Негосударственное образовательное учреждение
высшего образования
«Российская экономическая школа» (институт)

Программы

Подготовительных курсов

по математике (углубленный курс)

Москва

2023 г.

УГЛУБЛЕННЫЙ КУРС ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Структура и содержание программы повышения квалификации

1. Общая характеристика программы

1.1. Область применения программы
1.2. Цель и задачи реализации программы
1.3. Требования к результатам освоения программы
1.4. Требования к уровню подготовки слушателей, необходимому для освоения программы
1.5. Трудоемкость обучения
1.6. Форма обучения
1.7. Режим занятий

2. Содержание программы

2.1. Календарный учебный график
2.2. Учебный план
2.3. Содержание дисциплины

3. Условия реализации программы

3.1. Материально-технические условия реализации программы
3.2. Учебно-методическое и информационное обеспечение

4. Оценка качества освоения программы

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОГРАММЫ

1.1. Область применения программы.

Настоящая программа предназначена для специалистов в области математики.

1.2. Цель реализации программы

Цель - освоение основных методов линейной алгебры и математического анализа, необходимых для изучения общетеоретических и специальных дисциплин;
развитие логического и алгоритмического мышления; формирование навыков формализации моделей реальных процессов.

Задачи обучения:
-изучение теоретических основ линейной алгебры и математического анализа, приемов и методов исследования и решения профессиональных задач с помощью аппарата линейной алгебры и математического анадиза;
-формирование практических навыков решения прикладных задач, используя знания по линейной алгебре и математическому анализу;
-формирование навыков построения теоретических и эконометрических моделей, изучаемых процессов с помощь методов линейной алгебры и математического анализа.
В процессе изучения данной дисциплины студент осваивает следующие компетенции:
-способен на основе типовых методик действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-2);
- способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);
- способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей (ПК-5);
- способен на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6);

1.3. Требования к результатам освоения программы

Выпускник программы должен освоить указанные выше компетенций и демонстрировать следующие результаты:
Знать:
- основные понятия и законы линейной алгебры и математического анализа;
- основные методы и приёмы решения задач линейной алгебры и математического анализа;
-приёмы и построение моделей реальных экономических процессов методами линейной алгебры и математического анализа;

Уметь:
- ориентироваться в справочной и научной литературе по линейной алгебре и математическому анализу;
- использовать знания фундаментальных основ линейной алгебры и математического анализа;
- применять методы линейной алгебры и математического анализа в решении профессиональных задач;
- анализировать результаты расчётов и обосновывать полученные выводы;

Владеть:
- умением читать и анализировать учебную литературу;
- методами линейной алгебры и математического анализа и моделирования при решении профессиональных задач;
- навыками использования аппарата линейной алгебры и математического анализа для анализа и решения задач экономики;

- навыками анализа результатов расчета и обоснования полученных результатов;

1.4. Требования к уровню подготовки слушателей, необходимому для освоения программы

К освоению программы допускаются лица имеющее высшее образование и лица, получающее высшее образование. Наличие указанного образования должно подтверждаться документом государственного или установленного образца.

1.5. Трудоемкость обучения

Нормативная трудоемкость обучения по данной программе – 134 часа, включая все виды аудиторной и внеаудиторной (самостоятельной) учебной работы слушателя и итоговую аттестацию.

1.6. Форма обучения

Форма обучения – электронное с применением дистанционных образовательных технологий

1.7. Режим занятий

Учебная нагрузка устанавливается не более 24 часов в неделю, включая все виды аудиторной и внеаудиторной (самостоятельной) учебной работы слушателя.

2. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

2.1. Календарный учебный график

	1-я неделя		2-я неделя		3-я неделя		4-я неделя		5-я неделя		6-я неделя		7-я неделя		8-я неделя		9-я неделя		10-я неделя		11-я неделя		12-я неделя		13-я неделя		14-я неделя		15-я неделя		16-я неделя		17-я неделя		18-я неделя		19-я неделя		20-я неделя		21-я неделя
	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	семинары	лекции	итоговый тест
Математический анализ	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**																			
Линейная алгебра																							**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**	**3**			**4**
Заключительное занятие																																							**2**	**3**	

2.2. УЧЕБНЫЙ ПЛАН
УГЛУБЛЕННОГО КУРСА ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

№ п/п	Наименование разделов, дисциплин и тем	Всего часов	В том числе:		
			лекции	семинары	самостоятельная работа
1.	**Раздел 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**	**66**	**33**	**22**	**11**
	Тема 1. Множества и отображения.	6	3	2	1
	Тема 2. Пределы.	6	3	2	1
	Тема 3. Непрерывность.	6	3	2	1
	Тема 4. Функциональные последовательности. Дифференцирование функции одной переменной.	6	3	2	1
	Тема 5. Производные высших порядков, исследование функций.	6	3	2	1
	Тема 6. Интегрирование функций.	6	3	2	1
	Тема 7. Дифференциальные уравнения.	6	3	2	1
	Тема 8. Числовые ряды.	6	3	2	1
	Тема 9. Функциональные и степенные ряды.	6	3	2	1
	Тема 10. Дифференцирование функций нескольких переменных.	6	3	2	1
	Тема 11. Неявные функции, задачи на экстремум.	6	3	2	1
2.	**Раздел 2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**	**58**	**24**	**16**	**18**
	Тема 1. Линейные пространства и матрицы.	8	3	2	3
	Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений.	7	3	2	2
	Тема 3. Квадратные матрицы.	8	3	2	3
	Тема 4. Линейные операторы и их матрицы.	7	3	2	2
	Тема 5. Специальные виды матриц и операторов.	7	3	2	2
	Тема 6. Пространства со скалярным произведением.	7	3	2	2
	Тема 7. Сопряженные операторы и симметричные матрицы.	7	3	2	2
	Тема 8. Квадратичные формы.	7	3	2	2
3.	**Раздел 3. ОБЗОРНОЕ ЗАНЯТИЕ**	**6**	**3**	**2**	**1**
	Тема 1. Заключительное обзорное занятие.				
	Всего	**130**	**60**	**40**	**30**
	ИТОГОВЫЙ ЭКЗАМЕН	**4**			
	Итого	**134**			

2.3. Содержание.

Часть I. Математический анализ

Тема 1. Множества и отображения.

Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Образ элемента или подмножества области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка на числовой прямой; мощность континуума.

Арифметическое (числовое, координатное) пространство R^n. Понятие ограниченного множества в R^n. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства R^n.

Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота R^n). Понятие компактного (т.е. ограниченного и замкнутого) множества в R^n и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств.

Тема 2. Пределы

Понятие последовательности точек R^n (или точек числовой прямой *R*) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек R^n. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в R^n.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведении, частного двух последовательностей.

Определение предела функции в точке на языке "ε-δ"; понятие предела на бесконечности. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций.

Тема 3. Непрерывность.

Определение непрерывности функции. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в R^n (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в R^n или R^1. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $+\infty$ и $-\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

Тема 4. Функциональные последовательности. Дифференцирование функции одной переменной.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

Производная, ее геометрический и механический смысл. Односторонние и бесконечные производные. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.

Тема 5. Производные высших порядков, исследование функций.

Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Признаки возрастания и убывания функций. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба.

Тема 6. Интегрирование функций

Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Тема 7. Дифференциальные уравнения.

Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения.

Тема 8. Числовые ряды.

Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Тема 9. Функциональные и степенные ряды.

Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

Степенные ряды.

Тема 10. Дифференцирование функции нескольких переменных.

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня.

Тема 11. Неявные функции, задачи на экстремум.

Теорема о неявной функции.

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений.

Часть 2. Линейная алгебра

Тема 1. Линейные пространства и матрицы.

Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования. Понятие симметричной матрицы.

Общее определение (вещественного) векторного пространства; примеры. Линейные комбинации системы (множества) векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы (множества) векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы (множества) векторов.

Понятие базиса векторного пространства и его конечномерности. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Соответствие между действием над векторами и над их координатами.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Линейная оболочка системы (множества) векторов как подпространство. Ранг системы (множества) векторов и размерность его линейной оболочки.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная их сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в R^n , его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений).

Квадратные системы линейных уравнений с невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы.

Тема 3. Квадратные матрицы

Член определителя квадратной матрицы, его знак. Определитель как сумма всех своих членов. Определитель единичной матрицы. Свойства определителя. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения квадратной системы линейных уравнений. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Тема 4. Линейные операторы и их матрицы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства *X* в (возможно другое) векторное пространство *Y*; примеры. Совокупность *L*(*X, Y*) всех линейных операторов из *X* в *Y* как векторное пространство; нулевой оператор. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из *X* в *Y* для фиксированных базисов этих пространств. Матрицы перехода при смене базисов в *X* и *Y*.

Линейные операторы, действующие из векторного пространства *X* в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в *X*. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные значения (числа) линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам.

Тема 5. Специальные виды матриц и операторов

Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы проектора; диагональный вид матрицы проектора.

Тема 6. Пространства со скалярным произведением

Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в R^n . Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши-Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы.

Тема 7. Сопряженные операторы и симметричные матрицы.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Простота структуры симметричной матрицы (существование базиса из ее собственных векторов). Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора.

Тема 8. Квадратичные формы.

Симметричные билинейные и квадратичные функции, их матрицы. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

Часть 3. Обзорное занятие

Тема 1. *Заключительное обзорное занятие*

Разбор решений типичных задач по всем темам математического анализа и линейной алгебры.

Перечень компетенций в процессе освоения образовательной программы:

Общекультурные компетенции

ОК-1 – способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу;
ОК-3 − готовность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала;

Общий объем аудиторных часов – 100 часов,
в том числе: лекции – 60 час., семинары – 40 час.

3.УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

3.1. Материально-технические условия реализации программы

РЭШ располагает лекционными аудиториями, оборудованными мультимедийными комплексами для демонстрации слайдов и презентаций, компьютерными лабораториями для проведения практических занятий с использованием компьютерных средств обучения. Все компьютерные лаборатории оснащены современными компьютерами. Все компьютеры соединены в локальную вычислительную сеть с выходом в Internet через отдельный сервер, подключенный к сети института. Вся техника активно используется в учебном процессе. РЭШ имеет множительную технику для подготовки раздаточного материала.

3.2. Учебно-методическое обеспечение программы

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, М.-Л., Гостехиздат, 1951.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1, 2, М., “Наука”, 1964.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1, 2. М., “Наука”, 1981.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ (в двух частях). М., Изд-во МГУ, 1958-87.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., “Наука”, 1980.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ.
7. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., “Наука”, 1982.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957.
9. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М., “Наука”, 1963.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., “Наука”, 1964.
11. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. М., “Наука”, 1984.
12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., “Наука”, 1963.
13. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., “Наука”, 1970.
14. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., Гостехиздат, 1964.
15. Кострикин, Сенченко и др. Пособие по линейной алгебре для студентов–экономистов. Изд-во МГУ, 1987.

Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., «Наука», 1974.

4. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОСВОЕНИЯ ПРОГРАММЫ

Оценка качества освоения программы осуществляется аттестационной комиссией в виде итогового теста.

Итоговый тест состоит из двух частей, сумма баллов за каждую часть является итоговой оценкой. Максимально возможное значение суммы баллов равно 40.

Слушатель считается аттестованным, если имеет положительную оценку (сумма баллов равна 20 или больше) за итоговый экзамен.