Современная экономическая наука и образование в России

РЭШ
Российская экономическая школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ПРОГРАММУ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» В РЭШ В 2024 ГОДУ

Москва 2024

Головань С. В., Катышев П. К., Малокостов А. М., Тонис А. С.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в РЭШ в 2024 году. — М., 2024 — 74 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в Российскую экономическую школу на программу «Магистр экономики» в 2024 году.

Содержание

1 Программа вступительного экзамена **5**

1.1 Математический анализ 5

1.2 Литература 9

1.3 Линейная алгебра 9

1.4 Литература 13

2 Вступительный экзамен 2021 г. **15**

2.1 Тест 15

2.2 Ответы и решения теста 27

3 Вступительный экзамен 2022 г. **34**

3.1 Тест 34

3.2 Ответы и решения теста 47

4 Вступительный экзамен 2023 г. **52**

4.1 Тест 52

4.2 Ответы и решения теста 64

5 Формат вступительного экзамена 2024 г. **71**

6 Подготовительные курсы по математике **73**

7 Подготовительные курсы по математике на видео **73**

8 Приемная комиссия РЭШ **74**

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене на программу «Магистр экономики».

Содержание и форма экзамена в течение ряда лет оставались неизменными.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена по математике.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2021–2023 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

   Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. **Предел последовательности**

   Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

   Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. **Предел функции. Непрерывность функций (отображений)**

   Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

   Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

   Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

   Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

   Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. **Числовые функции одного (числового) аргумента**

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. **Дифференцирование функций в $\mathbb{R}^1$**

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. **Производные и дифференциалы функций нескольких переменных** (**в** $\mathbb{R}^n$)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$**

   Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

    Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

    Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

    Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

    Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. **Степенные ряды**

    Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**
Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М.: Высшая школа, 1999.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М.: Наука, 1980.
3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 2000.
4. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1984.
5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Изд-во МГУ, 1987.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989.
7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
8. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982.
9. Рудин У., *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
10. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1979.
11. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
12. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1964.
13. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М.: Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**
Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай

умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. Линейные операторы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. **Евклидовы пространства**

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**
   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М.: Физматлит, 2004.
2. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М.: Наука, 1987.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М.: Наука, 1964.
4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1974.
5. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. М.: Наука, 1966.
6. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М.: Наука, 1971.
7. Ефимов А. В., Демидович Б. П., ред., *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. М.: Наука, 1981.
8. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М.: Наука, 1970.
9. Ильин В. А., Ким Г. Д., *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*. М.: Изд-во МГУ, 1998.
10. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1984.

11. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М.: Изд-во МГУ, 1987.

12. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1963.

13. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

14. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М.: Наука, 1980.

15. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М.: Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2021 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x(e^x+1)}, & x \neq 0, \\ e^{-1}, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $f(x)$

A непрерывная

B четная

C достигает наибольшего значения на $\mathbf{R}$

D достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Предел $\lim\limits_{x\to\pi-}(\sin^2 x)^{\operatorname{tg}(x/2)}$ равен

A 0

B 1

C e

D $\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

3. Дана функция $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ и множество $M=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon x^2+3xy+y^2=2\}$. Тогда

A наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M равно $\ln(7/5)$

B наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M достигается в точке $(x,y)=(\sqrt{2/5},\sqrt{2/5}\,)$

C наименьшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M равно $\ln(4/5)$

D наименьшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M достигается в точке $(x,y)=(-\sqrt{2/5},\sqrt{2/5}\,)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ задана рекуррентно: $x_1=a$, $x_{n+1}=x_n^2/4+1$, $n=1$, 2, ..., где $a\geqslant 0$. Тогда

A существует такое число $a\geqslant 0$, что последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ является строго убывающей

B при любом $a\geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ является ограниченной

C при любом $a\in[0,1]$ последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ сходится

D при любом $a\in[2,3]$ последовательность $\{x_n, n=1,2,\dots\}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Функция $f(x,y)=2|x|-|y|$ на множестве $\{(x,y)\colon xy=16\}$

A достигает наименьшего значения в единственной точке

B достигает наименьшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения в единственной точке

D достигает наибольшего значения ровно в двух точках

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Функция

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 8x + 24}$$

на интервале $(-4, 0)$

A ограничена сверху и достигает наибольшего значения

B ограничена сверху, но не достигает наибольшего значения

C ограничена снизу и достигает наименьшего значения

D неограничена ни сверху, ни снизу

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные.

7. Через точку (a, b), $a > 0$, $b > 0$ координатной плоскости проведена прямая, пересекающая оси в положительных точках. Чему равен угловой коэффициент этой прямой, если отрезок прямой, заключенный между осями, имеет наименьшую длину?

A $-b/a$

B $-\sqrt{b/a}$

C $-\sqrt[3]{b/a}$

D $-\sqrt[3]{b^2/a}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

8. Пусть $f_n(x) = ne^{-n|x|}$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через M множество тех x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A $(0, 2) \subset M$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$

B последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на M

C $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 (x + 4)f_n(x)dx = 4$

D функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Существует касательная прямая к окружности $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$, проходящая через начало координат и имеющая угловой коэффициент, равный

A $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

B $\frac{5-\sqrt{2}}{2}$

C $\frac{6-\sqrt{3}}{4}$

D $\frac{7-\sqrt{2}}{5}$

E не существует касательной к указанной окружности, проходящей через начало координат и угловым коэффициентом, равным одному из перечисленных в A, B, C, D

10. Неявная функция $y(x)$ в окрестности точки $A = (x, y) = (-1, 1)$ задана соотношением $3x^3 + 2x^2 - 4x + 4y^2 + 2y - 9 = 0$. Тогда площадь треугольника, образованного координатными осями и касательной к графику функции $y(x)$, проведенной в точке A, равна (укажите ближайшее число)

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

11. Многочлен $p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ на вещественной прямой

A имеет один корень

B имеет два корня

C имеет три корня

D имеет четыре корня

E имеет больше четырех корней либо совсем не имеет корней

12. Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25n^2 - 5n - 6}$$

равна

A 1

B 1/2

C 1/5

D $1/10$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Известно, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Тогда

A функция $f(x)$ достигает наименьшего значения

B функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

C функция $f(x)$ имеет локальный экстремум

D существует такая точка x_0, что $f(x_0) = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Множество $M \subset \mathbf{R}$ не имеет предельных точек. Тогда

A множество M замкнутое

B множество M открытое

C множество M ограниченное

D множество M содержит не изолированные точки

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left(\sqrt{n+1}\right) - \cos\left(\sqrt{n}\right)\right)$ равен

A $-1/2$

B 0

C $1/2$

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

16. Дана функция $f(x, y) = x + y$ и множество $M = \{(x, y) \colon 2\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 2\}$. Тогда

A число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M не больше 2

B точка $(16/25, 4/25)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

C в точке $(1, 0)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M

D число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M четно

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+a_1)(n+a_2)(n+a_3)}-n\right)$, где a_1, a_2, $a_3>0$, равен

A	$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$

B	$\sqrt[3]{a_1+a_2+a_3}$

C	$\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+a_3^3}$

D	$\dfrac{\ln(a_1a_2a_3)}{3}$

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

18. Задана функция

$$f(x)=\begin{cases} x^4\sin(1/x), & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Какие из утверждений I, II, III являются истинными?

I. Функция $f(x)$ непрерывна в $\mathbf{R}$

II. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}$

III. Функция $f(x)$ дважды дифференцируема в $\mathbf{R}$ и вторая производная разрывна

A	только I

B	только II

C	только I, II

D	I, II, III

E	ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильный набор ответов

19. Дана функциональная последовательность $\left\{f_n(x)=\dfrac{nx^3}{1+n^2x^6}, n=1,2,\ldots\right\}$. Обозначим через M множество тех $x\in\mathbf{R}$, для которых существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, и для $x\in M$ обозначим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. Тогда

A	множество M ограниченное

B	функция $f(x)$ неограниченная

C	последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-1,1]$

D	последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[2,+\infty)$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n^2}$. Обозначим его сумму через $S(x)$. Найдите ***ложное*** утверждение.

A ряд сходится при любом вещественном x

B на множестве $[0, +\infty)$ ряд сходится равномерно

C уравнение $S(x) = 1$ имеет единственное решение

D функция $S(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

21. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(\ln(x+y))^n$. Обозначим через M множество тех точек (x, y), для которых ряд сходится, и через $S(x, y)$ — сумму ряда для $(x, y) \in M$. Тогда

A множество M открытое

B множество M замкнутое

C множество M ограниченное

D функция $S(x, y)$ является неограниченной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k^2 + n^2}$ равен

A π

B $1/2$

C $\pi/4$

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 + 4x^2}$ равен

A $-\dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{8} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + C$

B $\dfrac{1}{4} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2}{4} + 2 \ln |x| + C$

C $\ln \left(\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} \right) - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{4} + C$

D $\dfrac{1}{2}|x| - \dfrac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \dfrac{1}{4} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + C$

E	семейству функций, отличных от перечисленных в A, B, C, D

24. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ равен

A	$\frac{(e^x+1)^{3/2}+1}{e^x+1}+C$

B	$\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)+2\ln\left(\sqrt{e^x+1}+1\right)+C$

C	$\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

D	$\frac{(e^x+1)^{3/2}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$

E	семейству функций, отличных от перечисленных в A, B, C, D

25. Интеграл $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{2-x^2}}$ равен

A	$\pi/2$

B	$\pi/4$

C	$1/\sqrt{2}$

D	$1/2\sqrt{2}$

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

26. Площадь фигуры, образованной графиками функций $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{tg} x$ и прямыми $x = \pi/12$ и $x = \pi/4$, равна

A	$\ln 2$

B	$2\ln 2$

C	$\ln 3$

D	$2\ln 3$

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

27. Площадь фигуры между графиками функций $y = x^2 - c^2$ и $y = c^2 - x^2$, где c — положительный параметр, равна 72. Тогда параметр c равен

A	1

B	2

C	3

D	6

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

28. Функция $f(x)$ обладает следующим свойством: $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ при любых $x, y \in \mathbf{R}$. Тогда

A	функция $f(x)$ непрерывна

B	функция $f(x)$ дифференцируема

C	функция $f(x)$ ограничена

D	уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы одно решение

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Функции $f(x)$ и $g(y)$ определены на всей числовой прямой. Пусть $h(x, y) = f(x)g(y)$. Тогда

A	если функция $h(x, y)$ непрерывна, то функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны

B	если функция $h(x, y)$ ограничена, то функции $f(x)$ и $g(y)$ ограничены

C	если уравнение $h(x, y) = 0$ имеет решения, то уравнения $f(x) = 0$ и $g(y) = 0$ имеют решения

D	если уравнение $h(x, y) = 0$ не имеет решений, то уравнения $f(x) = 0$ и $g(y) = 0$ не имеют решений

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ со стандартным скалярным произведением задан вектор $a = (2, 2, 2)^T$. Пусть L — подпространство, порожденное вектором a. Тогда матрица оператора ортогонального проектирования пространства $\mathbf{R}^3$ на L есть

A	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

B	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

C	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

E $\quad$ матрица, отличная от перечисленных в A, B, C, D

31. Пусть A — матрица размера $m \times n$, $m, n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначим определитель квадратной матрицы X. Тогда

A $\quad$ если $\det(AA^{\mathsf{T}}) \neq 0$, то $\det(A^{\mathsf{T}}A) \neq 0$

B $\quad$ если $\det(AA^{\mathsf{T}}) = \det(A^{\mathsf{T}}A)$, то $m = n$

C $\quad$ $\det(I + 3AA^{\mathsf{T}}) \neq 0$, где I — единичная матрица

D $\quad$ если столбцы матрицы A линейно независимы, то $\det(AA^{\mathsf{T}}) \neq 0$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Даны матрицы A и B размеров $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, где $m, n \geqslant 2$. Известно, что матрица AB невырожденная. Обозначим через $\operatorname{rank} X$ ранг матрицы X. Тогда

A $\quad$ $m < n$

B $\quad$ $m \geqslant n$

C $\quad$ $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} BA$

D $\quad$ $\operatorname{rank} AB \neq \operatorname{rank} BA$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2.1.2 Вторая часть теста

1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix},$$

где α — вещественный параметр, трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^3$. Обозначим через $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ ядро и образ матрицы A соответственно. Тогда

а) число 0 является собственным числом A;

Да $\qquad$ Нет

б) число α является собственным числом A;

Да $\qquad$ Нет

в) существует единственное α, при котором подпространство $\operatorname{Im} A$ одномерное;

Да $\qquad$ Нет

г) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$;

Да Нет

д) $\operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} A = \mathbf{R}^3$;

Да Нет

е) существует базис в $\mathbf{R}^3$, состоящий из собственных векторов A;

Да Нет

ж) существует α, при котором A — проектор;

Да Нет

з) существует ненулевой вектор x, принадлежащий образу A при любом α.

Да Нет

2. Даны функция $f(x, y, z) = z$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4, (x-1)^2 + z^2 = 9\}$. Тогда

а) множество M ограниченное;

Да Нет

б) множество M замкнутое;

Да Нет

в) функция $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наименьшего значения в единственной точке;

Да Нет

д) точка $\left(2, 0, 2\sqrt{2}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(1, \sqrt{3}, 3\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $\left(1, -\sqrt{3}, -3\right)$ функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) точка $(-2, 0, 0)$ является точкой локального экстремума функции $f(x, y, z)$ на множестве M.

Да Нет

3. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2 \left(1 - \cos \dfrac{ax+b}{n} \right) \right), & \text{если } x \leqslant -1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(n \ln \left(1 + \dfrac{c\sqrt{1-x}}{n} \right) \right), & \text{если } -1 < x \leqslant 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(n \left(\left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^{1/\ln(x-1)} - 1 \right) \right), & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

где a, b, c — вещественные параметры и $c > 0$. Область определения функции $f(x)$ — это множество M тех чисел x, для которых существуют пределы в соответствующих областях. Тогда

а) множество M ограниченное;

Да Нет

б) множество M замкнутое;

Да Нет

в) при любом $c > 0$ функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(-1, 2)$;

Да Нет

г) при любых a, b и $c > 0$ у графика функции $f(x)$ есть вертикальная касательная;

Да Нет

д) существуют такие числа a, b и $c > 0$, что график функции $f(x)$ имеет наклонную (не горизонтальную и не вертикальную) асимптоту;

Да Нет

е) если $a = 1$, $b = 3$, $c = \sqrt{2}$, то функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(-3, 0)$;

Да Нет

ж) при $c = \sqrt{2}$ существуют такие числа a, b, что функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-3, 0)$;

Да Нет

з) при любых a, b и $c > 0$ график функции $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

Да Нет

4. Функция $y(x)$ является решением задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x} - e^{y/x}$$

с начальным условием $y(1) = a$, $a \in \mathbf{R}$. Пусть M — область определения функции $y(x)$, E — множество ее значений. Тогда

а) $E = \mathbf{R}$;

Да Нет

б) Функция $y(x)$ ограничена снизу на M;

Да Нет

в) Функция $y(x)$ на множестве M имеет экстремум;

Да Нет

г) $\lim\limits_{x \to +0} y(x) = 0$;

Да Нет

д) При любом $b > 0$ уравнение $y(x) = b$ имеет решение;

Да Нет

е) Если $x_0(a)$ — корень уравнения $y(x) = 0$, то $\lim\limits_{a \to +\infty} x_0(a) = e$;

Да Нет

ж) Если $x_0(a)$ — корень уравнения $y(x) = 0$, то $\lim\limits_{a \to -\infty} x_0(a) = 1/e$;

Да Нет

з) График функции $y(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** A. **3.** C. **4.** C. **5.** E. **6.** B. **7.** C. **8.** C. **9.** A. **10.** D. **11.** B. **12.** D. **13.** C. **14.** A. **15.** B. **16.** B. **17.** A. **18.** D. **19.** D. **20.** B. **21.** B. **22.** C. **23.** A. **24.** C. **25.** A. **26.** A. **27.** C. **28.** A. **29.** D. **30.** E. **31.** C. **32.** C.

2.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Запишем характеристическое уравнение

$$\det\begin{pmatrix}\alpha-\lambda & 0 & 1\\ 0 & \alpha-\lambda & \alpha\\ \alpha & \alpha & 1+\alpha-\lambda\end{pmatrix}=(\alpha-\lambda)(\lambda-(1+2\alpha))\lambda=0,$$

откуда получим его корни $\lambda=0$, $\lambda=\alpha$, $\lambda=1+2\alpha$. Ответы на вопросы а) — да, б) — да.

Далее заметим, что угловой минор $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ матрицы A при $\alpha\neq 0$ не равен нулю, а при $\alpha=0$ матрица A имеет ранг 1, поэтому $\operatorname{Im} A$ является одномерным только при $\alpha=0$ (ответ на вопрос в) — да).

Рассмотрим случай $\alpha=-1/2$, при котором ноль является собственным числом алгебраической кратности 2 и геометрической кратности 1 (так как $\operatorname{rank} A=2$), соответственно, ответ на вопрос е) — нет. При этом

$$A^2=\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 1\\ 0 & -1/2 & -1/2\\ -1/2 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1/4 & -1/2 & 0\\ -1/4 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

откуда $\operatorname{rank} A^2=1$, поэтому при $\alpha=-1/2$ образ $\operatorname{Im} A\neq\operatorname{Im} A^2$ (ответ на вопрос г) — нет). Кроме того, так как последний столбец матрицы A^2 равен нулю, то вектор $(1,-1/2,1/2)^T$ (последний столбец матрицы A) принадлежит как ядру, так и образу матрицы A, откуда немедленно следует, что $\operatorname{Im} A+\operatorname{Ker} A\neq\mathbf{R}^3$ при $\alpha=-1/2$ (ответ на вопрос д) — нет).

Для того, чтобы матрица A была проектором, необходимо, чтобы ее собственные числа были равны нулю и/или единице. Это возможно только при $\alpha=0$. Нетрудно убедиться, что при этом $A^2=A$ и ответ на вопрос ж) — да. Далее, рассмотрим вектор $(1,0,1)^T$ (любой ненулевой вектор, принадлежащий образу A при $\alpha=0$ ему пропорционален). Легко видеть, что этот вектор является образом вектора $(0,-1,1)^T$ при любом α, поэтому ответ на вопрос з) — да.

Задача 2. Пусть $g_1(x,y,z)=x^2+y^2-4$, $g_2(x,y,z)=(x-1)^2+z^2-9$. Множество M является замкнутым как пересечение двух множеств точек, в которых непрерывные функции g_1 и g_2 принимают нулевое значение. Кроме того, множество M является ограниченным: из того, что $x^2+y^2=4$ и $z^2=9-(x-1)^2\leqslant 9$, следует, что все точки $(x,y,z)\in M$ удовлетворяют неравенству $x^2+y^2+z^2\leqslant 13$. Поэтому ответы на пп. а) и б) — да.

Для ответа на остальные вопросы воспользуемся методом множителей Лагранжа. Выпишем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x^2+y^2-4)+\mu((x-1)^2+z^2-9).$$

Необходимые условия первого порядка на локальный экстремум имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda x + 2\mu(x-1) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda y = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2\mu z = 0.$$

Из второго уравнения получаем два случая: $\lambda = 0$ или $y = 0$.

Если $\lambda = 0$, то из первого уравнения следует, что $\mu = 0$ или $x = 1$, а так как вариант $\mu = 0$ невозможен в силу третьего уравнения, то $x = 1$, откуда $y = \pm\sqrt{3}$ (из $g_1(x, y, z) = 0$), $z = \pm 3$ (из $g_2(x, y, z) = 0$), $\mu = -\frac{1}{2z} = \mp\frac{1}{6}$. Получаем четыре точки, подозрительные на локальный экстремум: $A = \left(1, \sqrt{3}, 3\right)$, $B = \left(1, -\sqrt{3}, 3\right)$, $C = \left(1, \sqrt{3}, -3\right)$, $D = \left(1, -\sqrt{3}, -3\right)$.

Для идентификации возможных локальных экстремумов в этих точках можно воспользоваться условиями второго порядка: исследовать квадратичную форму гессиана функции L на положительную / отрицательную определённость в ограничении на касательное подпространство к множеству M в соответствующей точке.

Для нахождения последнего нам понадобится матрица Якоби отображения $(g_1, g_2)^{\mathsf{T}}$, которая имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} g_1'(x, y, z) \\ g_2'(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x-2 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Если строки матрицы J линейно независимы (случай, когда это не так, рассматривается ниже), то касательное подпространство является линейной оболочкой ненулевого вектора, ортогонального обеим строкам матрицы J. Можно в этом качестве использовать вектор $v = (zy, -zx, (1-x)y)^{\mathsf{T}}$: если $\operatorname{rank} J = 2$, то $v \neq 0$ и $Jv = 0$.

Матрица вторых производных функции L имеет вид

$$L'' = \begin{pmatrix} 2\lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$v^{\mathsf{T}} L'' v = 2\left((\lambda+\mu)z^2y^2 + \lambda z^2x^2 + \mu(1-x)^2y^2\right).$$

Подставив сюда вычисленные значения переменных для точек A, B, C, D, получаем $v^{\mathsf{T}} L'' v = 54\mu = -9$ для точек A и B и 9 для точек C и D. В первом случае квадратичная форма гессиана функции L отрицательно определённая в ограничении на касательное подпространство, а во втором — положительно определённая. Следовательно, в точках A и B функция f достигает локального максимума на множестве M, а в точках C и D — локального минимума. Поэтому ответ на п. е) — да.

Рассмотрим теперь второй случай, когда $y = 0$. Из ограничения $g_1(x, y, z) = 0$ получаем $x = \pm 2$, а из ограничения $g_2(x, y, z) = 0$ — $z = \pm 2\sqrt{2}$ при $x = 2$ и $z = 0$ при $x = -2$. Впрочем, последнее невозможно в силу третьего уравнения из условий первого порядка. Получаем ещё две точки: $E = \left(2, 0, 2\sqrt{2}\right)$ с $\mu = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $\lambda = \dfrac{1}{8\sqrt{2}}$, и $F = \left(2, 0, -2\sqrt{2}\right)$ с $\mu = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$, $\lambda = -\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$.

Проверим условия второго порядка в точках E и F: $v^T L'' v = 32\lambda = \sqrt{8}$ для точки E и $-\sqrt{8}$ для точки F. Следовательно, в точке E функция f достигает локального минимума на множестве M, а в точке F — локального максимума. Поэтому ответ на п. д) — нет.

Кроме того, необходимо проверить условие регулярности, чтобы выявить возможные точки экстремума, не являющиеся регулярными. Условие регулярности нарушается, если $\operatorname{rank} J < 2$, т.е. все миноры второго порядка матрица J равны нулю: $(x - 1)y = xz = yz = 0$. Если $x = 1$, то $z = 0$, а тогда нарушается ограничение $g_2(x, y, z) = 0$. Если же $x \neq 1$, то $y = 0$, откуда $x = \pm 2$ (так как $g_1(x, y, z) = 0$) и $z = 0$. Из $g_2(x, y, z) = 0$ получаем $x = -2$. Таким образом, имеется единственная нерегулярная точка $G = (-2, 0, 0)$. Эта точка могла бы быть локальным экстремумом. Но рассмотрение близких к ней точек множества M показывает, что экстремума здесь нет. Действительно, пусть $x = -2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина (вариант $\varepsilon < 0$ не рассматривается, так как противоречит ограничению $g_1(x, y, z) = 0$). Тогда $y = \pm\sqrt{\varepsilon(4 - \varepsilon)}$ и $z = \pm\sqrt{\varepsilon(6 - \varepsilon)}$. Каждая из этих четырёх точек (x, y, z) стремится к G при $\varepsilon \to 0+$, и при этом значение функции $f(x, y, z) = z$ в них может быть как больше, так и меньше её значения в точке G, равного 0. Поэтому ответ на п. з) — нет.

Функция $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наибольшего значения в некоторых точках (это следует из ответов на пп. а)–б) и теоремы Вейерштрасса), и это должны быть точки локального максимума, т.е. точки A, B или F. Из этих точек значение функции $f(x, y, z) = z$ максимально в точках A и B, поэтому ответ на п. в) — да.

Аналогично получаем, что $f(x, y, z)$ на множестве M достигает наименьшего значения, равного -3, в точках C и D, поэтому ответ на п. г) — нет, а на п. ж) — да.

Задача 3. По формуле Тейлора

$$1 - \cos\frac{ax + b}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{ax + b}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty.$$

Значит, $f(x) = \dfrac{(ax + b)^2}{2}$ при $x \leqslant 1$.

По формуле Тейлора

$$\ln\left(1 + \frac{c\sqrt{1 - x}}{n}\right) = \frac{c\sqrt{1 - x}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Значит, $f(x) = c\sqrt{1 - x}$ при $-1 < x \leqslant 1$.

По формуле Тейлора

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/\ln(x-1)}-1=\frac{1}{n\ln(x-1)}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty.$$

Заметим, что функция $f(x)$ не определена при $x=2$. Значит, $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ при $x>1$, $x\neq 2$.

Получаем:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(ax+b)^2}{2}, & x\leqslant -1,\\ c\sqrt{1-x}, & -1<x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\ln(x-1)}, & x>1,\ x\neq 2.\end{cases}$$

Ответы на вопросы а) — нет, б) — нет, в) — нет.

Далее, $\lim\limits_{x\to 1-} c\sqrt{1-x}=0=f(0)$ при любом $c>0$ и $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{\ln(x-1)}=0$. Значит, при любом $c>0$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=1$. Так как

$$\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim\left(-\frac{c}{2\sqrt{1-x}}\right)=-\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1+} f'(x)=\lim\left(-\frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)}\right)=-\infty,$$

то в точке $x=1$ у графика функции $f(x)$ есть вертикальная касательная. Ответ на вопрос г) — да.

Если $a\neq 0$, то при при $x\leqslant -1$ функция $f(x)$ является квадратичной, и ее график — парабола, не имеющая наклонной асимптоты. Если $a=0$, то функция $f(x)$ постоянная и ее график тоже не имеет наклонной асимптоты. Кроме того, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(x-1)}=0$, значит, наклонной асимптоты нет. Ответ на вопрос д) — нет.

При $a=1$, $b=3$, $c=\sqrt{2}$ имеем: $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{2}$, $-1<x\leqslant -1$ и $f(x)=\sqrt{2(1-x)}$, $-1<x<0$. Так как $f(-1)=2=\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+} f(x)$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=-1$. В остальных точках интервала $(-3,0)$ функция является элементарной и, следовательно, непрерывна. Ответ на вопрос е) — да.

Для дифференцируемости $f(x)$ на интервале $(-3,0)$ достаточно выполнения условий: 1) $f(-1)=\dfrac{(b-a)^2}{2}=2$ — непрерывность; 2) $\lim\limits_{x\to -1-} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1-}(a(ax+b))=$ $=\lim\limits_{x\to -1+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1+}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}}\right)=-\dfrac{1}{2}$ — совпадение левой и правой производных. Получаем систему уравнений $(b-a)^2=4$, $a(b-a)=-1/2$, у которой есть, например, решение $a=-1/4$, $b=9/4$. Ответ на вопрос ж) — да.

Так как $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=+\infty$, то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$. Ответ на вопрос з) — да.

Задача 4. Прежде всего отметим, что правая часть не определена при $x=0$. Поскольку начальное условие задано в точке $x=1$, то решение данного дифференциального уравнения может быть определено лишь на некотором подмножестве полупрямой $x > 0$.

Далее, поскольку правая часть дифференциального уравнения зависит только от комбинации y/x, сделаем замену: $y(x)/x = z(x)$, или $y(x) = x \cdot z(x)$. После этой замены дифференциальное уравнение примет вид

$$x \cdot z' + z = z - e^z, \quad \text{или} \quad x \cdot z' = -e^z.$$

Полученное уравнение легко решается разделением переменных:

$$e^{-z}\, dz = -\frac{dx}{x},$$

или

$$-d(e^{-z}) = -d(\ln|x|),$$

откуда получаем (учитывая, что, как было отмечено выше, $x > 0$)

$$e^{-z} = \ln(x) + C,$$

или

$$z = -\ln[\ln(x) + C].$$

Возвращаясь к функции $y(x) = x \cdot z(x)$, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = -x \ln[\ln(x) + C].$$

Используя начальное условие, находим значение константы C: $a = -\ln(C)$, или $C = e^{-a}$. Таким образом, решение дифференциального уравнения с учетом начального условия принимает вид

$$y = -x \ln[\ln(x) + e^{-a}].$$

Изучим свойства этого решения. Во-первых, заметим, что функция $y(x)$ определена только для тех значений аргумента, для которых $\ln(x) + e^{-a} > 0$, т.е. для $x > e^{-e^{-a}}$.

Во-вторых, заметим, что производная $y'(x)$ нигде не обращается в ноль. Если бы нашлась такая точка x_0, в которой $y'(x_0) = 0$, то в этой точке было бы выполнено равенство

$$\frac{y}{x} = e^{y/x},$$

т.е. существовало бы решение уравнения

$$u = e^u.$$

Однако это уравнение не имеет решения, поскольку $e^u > u \; \forall u \in \mathbf{R}$. Поэтому производная $y'(x) < 0$ и не меняет знак на всей области определения функции $y(x)$. Другими словами, на всей области определения функция $y(x)$ строго убывает.

Наконец, найдем пределы при $x \to \infty$ и при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$. Первый предел находится легко: поскольку при $x \to +\infty$ функция $\ln(x)$ неограниченно возрастает, то неограниченно возрастает и функция $x \ln[\ln(x) + e^{-a}]$, поэтому $y(x) = -x \ln[\ln(x) + e^{-a}] \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим второй предел. Представим x в виде $x = (1 + \varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}}$ и рассмотрим функцию $y(x)$ при $\varepsilon \to +0$:

$$\begin{aligned} y(x) &= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln((1+\varepsilon)e^{-e^{-a}}) + e^{-a}] \\ &= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln(1+\varepsilon) + \ln(e^{-e^{-a}}) + e^{-a}] \\ &= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln(1+\varepsilon) - e^{-a} + e^{-a}] \\ &= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\ln(1+\varepsilon)] \\ &= -(1+\varepsilon) \cdot e^{-e^{-a}} \ln[\varepsilon + o(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $y(x) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +0$, т.е. при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$.

Теперь легко ответить на вопросы задачи. Поскольку функция $y(x)$ определена и дифференцируема при $x > e^{-e^{-a}}$, причем $y'(x) < 0$, $y(x) \to +\infty$ при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$ и $y(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$, то функция $y(x)$ может принимать любые вещественные значения, поэтому на вопрос а) ответ да. При этом функция $y(x)$ не ограничена снизу, поэтому на вопрос б) ответ нет. Кроме того, поскольку функция $y(x)$ строго монотонно убывает на всей области определения, то она не имеет экстремумов, так что на вопрос в) ответ нет.

Далее, поскольку функция $y(x)$ не определена при $0 < x \leqslant e^{-e^{-a}}$, ее предел при $x \to +0$ не существует, поэтому на вопрос г) ответ нет.

Как уже говорилось выше, функция $y(x)$ может принимать любые вещественные значения, поэтому при любом $b \in \mathbf{R}$ существует решение уравнения $y(x) = b$, поэтому на вопрос д) ответ да.

Уравнение $y(x) = 0$ легко решается: поскольку всегда $x > e^{-e^{-a}} > 0$, то $y(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\ln(x) + e^{-a} = 1$. Отсюда находится корень уравнения:

$$x_0 = x_0(a) = \exp[1 - e^{-a}].$$

Соответственно легко находятся пределы:

$$\lim_{a \to +\infty} x_0(a) = \lim_{a \to +\infty} \exp[1 - e^{-a}] = \exp[1] = e, \quad \text{поскольку} \quad \lim_{a \to +\infty} e^{-a} = 0.$$

Соответственно на вопрос е) ответ да.

Второй предел, при $a \to -\infty$, находится также легко:

$$\lim_{a \to -\infty} x_0(a) = \lim_{a \to -\infty} \exp[1 - e^{-a}] = 0, \quad \text{поскольку } e^{-a} \to +\infty \text{ при } a \to -\infty.$$

Соответственно на вопрос ж) ответ нет, поскольку предел равен нулю, а не $1/e$.

Наконец, на вопрос з) ответ да, поскольку $y(x) \to +\infty$ при $x \to e^{-e^{-a}} + 0$, т.е. в точке $x = e^{-e^{-a}}$ график функции $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

3 Вступительный экзамен 2022 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $f(x)$

A дважды дифференцируемая при $x = 0$

B принимает наименьшее значение при некотором $x \in \mathbf{R}$

C имеет локальный минимум при $x = 0$

D имеет локальный максимум при $x = -e^{-1/2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть $f(x) = e^{-e^{-x}}$ при $x \in \mathbf{R}$. Тогда функция $f(x)$

A убывает

B ограничена

C достигает наименьшего значения

D достигает наибольшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^{3/2}+x+1}-\sqrt[3]{x^{3/2}-x+1}\right)$ равен

A 0

B $1/3$

C $2/3$

D 1

E числу, отличному от A, B, C, D, или не существует

4. Пусть $a_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - 1$. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

B ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ сходится

C ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ сходится

D ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Точная верхняя грань $\sup\limits_{x\in[-1,2]}\left(\lim\limits_{n\to\infty} n((x^2+1)^{1/n}-1)\right)$ равна

A e

B $\ln 5$

C 4

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

6. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$. Тогда

- A функция $y(x)$ обращается в ноль в одной точке
- B $y(\pi) = -1$
- C функция $y(x)$ ограниченная
- D функция $y(x)$ принимает наименьшее значение не менее, чем в двух точках
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Дан функциональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \right)^n.$$
Обозначим через M множество сходимости этого ряда. Тогда

- A множество M открытое
- B множество M замкнутое
- C множество M ограничено сверху
- D множество M ограничено снизу
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Задана функция
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ x \ln x, & x > 0. \end{cases}$$
Тогда

- A функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой
- B функция $f(x)$ имеет один локальный максимум
- C функция $f(x)$ имеет два локальных минимума
- D график функции $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту
- E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Дана функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ и множество $M = \{(x, y)\colon y^2 - x^2 = 1\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения.

II. Точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

III. Множество значений функции $f(x, y)$ на множестве M ограничено сверху.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов

10. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \frac{y}{1+x^2}$, $y(0) = y_0$. Известно, что $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 2$. Тогда число y_0 равно

A $\pi/2$

B $2e^{-\pi/2}$

C $e^{\pi/2}$

D 2π

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

11. Функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Пусть $g(x) = \sup\limits_{y\in[x,b]} f(y)$ при $x \in [a, b]$. Найдите ***ложное*** утверждение.

A функция $g(x)$ монотонная

B если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

C если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b), то функция $g(x)$ дифференцируема на интервале (a, b)

D если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a, b]$, то функция $g(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a, b]$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

12. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-1, 1]$, $f(0) = 0$ и $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = a$, где a — вещественное число. Какие из утверждений ниже (I, II, III) истинные?

I. Функция $f(x)$ дифференцируема в нуле.

II. $a = 0$.

III. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$.

A только III

B только II и III

C только I и II

D только I и III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов

13. Предел

$$\lim_{x\to 0+} x^{2x^2+3x-\ln(1+x^2)}$$

равен

A 0

B $1/2$

C 1

D $3/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Дана функция $f(x,y) = x - 2y$ и множество $M = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 - 4xy = 4\}$. Тогда

A множество значений функции $f(x,y)$ на множестве M — отрезок

B функция $f(x,y)$ ограничена снизу на множестве M

C число локальных экстремумов функции $f(x,y)$ на множестве M четно

D точка $(2,0)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Для множества $M \subset \mathbf{R}$ обозначим через $l(M)$ множество его предельных точек. Пусть $A \subset \mathbf{R}$, $B \subset \mathbf{R}$. Тогда

A $l(A \cup B) = l(A) \cup l(B)$

B $l(A \cap B) = l(A) \cap l(B)$

C $l(A \setminus B) = l(A) \setminus l(B)$

D если множество M бесконечное, то $l(M) \neq \varnothing$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана соотношениями $x_1 = x \in \mathbf{R}$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n/3}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. При любом $x > 1/2$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является невозрастающей последовательностью.

II. При любом $x < 1/4$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является неубывающей последовательностью.

III. Существует такое число $x \in \mathbf{R}$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ расходится.

A только II

B только I, II

C только II, III

D только I, III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов.

17. Функция $y(x)$ определяется как неявная функция в окрестности точки (x_0, y_0) уравнением $(x + y)^3 = x^2 - 2xy + y^2$. Выберите ***ложное*** утверждение:

A $y(x)$ убывает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (0, 1)$

B $y(x)$ убывает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (1, 0)$

C $y(x)$ возрастает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (1/27, 2/27)$

D $y(x)$ возрастает в окрестности точки $(x_0, y_0) = (2/27, 1/27)$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

18. Площадь фигуры между графиками функций $y = x/(x^2 + 1)$ и $y = kx$ в области $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, где k — параметр, равна $(1 + 1/e^2)/2$. Тогда параметр k равен

A e

B $1/e$

C e^2

D $1/e^2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Интеграл

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

равен

A $\pi/3$

B $\pi/4$

C $\pi/6$

D $\pi/12$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-\sqrt{x^2-bx-1}\right)$ равен

A $\sqrt{ab}$

B $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$

C $a+b$

D $\dfrac{a+b}{2}$

E величине, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

21. Функциональная последовательность $f_n(x)=(1+x^n)^{1/n}$ при $n\to\infty$

A сходится равномерно на $[0,2]$

B сходится поточечно, но не равномерно на $[0,2]$

C расходится в некоторых точках отрезка $[0,1]$

D расходится в некоторых точках отрезка $[1,2]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+5x+2}$$

равен

A $\dfrac{\ln 3}{3}$

B $\dfrac{\ln 2}{2}$

C $\dfrac{\ln 2}{3}$

D $\dfrac{\ln 3}{2}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Даны две системы векторов $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ в $\mathbf{R}^N$, где $m, n, N \geqslant 2$. Через $\langle Z \rangle$ обозначается линейная оболочка системы Z. Тогда

A если $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$, то $m \leqslant n$

B если $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$ и $m \leqslant n$, то система X линейно зависимая

C если система X линейно независимая и $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$, то $m \leqslant n$

D если система X линейно зависимая и $\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$, то $m \leqslant n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $a_{ii} \geqslant b_{ii} > 0$ при любом $i = 1, \dots, n$. Через $\det X$ обозначается определитель матрицы X. Тогда

A $\det A \geqslant \det B$

B $\det(A - B) \geqslant 0$

C $\det A \leqslant \det B$

D $\det A \geqslant \det(A - B)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что A задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$, а B невырожденная. Тогда

A матрица BAB^T задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

B матрица BAB^{-1} задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

C матрица BAB задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

D матрица BAB^T не задает оператор проектирования в $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Даны множества

$A = \{x \in \mathbf{R} \colon x^2 - 3x < 0\}$,

$B = \{x \in \mathbf{R} \colon$ производная функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2022$ неотрицательная$\}$.

Тогда множество $A \setminus B$ есть

A $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

B $(0, 3)$

C $(0, 1)$

D $(1, 3)$

E подмножество вещественной оси, отличное от перечисленных в A, B, C, D

27. Интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2022} x}{\sin^{2022} x + \cos^{2022} x}\, dx$$

равен

A π

B $\pi/2$

C $\pi/3$

D $\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

28. Предел последовательности

$$\left\{ \sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \ldots \right\}$$

равен

A $\sqrt{5}$

B 5

C 5^2

D 5^3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

29. Сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

равна

A $1/4$

B $1/3$

C $2/3$

D $3/4$

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

30. Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nc} = 10.$$

Тогда число c равно

A — $\ln(8/9)$

B — $\ln(9/8)$

C — $\ln(10/11)$

D — $\ln(11/10)$

E — числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

31. Дана функциональная последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится при всех $x \in [0, 1]$.

II. Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится при всех $x \in [0, 1]$.

III. Последовательность интегралов от функций $f_n(x)$ имеет предел, равный нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

A — только I

B — только I и II

C — только I и III

D — только II и III

E — ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D, не дает правильного набора ответов

32. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y^2 - y}{x}$ с начальным условием $y(1) = 1/2$. Выберите ***ложное*** утверждение

A — $y(0) = 1$

B — $y(2) = 1/3$

C — $y(3) = 1/4$

D — график функции $y(x)$ имеет горизонтальную асимптоту

E — среди утверждений A, B, C, D есть ложное

3.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$, где $m, n \geqslant 2$. Известно, что $A^{\mathsf{T}}A + B^{\mathsf{T}}B = I$, где через X^{T} обозначается матрица, транспонированная к матрице X, а через I — единичная матрица. Тогда

а) $n \geqslant m$;

Да Нет

б) $n \leqslant 2m$;

Да Нет

в) $\operatorname{rank} A \geqslant n$ (здесь через $\operatorname{rank} X$ обозначается ранг матрицы X);

Да Нет

г) $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geqslant n$;

Да Нет

д) блочная матрица

$$\begin{pmatrix} AA^{\mathsf{T}} & AB^{\mathsf{T}} \\ BA^{\mathsf{T}} & BB^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}$$

размера $2m \times 2m$ задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^{2m}$;

Да Нет

е) если $AB^{\mathsf{T}} = 0$, то матрица AA^{T} задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^{m}$;

Да Нет

ж) если матрица AA^{T} задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^{m}$, то $AB^{\mathsf{T}} = 0$;

Да Нет

з) если матрица BB^{T} задает оператор проектирования в пространстве $\mathbf{R}^{m}$, то $A^{\mathsf{T}}B = 0$.

Да Нет

2. Функция $f(x)$ задана соотношениями:

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, & x < -1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}}, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{ax^3} - 1\right), & x > 1 \end{cases}$$

(a— вещественный параметр). Обозначим через M множество тех x, для которых указанные сумма и пределы существуют. По определению считаем, что M — область определения функции $f(x)$. Тогда

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) множество M открыто;

Да Нет

в) на множестве $M \cap (-\infty, 0)$ функция $f(x)$ непрерывна при любом a;

Да Нет

г) существует такое число $a > 0$, что на множестве $M \cap (0, +\infty)$ функция $f(x)$ дифференцируемая;

Да Нет

д) существует такое число $a > 0$, что на множестве $M \cap (0, +\infty)$ функция $f(x)$ монотонная;

Да Нет

е) существует такое число $a > 0$, что уравнение $f(x) = -1/2$ имеет решение;

Да Нет

ж) при любом $a < 0$ уравнение $f(x) = -1/2$ имеет решение;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

3. Пусть $f(x, y) = \int_x^y (t-a)(t-b)(t-c)(t-d)\,dt$, где $a < b < c < d$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает своего наименьшего значения на $\mathbf{R}^2$;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ имеет 16 локальных экстремумов;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ имеет больше локальных минимумов, чем локальных максимумов;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ имеет локальный минимум в точке (a, b);

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум в точке (d, a);

Да Нет

е) функция $f(x, 2a - x)$ имеет локальный минимум при $x = a$;

Да Нет

ж) график функции $f(x, -x)$ имеет точку перегиба при $x = 0$;

Да Нет

з) функция $f(x, y)$ имеет локальный максимум в точке (c, c).

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx}(n - ne^{x} + e^{x}).$$

Обозначим через M множество, состоящее из всех $x \in \mathbf{R}$, для которых этот ряд сходится, через $S_n(x)$ частичные суммы ряда, а через $S(x)$ сумму ряда для $x \in M$. Тогда

а) $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

б) множество M замкнуто;

Да Нет

в) на отрезке $[0, 1]$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

г) найдется такое число $0 < \varepsilon < 1/2$, что на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

д) на множестве $[1, +\infty)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) функция $S(x)$ на множестве M имеет разрыв первого рода;

Да Нет

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{2022} S_n(x)\,dx = \int_1^{2022} S(x)\,dx$;

Да Нет

з) если $S(x_0) > 0$, где $x_0 \in M$, то $S(x) > 0$ при $x \in [x_0, x_0+1]$.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** B. **3.** C. **4.** B. **5.** B. **6.** E. **7.** B. **8.** B. **9.** B. **10.** B. **11.** C. **12.** D. **13.** C. **14.** C. **15.** A. **16.** E. **17.** E. **18.** D. **19.** D. **20.** D. **21.** A. **22.** C. **23.** C. **24.** E. **25.** B. **26.** D. **27.** D. **28.** B. **29.** D. **30.** C. **31.** C. **32.** A.

3.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для них $A^TA + B^TB = I$, но $m > n$, так что ответ на вопрос а) — «нет» и ответ на вопрос в) — «нет».

Исследуем ранг матрицы $A^TA + B^TB$. Он не превосходит суммы рангов $\operatorname{rank}(A^TA) + \operatorname{rank}(B^TB)$, в то же время $\operatorname{rank}(X^TX) = \operatorname{rank} X$ для любой матрицы X, поэтому $\operatorname{rank}(A^TA) + \operatorname{rank}(B^TB) = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant 2m$, так как ранг матрицы не превосходит числа ее строк. С другой стороны $A^TA + B^TB = I$, поэтому $\operatorname{rank}(A^TA + B^TB) = n$, откуда следует, что $n \leqslant 2m$ и ответ на вопрос б) — «да», а также ответ на вопрос г) — «да».

Возведем в квадрат блочную матрицу

$$\begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} AA^TAA^T + AB^TBA^T & AA^TAB^T + AB^TBB^T \\ BA^TAA^T + BB^TBA^T & BA^TAB^T + BB^TBB^T \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A(A^TA + B^TB)A^T & A(A^TA + B^TB)B^T \\ B(A^TA + B^TB)A^T & B(A^TA + B^TB)B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T & AB^T \\ BA^T & BB^T \end{pmatrix}.$$

Ответ на вопрос д) — «да».

Если $AB^T = 0$, то и $BA^T = (AB^T)^T = 0$, а значит возведение в квадрат блочной матрицы из вопроса д) превращается в

$$\begin{pmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (AA^T)^2 & 0 \\ 0 & (BB^T)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & BB^T \end{pmatrix},$$

откуда следует, что ответ на вопрос е) — «да».

Рассмотрим выражение $AA^{\mathsf{T}} = A(A^{\mathsf{T}}A + B^{\mathsf{T}}B)A^{\mathsf{T}} = (AA^{\mathsf{T}})^2 + (AB^{\mathsf{T}})(AB^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$. Если матрица AA^{T} задает оператор проектирования, то $AA^{\mathsf{T}} = (AA^{\mathsf{T}})^2$, а значит $(AB^{\mathsf{T}})(AB^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = 0$. Так как $\operatorname{rank} XX^{\mathsf{T}} = \operatorname{rank} X$ для любой матрицы X, то $\operatorname{rank}(AB^{\mathsf{T}}) = 0$, ответ на вопрос ж) — «да».

Пример из вопросов а) и в) подходит в качестве контрпримера для вопроса з) — ответ «нет».

Задача 2. Найдем сумму ряда и пределы, задающие функцию $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < -1, \\ x^2, & -1 < x \leqslant 1, \\ ax^3, & x > 1. \end{cases}$$

При этом предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}}$ при $x = -1$ не существует. Таким образом, $M = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ответ на вопрос а) — «нет», на вопрос б) — «да». График функции $f(x)$ представлен на рис. 1.

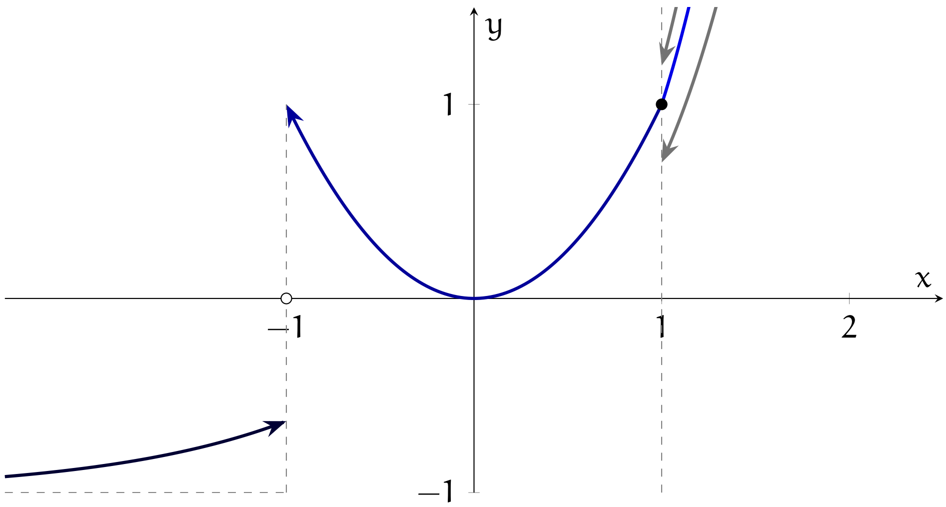

Рис. 1. График функции $f(x)$ (при $x > 1$ синяя линия соответствует $a = 1$, серые — $a = 0.7$ и $a = 1.2$)

Так как точка $x = 0$ не принадлежит M, то функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in M$, $x < 0$, ответ на вопрос в) — «да».

Заметим, что при $a \neq 1$ функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = 1$. При $a = 1$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, но при этом левая производная $f'(1^-) = 2x\big|_{x=1} = 2$, а правая производная $f'(1^+) = 3x^2\big|_{x=1} = 3$, поэтому производная $f'(1)$ не существует. Ответ на вопрос г) — «нет». При этом можно заметить, что при $a \leqslant 1$ функция $f(x)$ строго возрастает на $M \cap (0, +\infty) = (0, +\infty)$, ответ на вопрос д) — «да». Также можно заметить, что при $a > 0$ уравнение $f(x) = -1/2$ не имеет решения. Действительно,

$f(x) \geqslant 0$ при $x > -1$, и $f(x) < 1/e - 1 < 1/2$ при $x < -1$. Ответ на вопрос е) — «нет». Аналогично при $a < -1/2$, ответ на вопрос ж) — «нет».

Наконец, ответ на вопрос з) — «да», так как $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - 1) = -1$, что соответствует горизонтальной асимптоте.

Задача 3. Как можно заметить, подынтегральное выражение является многочленом четвертого порядка по t (со старшим коэффициентом, равным единице), поэтому первообразная является многочленом пятого порядка, а функция $f(x,y)$ является разностью двух многочленов пятого порядка по y и по x соответственно: $f(x,y) = g(y) - g(x)$. Поэтому $f(x,y)$ не достигает наименьшего и наибольшего значений, ответ на вопрос а) — «нет».

Дифференцируя интеграл $f(x,y)$ как функцию верхнего и нижнего предела, получаем производные

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (y-a)(y-b)(y-c)(y-d).$$

Приравнивая их нулю, находим 16 критических точек — всевозможные попарные комбинации $x = a, b, c, d$ и $y = a, b, c, d$. Матрица вторых производных диагональная:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -(x-b)(x-c)(x-d)- \\ \quad -(x-a)(x-c)(x-d)- \\ \quad -(x-a)(x-b)(x-d)- \\ \quad -(x-a)(x-b)(x-c) \end{array} & 0 \\ 0 & \begin{array}{l} (y-b)(y-c)(y-d)+ \\ \quad +(y-a)(y-c)(y-d)+ \\ \quad +(y-a)(y-b)(y-d)+ \\ \quad +(y-a)(y-b)(y-c) \end{array} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} < 0 \quad \text{при } x = b \text{ или } x = d,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} > 0 \quad \text{при } x = a \text{ или } x = c,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} < 0 \quad \text{при } y = a \text{ или } y = c,$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} > 0 \quad \text{при } y = b \text{ или } y = d,$$

откуда делаем вывод о том, что у функции $f(x,y)$ четыре локальных максимума — (b,a), (b,c), (d,a), (d,c) и четыре локальных минимума — (a,b), (a,d), (c,b), (c,d).

Остальные восемь критических точек не являются точками экстремума. Ответы на вопросы б) — «нет», в) — «нет», г) — «да», д) — «да», з) — «нет».

Рассмотрим функцию $h(x) = f(x, 2a - x)$, ее производная равна

$$h'(x) = -(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - (2a-x-a)(2a-x-b)(2a-x-c)(2a-x-d),$$

она равна нулю при $x = a$. Вторая производная равна

$$\begin{gathered} h''(x) = -(x-b)(x-c)(x-d)-(x-a)(x-c)(x-d)-(x-a)(x-b)(x-d)-(x-a)(x-b)(x-c)+ \\ + (2a-x-b)(2a-x-c)(2a-x-d) + (2a-x-a)(2a-x-c)(2a-x-d)+ \\ + (2a-x-a)(2a-x-b)(2a-x-d) + (2a-x-a)(2a-x-b)(2a-x-c), \end{gathered}$$

она тоже равна нулю в точке $x = a$. Наконец, третья производная равна

$$\begin{gathered} h'''(x) = -2(x-a)(x-b) - 2(x-a)(x-c) - 2(x-a)(x-d) - 2(x-b)(x-c)- \\ - 2(x-b)(x-d) - 2(x-c)(x-d) - 2(2a-x-a)(2a-x-b)- \\ - 2(2a-x-a)(2a-x-c) - 2(2a-x-a)(2a-x-d)- \\ - 2(2a-x-b)(2a-x-c) - 2(2a-x-b)(2a-x-d) - 2(2a-x-c)(2a-x-d), \end{gathered}$$

она отрицательная в точке $x = a$, поэтому эта точка не является точкой экстремума функции $h(x)$, ответ на вопрос е) — «нет».

Аналогично, рассмотрим функцию $h(x) = f(x, -x)$, ее производная равна

$$h'(x) = -(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) - (x+a)(x+b)(x+c)(x+d),$$

вторая производная равна

$$\begin{gathered} h''(x) = -(x-b)(x-c)(x-d)-(x-a)(x-c)(x-d)-(x-a)(x-b)(x-d)-(x-a)(x-b)(x-c)- \\ -(x+b)(x+c)(x+d)-(x+a)(x+c)(x+d)-(x+a)(x+b)(x+d)-(x+a)(x+b)(x+c), \end{gathered}$$

она равна нулю при $x = 0$, значит это точка перегиба, ответ на вопрос ж) — «да».

Задача 4. Перепишем выражение общего члена ряда: $xe^{-nx}(n - ne^x + e^x) = xe^{-nx}(n - (n-1)e^x) = x(ne^{-nx} - (n-1)e^{-(n-1)x})$. Отсюда следует, что частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(ke^{-kx} - (k-1)e^{-(k-1)x} = xne^{-nx}$. Предел частичных сумм конечен (и тождественно равен нулю) при $x \geqslant 0$, поэтому $M = [0, +\infty)$ и ответ на вопрос а) — «нет», ответ на вопрос б) — «да».

Максимум функции $S_n(x) = xne^{-nx}$ на отрезке $[0, 1]$ достигается в точке $x = 1/n$ и равен $1/e \not\to 0$, поэтому ответ на вопрос в) — «нет». В то же время при любом $0 < \varepsilon < 1/2$ при $n > 1/\varepsilon$ максимум функции $s_n(x)$ на отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ достигается в точке $x = \varepsilon$ и равен $\varepsilon n e^{-n\varepsilon} \to 0$, поэтому ответ на вопрос г) — «да». Аналогично для интервала $[1, +\infty)$: максимум частичной суммы достигается в точке $x = 1$ и равен $ne^{-n} \to 0$, поэтому ответ на вопрос д) — «да».

Функция $S(x)$ тождественно равна нулю и непрерывна, поэтому ответ на вопрос е) — «нет».

Так как последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на $[1, 2022]$, то последовательность интегралов от $S_n(x)$ также сходится к интегралу от $S(x)$, ответ на вопрос ж) — «да».

В вопросе з) содержится ложная посылка, так как $S(x_0) = 0$ при любом x_0. Ответ на вопрос з) — «да».

4 Вступительный экзамен 2023 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Пусть $S(t)$ — площадь фигуры, заданной пересечением кривых $y = x^t$, $y = x^{1/t}$, $t > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{t\to 1+} \dfrac{S(t)}{t-1}$ равен

A 0

B $1/2$

C 1

D $3/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2. Числа a и b таковы, что

$$\begin{cases} b - 2a = 1, \\ 3a - b = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Тогда величина $\log_a(b)$ равна

- A $\quad 1$
- B $\quad \sqrt{2}$
- C $\quad 2$
- D $\quad \log_2(3)$
- E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

3. Функция $f(x)$ при всех $x \in \mathbf{R}$ имеет производную $f'(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. $f(x) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2}$ при некотором $x \in \mathbf{R}$.

II. $f'(x) = f(1) - f(0)$ при некотором $x \in \mathbf{R}$.

III. $f'(x) = \dfrac{f'(0) + f'(1)}{2}$ при некотором $x \in \mathbf{R}$.

- A $\quad$ только I
- B $\quad$ только II
- C $\quad$ II и III
- D $\quad$ I, II и III
- E $\quad$ ни одно из утверждений I, II, III не является верным

4. Дана функция $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 + xy = 0\}$. Тогда

- A $\quad$ функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего и наименьшего значений
- B $\quad$ точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M
- C $\quad$ точка $(1, -1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M
- D $\quad$ для любой точки $(x, y) \in M$ выполняется неравенство $f(x, y) \geqslant 11/10$
- E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Дана функция

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если число } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если число } x \text{ иррациональное} \end{cases}$$

($D(x)$ — функция Дирихле). Пусть $M = \{(x, y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, |y| \leqslant D(x)\}$. Тогда замыкание множества M — это

- A M
- B $\{(x, y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = -1\} \cup \{(x, y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1\}$
- C $\{(x, y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = -1\} \cup \{(x, y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 1\} \cup \{(x, y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\}$
- D $\{(x, y) \colon 0 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$
- E множество, отличное от перечисленных в A, B, C, D

6. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на всей вещественной оси, удовлетворяет равенству

$$f(5 - x) = \frac{f(x) - x^2}{2}.$$

Тогда значение $f(4)$ равно

- A 3
- B -4
- C 5
- D -6
- E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

7. Касательная к кривой $x^2/3 - y^2 = 1$, проведенная в точке $(3, \sqrt{2})$, пересекает ось ординат в точке

- A $y = -\sqrt{3}/2$
- B $y = \sqrt{3}/2$
- C $y = -\sqrt{2}/2$
- D $y = \sqrt{2}/2$
- E в точке, отличной от перечисленных в A, B, C, D, либо точка пересечения отсутствует

8. Функция $f(x)$ определена как

$$f(x) = \int_0^{x^2} t\sqrt{1 + t^2}\,dt.$$

Тогда вторая производная $f''(x)$ при $x = 0$ равна

A 0

B $1/3$

C $1/2$

D $2/3$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

9. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1/n}{n-1/n}\right)^{n^2}$ равен

A 1

B $\sqrt{e}$

C e

D e^2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

10. Дана функция $f(x) = xe^{-|x-1|}$. Тогда

A наибольшее значение функции $f(x)$ равно $2/e$, наименьшего значения не существует

B наименьшее значение функции $f(x)$ равно $-2/e^3$, наибольшего значения не существует

C наименьшее значение функции $f(x)$ равно $-1/e^2$, наибольшее значение равно 1

D функция $f(x)$ не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ равен

A e

B $-e$

C $e/2$

D $-e/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

12. Интеграл $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{(1+\ln x)^2}$ равен

A $\ln 2$

B $\dfrac{\ln 2}{2}$

C $\ln\left(1+\dfrac{e^2}{2}\right)$

D $\dfrac{\ln(1+e^2)}{2}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Интеграл

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

равен

A $1/3$

B $1/2$

C $2/3$

D $3/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$$

равен

A $(2/3)\ln(3/2)$

B $(1/4)\ln(2/3)$

C $(2/5)\ln(3/2)$

D $(1/2)\ln(2/3)$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Интеграл $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^x}$ равен

A 1

B $1-\ln\left(1+e^{-1}\right)$

C $2-\ln(1+e)$

D $\ln(1+e)-1$

E величине, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

16. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$. Тогда значение $y(\pi)$ равно

A 1

B -1

C $\pi/4$

D $-\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

17. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 1.$$

Выберите *ложное* утверждение:

A $y(1/2) > 0$

B $y(-1/2) > 0$

C $y(1) < 0$

D $y(-1) < 0$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

18. Сумма ряда $1 - x - x^2 + x^3 + x^4 - x^5 - x^6 + \dots$ при $x \in (-1, 1)$ равна

A $\dfrac{1-x}{1+x^2}$

B $\dfrac{1+x}{1+x^2}$

C $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

D выражению, отличному от перечисленных в A, B, C

E ряд расходится на $(-1, 1)$

19. Пусть M — непустое подмножество числовой прямой $\mathbf{R}$, не совпадающее с $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Множество граничных точек множества M не пусто.

II. Любая предельная точка множества M является его граничной точкой.

III. Любая граничная точка множества M является его предельной точкой.

A только I

B только I и II

C только I и III

D I, II, III

E ни один из вариантов, перечисленных в A, B, C, D не дает правильного набора ответов

20. Множество значений последовательности $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет ровно две предельные точки. Тогда

A последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится

B последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ расходится

C последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ ограниченная

D последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ неограниченная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Даны векторы

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Размерность линейной оболочки $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ этих векторов равна

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

22. Симметричная матрица A задает квадратичную форму

$$x^{\mathsf{T}} A x = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 14x_2x_3 + x_3^2,$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathsf{T}} \in \mathbf{R}^3$. Тогда

A матрица A положительно определена, $\det A = 43$

B матрица A отрицательно определена, $\det A = -43$

C матрица A знакопеременная, $\det A = 43$

D $\quad$ матрица A знакопеременная, $\det A = -43$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

След (сумма диагональных матричных элементов) матрицы A^{-1}, обратной к матрице A, равен

A $\quad$ 8

B $\quad$ -9

C $\quad$ 9

D $\quad$ 4

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или матрица A^{-1} не существует

24. Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nc} = 5.$$

Тогда число c равно

A $\quad$ $\log_2(3/4)$

B $\quad$ $\log_2(4/5)$

C $\quad$ $\log_2(5/6)$

D $\quad$ $\log_2(6/7)$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25. Пусть $k > 2$. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задается формулами $x_1 = \sqrt{k}$, $x_{n+1} = \sqrt{k - x_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A $\quad$ последовательность x_n сходится и ее предел равен $(4k + 1)/2$

B $\quad$ последовательность x_n сходится и ее предел равен $(4k - 1)/2$

C $\quad$ последовательность x_n сходится и ее предел равен $(\sqrt{4k+1} + 1)/2$

D $\quad$ последовательность x_n сходится и ее предел равен $(\sqrt{4k+1} - 1)/2$

E $\quad$ последовательность x_n либо сходится и имеет другой предел, либо расходится

26. У непустого множества $M \subset \mathbf{R}$ нет внутренних точек. Тогда

A   множество M замкнуто

B   множество M имеет изолированные точки

C   все точки множества M граничные

D   множество M имеет внешние точки

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$. Обозначим через M множество его сходимости, и для $x \in M$ обозначим $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}e^{-nx}$. Тогда

A   множество M замкнуто

B   функция $S(x)$ непрерывна на M

C   функция $S(x)$ ограничена на M

D   на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n!} = -x^2 - 1$

A   имеет единственное решение, лежащее в интервале $(-1/2, 0)$

B   имеет единственное решение, лежащее в интервале $(-1, -1/2)$

C   имеет единственное решение, лежащее в интервале $(-3/2, -1)$

D   не имеет решений

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{(2^x - 1)((x+1)^3 - (x-1)^3)}$ равен

A $-3/\ln 2$

B $-\ln 2/3$

C $-\ln 2$

D -3

E   числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

30. Интеграл $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$ равен

A $\pi^2 - 4$

B $2\pi - 3$

C $3\pi^2/4 - 3$

D $3\pi - 6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

31. Производная функции $(\sin x)^{\sin x}$ в точке $x = \pi/2$ равна

A 0

B $1/2$

C 1

D $\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

32. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Обозначим $M = \{x\colon f'(x) = 0\}$. Тогда

A каждая точка множества M изолированная

B каждая точка множества M является точкой локального экстремума функции $f(x)$

C множество M компактное

D множество M неограниченное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4.1.2 Вторая часть теста

1. Дана функция $f(x, y) = (x-1)^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y)\colon x^3 + x = y^2\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего значения и не достигает наименьшего значения;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения и не достигает наибольшего значения;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ на множестве M имеет ровно три локальных экстремума;

Да Нет

г) точка $\left(1/2, \sqrt{5/8}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

д) для любой точки $(x, y) \in M$ выполнено неравенство $f(x, y) \geqslant 0.85$;

Да Нет

е) точка $(0, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $\left(1/3, \sqrt{10/27}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M четно.

Да Нет

2. Подпространства $L_1, L_2 \subset \mathbf{R}^5$ определяются как множества решений систем линейных уравнений:

$$L_1\colon \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \end{cases} \qquad L_2\colon \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 - \alpha x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \end{cases}$$

где α — вещественный параметр. Тогда

а) $\dim L_1 = 4$;

Да Нет

б) $\dim L_2 = 3$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$;

Да Нет

в) пространства L_1 и L_2 ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении;

Да Нет

г) $\dim(L_1 \cap L_2) \geqslant 3$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$;

Да Нет

д) множество $L_1 \cup L_2$ является подпространством в $\mathbf{R}^5$ при всех $\alpha \in \mathbf{R}$;

Да Нет

е) существует $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что множество $L_1 \cup L_2$ является подпространством в $\mathbf{R}^5$;

Да Нет

ж) существует $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что $\dim(L_1 + L_2) \geqslant 4$;

Да Нет

з) существует $\alpha \in \mathbf{R}$ такое, что $\dim(L_1 + L_2) \leqslant 3$.

Да Нет

3. Пусть $y = y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \frac{y^2 - y}{x}$, $y(1) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Обозначим через D область определения функции $y = y(x)$. Тогда

а) при любом a множество D неограниченное;

Да Нет

б) при $a = 2$ функция $y(x)$ строго возрастает;

Да Нет

в) при любом a функция $y(x)$ строго монотонная (строго возрастает или строго убывает);

Да Нет

г) при $a = -1/2$ выполняется равенство $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) = 1$;

Да Нет

д) при $a = -1/2$ выполняется равенство $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$;

Да Нет

е) при $a = 1/2$ график функции $y(x)$ пересекает ось Ox в единственной точке;

Да Нет

ж) при $a = 2$ уравнение $y(x) = c$ имеет решение для любого $c > 0$;

Да Нет

з) при любом $a \leqslant 0$ график функции $y(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^n}{n^5 \cdot 5^n} (x^2 - 2x - 3)^{2n}.$$

Обозначим через M множество, состоящее из всех $x \in \mathbf{R}$, для которых этот ряд сходится, а через $f(x)$ сумму этого ряда для $x \in M$. Также через $F(x)$ обозначим функцию, совпадающую с $f(x)$ на множестве M и равную нулю на множестве $\mathbf{R} \setminus M$. Тогда

а) множество M ограниченное;

Да Нет

б) множество M открытое;

Да Нет

в) множество M имеет предельные точки;

Да Нет

г) на отрезке $[-2/5, 2/5]$ данный ряд сходится равномерно;

Да Нет

д) функция $F(x)$ на M достигает наименьшего значения;

Да Нет

е) график функции $F(x)$ имеет асимптоту;

Да Нет

ж) функция $F(x)$ дифференцируема на $\mathbf{R}$;

Да Нет

з) $F(1) = \dfrac{1}{1 - 1/16}$.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** C. **3.** D. **4.** B. **5.** D. **6.** D. **7.** C. **8.** A. **9.** D. **10.** C. **11.** D. **12.** E. **13.** C. **14.** C. **15.** A. **16.** E. **17.** C. **18.** A. **19.** A. **20.** B. **21.** C. **22.** D. **23.** B. **24.** C. **25.** D. **26.** C. **27.** B. **28.** D. **29.** E. **30.** A. **31.** A. **32.** C.

4.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Выразим $y^2 = x^3 + x$ из определения множества M и подставим в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(x) = (x-1)^2 + x^3 + x = x^3 + x^2 - x + 1$. Так как $y^2 \geqslant 0$, то для нахождения экстремумов функции $f(x, y)$ на множестве M достаточно исследовать функцию $g(x)$ на множестве $N = \{x\colon x^3 + x \geqslant 0\} = \{x\colon x \geqslant 0\}$.

Заметим, что при $x \to +\infty$ функция $g(x) \to +\infty$, поэтому она не достигает на N наибольшего значения. Кроме того, существует $X > 0$ такой, что $g(x) > 1$ при любом $x > X$. И так как $g(0) = 1$ и $g(x)$ непрерывна, то наименьшее значение $g(x)$ на множестве N достигается и принадлежит отрезку $[0, X]$ (на самом отрезке оно достигается по теореме Вейерштрасса, также оно не превосходит $g(0) = 1$, а вне отрезка $[0, X]$ все значения больше единицы). Возвращаясь к функции $f(x, y)$, делаем вывод, что она достигает наименьшего значения и не достигает наибольшего значения на M (ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да»).

Производная функции $g(x)$ равна $g'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Решив уравнение $g'(x) = 0$, получим точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$, из которых только точка $x_2 \in N$. Вторая производная $g''(x) = 6x + 2$, ее значение в точке x_2 равно $g''(x_2) = 6/3 + 2 > 0$, соответственно точка $x = 1/3$ является точкой локального минимума функции $g(x)$ на множестве N, а значит точки $\left(1/3, \pm\sqrt{1/3^3 + 1/3}\right) = \left(1/3, \pm\sqrt{10/27}\right)$ являются точками локального минимума функции $f(x, y)$ на M. Значение функции $f(x, y)$ в обеих точках равно $(1/3-1)^2+10/27 = 22/27 < 0.85$.

Рассмотрим крайнюю точку множества N — точку $x = 0$. В ней значение производной $g'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$, соответственно это точка локального максимума функции $g(x)$ на N. Значит точка $(0, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на M.

Таким образом, функция $f(x, y)$ имеет три локальных экстремума на M, при этом так как она достигает наименьшего значения на M, то точки $\left(1/3, \pm\sqrt{10/27}\right)$ и являются точками глобального минимума.

Ответы на вопросы: в) — «да», г) — «нет», д) — «нет», е) — «да», ж) — «да», з) — «нет».

Задача 2. Представим системы уравнений, определяющие подпространства L_1 и L_2, в матричном виде: пусть $x \in \mathbf{R}^5$, тогда

$$L_1\colon A_1x = 0,\ \text{где}\ A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2\colon A_2x = 0,\ \text{где}\ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 5 & -\alpha \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего следует отметить, что ранги матриц A_1 и A_2 равны двум. Действительно, очевидным образом отличны от нуля миноры этих матриц, состоящие из первых двух столбцов. Это означает, что размерности обоих пространств равны $\dim L_1 = \dim L_2 = \dim \mathbf{R}^5 - \operatorname{rank} A_i = 5 - 2 = 3$. Таким образом, ответ на вопрос а) — «нет», а на вопрос б) — «да».

Далее, легко видеть, что если $\alpha = 1$, то первая и вторая строки матрицы A_1 равны соответственно сумме и разности строк матрицы A_2. Это означает, что при $\alpha = 1$ строки матрицы A_2 равны соответственно полусумме и полуразности строк матрицы A_1 (отметим, что вторая строка матрицы A_2 равна полуразности строк матрицы A_1 при любом α). По этой причине множества решений обеих систем совпадают. Таким образом, при $\alpha = 1$ пространства L_1 и L_2 совпадают, $L_1 = L_2$.

Пересечение $L_1 \cap L_2$ подпространств L_1 и L_2 определяется как множество решений системы уравнений, содержащей все уравнения, определяющие эти подпространства. Другими словами, подпространство $L_1 \cap L_2$ определяется как множество решений системы линейных уравнений с матрицей B, которая является «объединением» матриц A_1 и A_2:

$$L_1 \cap L_2\colon Bx = 0, \quad \text{где} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 6 & -3 \\ 1 & 6 & -3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 5 & -\alpha \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

При $\alpha = 1$ ранг матрицы B равен 2, поскольку третья и четвертая ее строки равны некоторым линейным комбинациям первых двух строк, поэтому размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ равна $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 = \dim L_2 = \dim \mathbf{R}^5 - \operatorname{rank} B = 5 - 2 = 3$.

Если же $\alpha \neq 1$, то ранг матрицы B равен 3, поскольку три из четырех строк матрицы B линейно независимы. По этой причине размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ равна $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim \mathbf{R}^5 - \operatorname{rank} B = 5 - 3 = 2$.

Теперь легко ответить на остальные вопросы задачи.

Если пространства L_1 и L_2 ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении, то скалярное произведение произвольного вектора из L_1 и произвольного вектора из L_2 должно быть равно нулю. Поскольку размерность пересечения подпространств L_1 и L_2 больше нуля, $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 = \dim L_2 = 3 \neq 0$ при $\alpha = 1$ и $\dim(L_1 \cap L_2) = 2 \neq 0$ при $\alpha \neq 1$, то это пересечение содержит также ненулевые векторы. В таком случае подпространства L_1 и L_2 не могут быть ортогональными друг другу: если мы возьмем произвольный ненулевой вектор v, который принадлежит пересечению подпространств L_1 и L_2, $v \in L_1 \cap L_2$, то скалярное произведение этого вектора на самого себя (взятого первым сомножителем в скалярном произведении в качестве вектора из L_1, и взятого вторым сомножителем в скалярном произведении в качестве вектора из L_2) будет строго положительным, т. е. отличным от нуля. Поскольку существуют неортогональные друг другу векторы из L_1 и L_2, то эти подпространства не могут быть ортогональными друг другу. Таким образом, ответ на вопрос в) — «нет».

Поскольку если $\alpha \neq 1$, то $\dim(L_1 \cap L_2) = 2 < 3$, получаем, что ответ на вопрос г) — также «нет».

Объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств L_1 и L_2 как подмножеств пространства $\mathbf{R}^5$, вообще говоря, не является линейным пространством. Например, при $\alpha \neq 1$ ни одно из подпространств L_1 или L_2 не содержится целиком в другом подпространстве. Поэтому линейные комбинации векторов из L_1 и L_2 могут не принадлежать объединению подпространств. В этом можно убедиться, рассмотрев случай $\alpha = 2$ и векторы $v_1 = (0, 0, 9, 4, 11)^T \in L_1$ и $v_2 = (0, 0, 8, 6, 11)^T \in L_2$. Поскольку, как легко убедиться, их разность $v = v_1 - v_2 = (0, 0, 1, -2, 0)$ не удовлетворяет ни одной из двух систем, $A_1 v \neq 0$ и $A_2 v \neq 0$, то вектор v не принадлежит ни L_1, ни L_2. Соответственно объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств L_1 и L_2 не является в этом случае линейным пространством и соответственно подпространством в $\mathbf{R}^5$.

В то же время при $\alpha = 1$ подпространства L_1 и L_2 совпадают, поэтому $L_1 \cup L_2 = L_1 = L_2$, т. е. $L_1 \cup L_2$ является линейным пространством. Соответственно ответ на вопрос д) – «нет», ответ на вопрос е) – «да» (в данном случае подходящими значениями параметра α являются произвольное $\alpha \neq 1$ для пункта ж) и $\alpha = 1$ для пункта з)).

Наконец, рассмотрим размерность суммы $L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2. Как известно, выполнено равенство $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$. Поскольку $\dim L_1 = \dim L_2 = 3$, а $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 = \dim L_2 = 3$ при $\alpha = 1$ и $\dim(L_1 \cap L_2) = 2$ при $\alpha \neq 1$, то мы можем заключить, что $\dim(L_1 + L_2) = 3$ при $\alpha = 1$ и $\dim(L_1 + L_2) = 4$ при $\alpha \neq 1$. Таким образом, на вопросы ж) и з) ответы «да».

Задача 3. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. решим его почленным интегрированием:

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Возьмем неопределенный интеграл

$$\int \frac{dy}{y^2 - y} = \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| + C,$$

откуда получим неявное выражение для общего решения:

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = Cx.$$

Подставив начальное условие, имеем

$$\left| \frac{y-1}{y} \right| = \left| \frac{a-1}{a} \right| x.$$

Так как правая часть исходного уравнения не определена при $x = 0$, то любое решение продолжается не далее, чем на множество $x > 0$. Отдельно следует рассмотреть постоянные решения $y(x) \equiv 0$ и $y(x) \equiv 1$ при $x > 0$ (соответствуют $a = 0$ и $a = 1$).

Рассмотрим три случая для начального условия:

$a > 1$: В этом случае модули раскрываются в

$$\frac{y-1}{y} = \frac{a-1}{a}x,$$

откуда получаем явное решение

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a}x},$$

определенное и строго возрастающее на интервале $D = (0, a/(a-1))$. При $x \to \to a/(a-1)-$ решение $y(x) \to +\infty$.

$0 < a < 1$: В этом случае модули раскрываются в

$$\frac{1-y}{y} = \frac{1-a}{a}x,$$

откуда получаем явное решение

$$y(x) = \frac{1}{1 + \frac{1-a}{a}x},$$

определенное и строго убывающее на интервале $D = (0, +\infty)$. При $x \to 0+$ решение $y(x) \to 1$, при $x \to +\infty$ решение $y(x) \to 0$.

$a < 0$: В этом случае, так же как и в случае $a > 1$, модули раскрываются в

$$\frac{y-1}{y} = \frac{a-1}{a}x,$$

откуда получаем явное решение

$$y(x) = \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a}x},$$

определенное и строго возрастающее на интервале $D = (a/(a-1), +\infty)$. При $x \to \to a/(a-1)+$ решение $y(x) \to -\infty$.

Примеры графиков решений приведены на рисунке 2.

Таким образом, при $a > 1$ множество D ограниченное (вопрос а) — «нет»). При $a = 2 > 1$ функция $y(x)$ строго возрастающая (вопрос б) — «да») и строго больше единицы (ответ на вопрос ж) — «нет»). При $a = 0$ или $a = 1$ функция $y(x)$ постоянная (вопрос в) — «нет»). Из сказанного выше следует, что ответы на вопросы г) — «нет» (при $a = -1/2$ решение не продолжается до точки $x = 0$), д) — «да». Так как график функции $y(x)$ не пересекает ось Ox при любом $a \neq 0$, то ответ на вопрос е) — «нет». При любом $a \in \mathbf{R}$ график функции $y(x)$ имеет асимптоту, так что ответ на вопрос з) — «да».

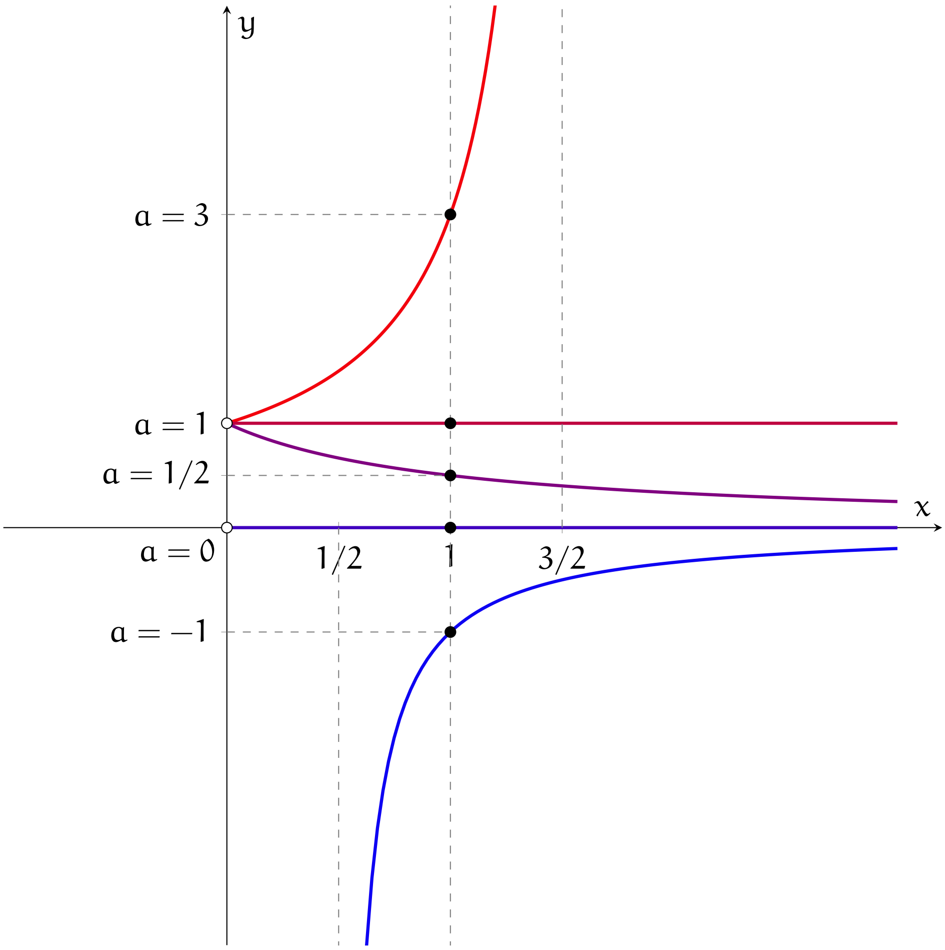

Рис. 2. Графики решений дифференциального уравнения при разных начальных условиях

Задача 4. Прежде всего заметим, что данный ряд представляет собой степенной ряд по аргументу $y = (x^2 - 2x - 3)^2$. Радиус сходимости R степенного ряда с коэффициентами a_n может быть найден по формуле Коши:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

где символ $\varlimsup\limits_{n\to\infty}$ обозначает верхний предел при $n \to \infty$. В нашем случае

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{3^n \cdot n^n}{n^5 \cdot 5^n}\right)^{1/n} = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{3 \cdot n}{n^{5/n} \cdot 5}\right) = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\frac{3}{5} \cdot n^{1-5/n}\right).$$

Поскольку $1 - 5/n > 0$, выражение под знаком предела неограниченно растет при увеличении n, тем самым этот предел не существует. Это означает, что радиус сходимости этого степенного ряда равен нулю, и этот ряд сходится только при тех значениях переменной x, при которых $y = (x^2 - 2x - 3)^2 = ((x-3)(x+1))^2 = 0$. Другими словами, этот ряд сходится только при $x = -1$ и при $x = 3$.

Теперь легко ответить на все вопросы задачи.

Множество M, на котором ряд сходится, состоит из двух точек: $x = -1$ и $x = 3$. Оно ограничено (ответ на вопрос а) — «да»), замкнуто (ответ на вопрос б) – «нет») и не имеет предельных точек (ответ на вопрос в) – «нет»).

Поскольку отрезок $[-2/5, 2/5]$ не содержится во множестве M, то на отрезке $[-2/5, 2/5]$ ряд расходится и тем самым не является равномерно сходящимся (ответ на вопрос г) — «нет»).

Поскольку ряд сходится только в двух точках $x = -1$ и $x = 3$, в которых каждый член ряда равен нулю, то сумма ряда в этих точках (а значит, и функция $f(x)$, определенная только в этих двух точках) равна нулю. Функция $F(x)$, равная функции $f(x)$ на множестве M и нулю вне множества M, тождественно равна нулю на всей числовой прямой. Соответственно она достигает на $\mathbf{R}$ наименьшего значения (ответ на вопрос д) — «да»), ее график имеет асимптоту — ось Ox (ответ на вопрос е) — «да»), она дифференцируема на $\mathbf{R}$ (ответ на вопрос ж) — «да»), а при $x = 1$ функция $F(x)$ принимает нулевое значение, а не число $1/(1 - 1/16)$ (ответ на вопрос з) — «нет»).

5 Формат вступительного экзамена 2024 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляет 3 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей. Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 1.5 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет».

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 1.5 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «+1»
   * неправильный ответ — «−0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «+1»
   * неправильный ответ — «−1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780–819 баллов	11
750–779 баллов	10
720–749 баллов	9
680–719 баллов	8
640–679 баллов	7
600–639 баллов	6
560–599 баллов	5
520–559 баллов	4
480–519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской экономической школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей;
* подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Углубленный курс для программы МАЭ: январь–июнь 2024 г.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (пятница, 3 ак. часа лекция, и среда, 2 ак. часа семинар).
* **Ускоренный курс для прикладных программ: апрель–май 2024 г.**
  В ускоренном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы по теории вероятностей. Занятия 2 раза в неделю (вторник и четверг, 3 ак. часа лекция).

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. +7 (495) 956-95-08 (доб. 103), email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись лекций на подготовительных курсах РЭШ по математике. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Приемная комиссия РЭШ

Телефоны: +7 (495) 956-95-08 (доб. 144), +7 (993) 222-79-93.

Email: abitur@nes.ru.

Web: http://www.nes.ru.

Адрес: Российская экономическая школа, 121205, город Москва, Инновационный центр Сколково, ул. Нобеля, 3