есть единственная точка, в которой это наименьшее значение достигается.

Ответы на вопросы г), д), ж) — нет, на вопросы е), з) — да.

4 Формат вступительного экзамена 2015 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена для программы МЭРЭ 2.5 часа, для программы МАЭ 4 часа, максимальная оценка — «12».

Каждый тест состоял из двух частей. Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, для абитуриентов программы МАЭ одинаково. Для абитуриентов программы МЭРЭ первая часть теста имеет больший вес. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест 1 (общий для программ МАЭ и МЭРЭ)

4.1.1 Первая часть теста

1. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = (y+1)\cos 8x$, $y(0) = 0$. Тогда $y(x)$

A определена при $x = 1/4$, но не определена при $x = 1/2$

B определена при $x = 1/2$, но не определена при $x = 1$

C определена при $x = 1$, но не определена при $x = 2$

D определена при $x = 2$, но не определена при $x = 4$

E определена при $x = 4$

2. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^2 \sin x$, $y(0) = 1$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки 0, причем $f(0) = g(0) = 0$. Тогда

A функция $f(g(x))$ определена в некоторой окрестности точки 0, причем $f(g(0)) = 0$

B если функция $f(x)$ непрерывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ непрерывна в точке 0

C если функция $f(x)$ разрывна в точке 0, то и функция $g(f(x))$ разрывна в точке 0

D если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке 0, то и функция $\operatorname{arctg}(f^2(x) + g^2(x))$ непрерывна в точке 0.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной прямой. Тогда

A если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{tg} f(x)$ достигает наибольшего значения

B если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{arctg} f(x)$ достигает наибольшего значения

C если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

D если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Функция $f(x, y) = \operatorname{tg}(\pi xy/2)$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

C достигает наибольшего значения ровно в шести точках

D достигает наибольшего значения ровно в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

6. Функция $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ на множестве $\{(x, y) \colon x^2 + 4xy + 4y^2 = 2\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

7. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках, не совпадающих ни с 0, ни с 1. Тогда

A функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее, чем в трех точках

B функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения не менее, чем в двух точках

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$, то производная $f'(x)$ равна нулю не менее, чем в трех точках

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наименьшего значения не менее чем в трех точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Функция $f(x)$ отображает отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[0, 1]$. Тогда

A если функция $f(x)$ непрерывна, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

B если функция $f(x)$ монотонно убывает, то существует точка x такая, что $f(x) = x$

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x такая, что $f'(x) = 0$

D если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(0, 1)$ то существует точка x такая, что $f'(x) = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Интеграл $\int_{-1}^{0} \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$ равен

A $-6\ln 2$

B $-18\ln 2$

C $-2\ln 2$

D $6\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

10. Интеграл $\int_{0}^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin x - 1)dx$ равен

A 0

B $1 - 3\pi/4$

C $1 - \pi/4$

D $1 - \pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

11. Интеграл $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ равен

A 0

B $\ln 2$

C $-\ln 2$

D 2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

12. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{0}^{n} \frac{(2+n)^n}{(1+x^2)n^n}\,dx$ равен

A $e^2\pi$

B $e^2\pi/6$

C $e^2\pi/4$

D $e^2\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

13. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 e^{-x}}{1-\cos x}$ равен

A 2

B $2e$

C 4

D $4e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

14. Предел $\lim\limits_{x\to 1+0} x^{2/(x^2-1)}$ равен

A 2

B e

C 1

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

15. Интеграл $\int_0^1 \left(\sin^2 x + \operatorname{tg} x\right) dx$ равен

A $1/2 - 1/4 \sin 1 - \ln(\cos 1)$

B $1/2 - 1/4 \sin 1 + \ln(\cos 1)$

C $1/2 - 1/4 \sin 2 - \ln(\cos 1)$

D $-1/2 + 1/4 \sin 2 - \ln(\cos 1)$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - 1 - x - x^2}{x^2}$

A равен 0

B равен $1/2$

C равен $-1/2$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

17. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x) - x + x^2}{\ln x + x - x^2}$

A равен -3

B равен -1

C равен 3

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

18. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^4}$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

19. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=3}^{n} \dfrac{3}{k^2 - k - 2}$

A равен 0

B равен $1/3$

C равен $\dfrac{\ln 2}{2}$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

20. Для натуральных чисел m, n предел $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(mx)}{\sin(nx)}$

A равен $(-1)^{m-n}\dfrac{m}{n}$

B равен $(-1)^{m-n}\dfrac{n}{m}$

C равен $\dfrac{m}{n}$

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

21. Сумма ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{5\cdot 7}} + \dots$$

равна

A $\sqrt{2}$

B $2\sqrt{3}$

C $3\sqrt{3}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

22. Сумма ряда
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n!}$$
равна

A $\dfrac{1}{\ln 2}$

B $\dfrac{1}{\ln 3}$

C $\dfrac{1}{\ln 4}$

D числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

23. Предел $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\operatorname{ctg} x$

A равен 0

B равен 1

C равен -1

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

24. Пусть $f(x, y) = x^2 + y^2$ и $M = \{(x, y)\colon x^2y = 1\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в одной точке

B функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в одной точке

D функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения ровно в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся, последовательность $\{y_n\}$ — расходящейся. Тогда

A последовательность $\{x_n y_n\}$ является расходящейся

B если $y_n \neq 0$ при всех n, то последовательность $\{x_n/y_n\}$ является расходящейся

C если $x_n > 0$ при всех n, то последовательность $\{x_n^{y_n}\}$ является расходящейся

D если $y_n > 0$ при всех n, то последовательность $\{y_n^{x_n}\}$ является расходящейся

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^3 + y^3 + 2x^2y^2 = 17$. Через точку $(1, 2)$ проведена касательная $y = kx + b$ к этой кривой. Тогда угловой коэффициент k этой касательной равен

A $19/20$

B $-19/20$

C $20/19$

D $-20/19$

E числу, отличному от перечисленных в A–D

27. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$, непрерывна и положительна. Тогда предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

равен

A $\exp\left(\int_0^1 \ln f(x)dx\right)$

B $\ln\left(\int_0^1 \exp f(x)dx\right)$

C $\exp\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$

D $\ln\left(\int_0^1 f(x)dx\right)$

E числу, отличному от указанных в A–D, или не существует

28. Пусть $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} y\sqrt{1+y}\,dy$. Тогда производная $f'(2)$

A равна $16\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

B равна $8\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

C равна $4\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

D равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

29. Даны матрицы A и B размера $m \times n$, где m, $n \geqslant 2$, у которых строки линейно независимые. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X. Тогда

A матрица AA^T невырожденная

B матрица B^TB невырожденная

C матрица AB^T невырожденная

D матрица A^TB невырожденная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. В линейном пространстве даны две системы векторов $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Через L_X и L_Y обозначим линейные оболочки систем X и Y соответственно, а через $\dim L_X$ и $\dim L_Y$ — их размерности. Тогда

A если $n > m$, то $\dim L_X > \dim L_Y$

B если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система Y линейно независимая, то $n > m$

C если $\dim L_X > \dim L_Y$ и система X линейно зависимая, то $n > m$

D если $\dim L_X = \dim L_Y$, то $n = m$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

32. Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ равен

A	-1
B	0
C	1
D	2
E	не существует

4.1.2 Вторая часть теста

1. Функция одной вещественной переменной задана формулой $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} |x^2 - 1|^{1/n} \operatorname{arctg}(x^n)$. Тогда

а) областью определения функции $f(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) областью определения функции $f(x)$ является полуинтервал $(-1, +\infty)$;

Да Нет

в) область определения функции $f(x)$ является замкнутым множеством;

Да Нет

г) на промежутке $(-1, 1)$ функция $f(x)$ четная;

Да Нет

д) в области определения функция $f(x)$ имеется один устранимый разрыв;

Да Нет

е) в области определения функция $f(x)$ имеется один неустранимый разрыв первого рода;

Да Нет

ж) множество значений функции $f(x)$ состоит из трех точек 0, $\pi/4$, $\pi/2$;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

2. Дана функция $f(x, y) = 2x - y$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 + xy = -3\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетно;

Да Нет

г) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M четно;

Да Нет

д) точка $(1, -4)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(2, -\frac{7}{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(-1, 4)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) существует точка A локального минимума и точка B локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M, такие что $f(A) > f(B)$.

Да Нет

4.2 Тест 2 (программа МАЭ)

4.2.1 Первая часть теста

33. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \sin x)^{\ln(x^2+1)} - 1}{x^3}$

A равен -1

B равен 0

C равен 1

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

34. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2015 + n}{3^n}$$

равна

A $\dfrac{3\cdot 4033}{4}$

B $\dfrac{4033}{2}$

C $\dfrac{4033}{4}$

D $\dfrac{4033}{8}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

35. Пусть M — множество тех вещественных чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x^2+2}-1)$. Для $x\in M$ обозначим через $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x^2+2}-1)$. Найдите *ложное* утверждение.

A M — открытое множество

B M — замкнутое множество

C уравнение $f(x)=\ln 2$ имеет единственное решение

D $f'(1)=1$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

36. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $[0,+\infty)$. Найдите *ложное* утверждение.

A если $\int_0^1 f(x)dx>0$, то существует такой отрезок $[a,b]\subset[0,1]$, что $f(x)>0$ для любого $x\in[a,b]$

B если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$, то существует предел $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$ и этот предел равен a

C если не существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то не существует предел $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$

D если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[0,1]$, то для любого числа $a\in$ $\in(0,1)$ выполнено неравенство $a\int_0^1 f(x)dx\leqslant\int_0^a f(x)dx$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

37. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$. Тогда

A матрица A имеет три разных вещественных собственных числа

B у матрицы A для всех вещественных собственных чисел их геометрическая кратность совпадает с алгебраической

C ноль является собственным числом матрицы A, и размерность соответствующего собственного подпространства равна 2

D наибольшее вещественное собственное число матрицы A равно 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

38. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, где α — вещественный параметр. Тогда

A при всех α система $Ax = 0$ имеет единственное решение

B найдется α, такое что множество решений системы $Ax = 0$ двумерное

C найдется единственное α, такое что множество решений системы $Ax = 0$ одномерное

D найдется ровно два значения α, таких что множество решений системы $Ax = 0$ одномерное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Квадратная матрица A трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 4$, в котором задано стандартное скалярное произведение. Через X^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице X, и через $L^\perp$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству L. Тогда

A если $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp$, то $A = A^T$

B если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^T$, то $A = A^T$

C если $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^T$, то $A = A^T$

D если $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A$, то $A \neq A^T$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Симметричная матрица A задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 3$, причем известно, что матрица A не является ни нулевой, ни единичной. Через x^T обозначим строку, транспонированную к столбцу x. Тогда

A множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = 1\}$ ограниченное

B множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = -1\}$ неограниченное

C множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = 0\}$ ограниченное

D множество $\{x \in \mathbf{R}^n : x^T A x = 0\}$ является подпространством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4.2.2 Вторая часть теста

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2+1}, \ x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) при любом значении x_0 функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) при любом значении x_0 функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) существуют значения x_0, при которых $x(t)$ периодическая;

Да Нет

г) множество значений x_0, при которых область определения функции $x(t)$ открыта, открыто;

Да Нет

д) существует значение $x_0 \neq 0$, при котором $x(t)$ нечетна на своей области определения;

Да Нет

е) при $x_0 \neq 0$ функция $x(t)$ не обращается в ноль на своей области определения;

Да Нет

ж) если $x_0 = \pi/2$, то $x(1) = 4/\pi$;

Да Нет

з) если $x_0 = 4/\pi$, то $x(\sqrt{3}) = \pi/12$.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^x}{|x|^n}$. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$. Тогда

а) множество M является симметричным относительно нуля;

Да Нет

б) множество M является замкнутым;

Да Нет

в) множество M не является открытым;

Да Нет

г) функция $f(x)$ ограничена на множестве $(-\infty, -1)$;

Да Нет

д) на множестве M ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) на множестве $[100, +\infty)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) уравнение $f(x) = 0$ имеет более одного решения на множестве $(-\infty, -1)$;

Да Нет

з) множество отрицательных решений уравнения $f(x) = 1/x$ ограничено.

Да Нет

5. Матрица A размера $m \times n$ и матрица B размера $n \times m$, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2m$, трактуются как линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ соответственно. Известно, что существует матрица $P = B(AB)^{-1}A$. Также в $\mathbb{R}^n$ задано стандартное скалярное произведение. Тогда

а) ранг матрицы P равен n;

Да Нет

б) ранг матрицы P равен m;

Да Нет

в) ядро матрицы A совпадает с образом матрицы B;

Да Нет

г) пересечение ядра матрицы A и образа матрицы B есть нулевое подпространство;

Да Нет

д) матрица P симметричная;

Да Нет

е) матрица P задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

ж) если $AB = I$, где через I обозначается единичная матрица, то матрица P задает ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

з) если ядро матрицы A ортогонально образу матрицы B, то матрица P задает ортогональный проектор в $\mathbf{R}^n$.

Да Нет

4.3 Ответы и решения теста

4.3.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** A. **3.** D. **4.** B. **5.** A. **6.** E. **7.** C. **8.** A. **9.** A. **10.** C. **11.** B. **12.** D. **13.** A. **14.** B. **15.** C. **16.** E. **17.** D. **18.** E. **19.** A. **20.** A. **21.** E. **22.** E. **23.** C. **24.** D. **25.** E. **26.** B. **27.** A. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** C. **32.** A. **33.** A. **34.** C. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** D. **39.** D. **40.** D.

4.3.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Обозначим через M область определения функции $f(x)$, то есть множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} |x^2-1|^{1/n} \operatorname{arctg}(x^n)$.

Очевидно, что $1 \in M$, $-1 \in M$ и $f(-1) = f(1) = 0$. Заметим, что если $x \neq -1$ и $x \neq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x^2-1|^{1/n}$. Если $x < -1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n)$ не существует, поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{arctg}(x^{2k}) = \pi/2$, $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{arctg}(x^{2k+1}) = -\pi/2$. Значит $(-\infty, -1) \cap M = \varnothing$. Если $-1 <$ $< x < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n) = 0$. Если $x > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(x^n) = \pi/2$. Окончательно получаем: $M = [-1, +\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \pi/2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Получаем ответы: а) — нет, б) — нет, в) — да, г) — да, д) — нет, е) — да, ж) — нет, з) — да.

Задача 2. Множество M можно представить в виде $M = \{(x,y)\colon y = -3/x - x\}$. Ясно, что если $(x,y) \in M$ и $x \to 0+$, то $y \to -\infty$ и $f(x,y) \to +\infty$; если $(x,y) \in M$ и $x \to 0-$, то $y \to +\infty$ и $f(x,y) \to -\infty$. Следовательно, функция $f(x,y)$ на множестве M не ограничена ни сверху, ни снизу. Ответы на вопросы а) и б) — нет.

Обозначим для краткости $g(x,y) = x^2 + xy + 3$. Имеем: $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x + y$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = x$. Система $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, $y = 0$, которое не удовлетворяет ограничению $g(x,y)=0$. Иными словами, все точки множества M регулярны. Поэтому функция Лагранжа в данном случае имеет вид $L(x,y,\lambda) = 2x - y + \lambda(x^2+xy+3)$. Условия первого порядка:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x + \lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -1 + \lambda x = 0,$$

откуда следует, что $\lambda x = 1$, $\lambda y = -4$ и $y = -4x$. Учитывая ограничение $g(x,y)=0$, получаем две точки, подозрительные на экстремум:

$$A_1 = (1,-4), \quad \lambda = 1, f(1,-4) = 6,$$

и

$$A_2 = (-1,4), \quad \lambda = -1, f(-1,4) = -6,$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа есть $D^2L = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Направления допустимых вариаций $dg(x,y)=0$ имеют вид $(2x+y)dx + xdy = 0$.

Для точки A_1 получаем следующую квадратичную форму:

$$\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} D^2L \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx & 2dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx & 2dx \end{pmatrix} = 6dx^2.$$

Значит, точка A_1 — это точка локального минимума. Аналогично получаем, что точка A_2 — это точка локального максимума.

Получаем ответы: в) — да, г) — нет, д) — да, е) — нет, ж) — да, з) — да.

Задача 3. Решим данное дифференциальное уравнение. Это уравнение сразделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{t^2+1}, \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{x} = \operatorname{arctg} t + C.$$

Таким образом, общее решение равно $x(t) = \dfrac{1}{-C - \operatorname{arctg} t}$, и если подставить начальное условие $x(0) = x_0$, то получим $x(t) = \dfrac{1}{1/x_0 - \operatorname{arctg} t}$. Кроме того, при разделении переменных мы потеряли нулевое решение $x(t) \equiv 0$, добавим его. Можно перенести x_0 в числитель дроби, тогда общее решение уравнения примет вид

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 \operatorname{arctg} t}.$$

На каком интервале определено *максимальное решение* при разных x_0? Оно продолжается до тех пор, пока $1 - x_0 \operatorname{arctg} t \neq 0$. Следовательно, для $x_0 \in [-2/\pi, 2/\pi]$ решение $x(t)$ определено при всех $t \in \mathbf{R}$, для $x_0 > 2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t \in (-\infty, \operatorname{tg}(1/x_0))$, и для $x_0 < -2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t \in (\operatorname{tg}(1/x_0), +\infty)$. Таким образом, ответ на вопрос (а) — нет.

При $x_0 > 2/\pi$, если $t \to \operatorname{tg}(1/x_0)-$, то $x(t) \to +\infty$, поэтому ответ на вопрос (б) — нет.

При $x_0 = 0$ функция $x(t) \equiv 0$, это тривиальная периодическая функция, так что ответ на вопрос (в) — да.

Так как максимальное решение задачи Коши всегда определено на интервале, и решение существует при любом начальном условии x_0, то ответ на вопрос (г) — да, множество таких x_0 совпадает с $\mathbf{R}$.

Если функция $x(t)$ нечетная, то $x(0) = 0$, а это и есть x_0. Ответ на вопрос (д) — нет.

Так как правая часть уравнения непрерывна при всех значениях $x \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, то уравнение удовлетворяет теореме единственности, поэтому графики никаких двух решений не пересекаются. Так как функция $x(t) \equiv 0$ при $t \in \mathbf{R}$ является решением уравнения, то никакое другое решение не равно нулю ни в одной точке. Ответ на вопрос (е) — да.

При $x_0 = \pi/2 > 2/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t < \operatorname{tg}(2/\pi) < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, поэтому $x(1)$ не определено, и ответ на вопрос (ж) — нет.

При $x_0 = 4/\pi$ решение $x(t)$ определено при $t < \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$, поэтому $x(\sqrt{3})$ не определено, и ответ на вопрос (з) — нет.

Задача 4. Рассмотрим данный ряд при $x = 1$ и $x = -1$. При $x = 1$ это $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, он расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$. При $x = -1$ это $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, то есть ряд сходится как ряд Лейбница. Значит ответ на вопрос (а) — нет.

Заметим, что при $|x| > 1$ ряд сходится абсолютно. Действительно,

$$\frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \frac{(n+1)^x|x|^n}{n^x|x|^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \frac{1}{|x|} \to \frac{1}{|x|}$$

при $n \to \infty$. Поэтому по признаку Даламбера ряд из абсолютных величин сходится. Отсюда следует, что множество M не замкнутое, так как его предельная точка 1 ему не принадлежит (ответ на вопрос (б) — нет).

Если теперь рассмотреть любое $x \in (-1, 1)$, то легко видеть, что $\frac{n^x}{|x|^n} \to +\infty$ при $n \to \infty$, и ряд расходится. Так как он сходится в точке $x = -1$, то множество M не является открытым (ответ на вопрос (в) — да). Мы получили, что множество $M = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.

Для ответа на вопросы (д) и (е) рассмотрим общий член ряда $a_n(x)$ в точке $x = n$. Он равен

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n n^n}{|n|^n} = (-1)^n.$$

Отсюда следует, что при $n \geqslant 100$ верхняя грань $\sup\limits_{x\in M}|a_n(x)| \geqslant \sup\limits_{x\in[100,+\infty)}|a_n(x)| \geqslant 1$, то есть общий член ряда не сходится к нулю равномерно ни на $[100, +\infty)$, ни тем более на всем M. Поэтому ряд равномерно не сходится. Ответ на вопрос (д) — нет, на вопрос (е) — нет.

При отрицательных $x \in M$ данный ряд является рядом Лейбница общим членом. Так как его первый член отрицательный, то для его суммы $f(x)$ выполняются неравенства

$$f(x) \geqslant a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) = -\frac{1}{|x|} + \frac{2^x}{|x|^2} - \frac{3^x}{|x|^3} > \frac{1}{x}$$

и

$$f(x) \leqslant a_1(x) + a_2(x) = -\frac{1}{|x|} + \frac{2^x}{|x|^2} < 0.$$

Поэтому ни у уравнения $f(x) = 0$, ни у уравнения $f(x) = 1/x$ отрицательных решений не существует. Поэтому ответ на вопрос (ж) — нет, на вопрос (з) — да.

Задача 5. Так как существует матрица $P = B(AB)^{-1}A$, то матрица AB невырожденная, и следовательно имеет ранг m. Так как $\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} A$ и $\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} B$, то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = m$ (больше, чем m он быть не может, так как матрица A имеет m строк, а матрица B имеет m столбцов).

Рассмотрим матрицу $APB = AB(AB)^{-1}AB = AB$. Ее ранг равен m. Но так как $\operatorname{rank} APB \leqslant \operatorname{rank} P$, то $\operatorname{rank} P \geqslant m$. А так как $P = B(AB)^{-1}A$, то $\operatorname{rank} P \leqslant m$, а значит он равен m (ответы на вопросы (а) — нет, (б) — да).

Если $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} B$, то $AB = 0$, что невозможно, так как матрица AB невырожденная (ответ на вопрос (в) — нет).

Если $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B$, то $ABx = 0$, а так как AB невырожденная, то и $x = 0$ (ответ на вопрос (г) — да).

Для построения примера несимметричной матрицы P можно взять блочные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица 2×2. Тогда $AB = I$ и

$$P = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос (д) — нет). Этот же пример подходит и для вопроса (ж), так как несимметричная матрица P не задает ортогональный проектор при стандартном скалярном произведении (ответ — нет).

Рассмотрим теперь матрицу $P^2 = B(AB)^{-1}AB(AB)^{-1}A = B(AB)^{-1}A = P$. Отсюда по характеристическому свойству проектора получаем, что матрица P задает оператор проектирования (ответ на вопрос (е) — да).

И наконец, так как P задает проектор, то ее образ является подпространством, на которое происходит проектирование, а ее ядро является подпространством, параллельно которому происходит проектирование. Если они ортогональны друг другу, то проектирование ортогональное (ответ на вопрос (з) — да).

5 Формат вступительного экзамена 2016 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена для абитуриентов программы МЭРЭ 2.5 часа, для абитуриентов программы МАЭ 4 часа, максимальная оценка — «12».

2. Каждый тест состоит из двух частей.

   Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет». Число вопросов в пределах каждого блока может быть различным.

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «+1»
   * неправильный ответ — «−0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «+1»
   * неправильный ответ — «−1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, для абитуриентов программы МАЭ одинаково. Для абитуриентов программы МЭРЭ первая част имеет больший вес.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780—819 баллов	11
750—779 баллов	10
720—749 баллов	9
680—719 баллов	8
640—679 баллов	7
600—639 баллов	6
560—599 баллов	5
520—559 баллов	4
480—519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской экономической школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей;
* подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы для программ МЭРЭ и МАЭ проводятся с **марта по июль 2016 г., начало занятий 9 марта.** Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда, 3 ак. часа лекция, и пятница, 2 ак. часа семинар).

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. +7-495-956-9508 (доб. 103), email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись лекций на подготовительных курсах РЭШ по математике. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Календарь абитуриента 2016 г.

8.1 Заполнение анкеты с приложениями online

с 1 июня по 10 августа 2016 г.

8.2 Вступительные экзамены

с 12 по 16 августа 2016 г.

8.3 Прием документов для прошедших по конкурсу

до 19 августа 2016 г. обучения

9 Приемная комиссия РЭШ

Телефоны: +7-495-956-9508 (доб. 103, 143), +7-903-188-5516.

Email: abitur@nes.ru.

Web: http://www.nes.ru.

Адрес: 143026, Москва, деревня Сколково, ул. Новая, д.100А, РЭШ