Современная экономическая наука и образование в России

РЭШ
Российская
экономическая
школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ПРОГРАММУ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» В РЭШ В 2021 ГОДУ

Москва 2021

Бремзен А. С., Головань С. В., Катышев П. К., Малокостов А. М., Тонис А. С.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в РЭШ в 2021 году. — М., 2021 — 68 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в Российскую экономическую школу на программу «Магистр экономики» в 2021 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене на программу «Магистр экономики».

Содержание и форма экзамена в течение ряда лет оставались неизменными.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена по математике.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2018–2020 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

   Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. Предел последовательности

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. Предел функции. Непрерывность функций (отображений)

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «$\varepsilon-\delta$»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «$\varepsilon-\delta$», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$.

Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbf{R}^n$)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. Методы оптимизации в $\mathbf{R}^n$

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

    Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

    Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

    Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

    Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. **Степенные ряды**

    Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**

    Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М.: Высшая школа, 1999.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М.: Физматлит, 2004.
3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М.: Наука, 1987.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М.: Наука, 1980.
5. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М.: Наука, 1964.
6. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 2000.
7. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1974.
8. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. М.: Наука, 1966.
9. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М.: Наука, 1971.
10. Ефимов А. В., Демидович Б. П., ред., *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. М.: Наука, 1981.
11. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М.: Наука, 1970.
12. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1984.
13. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Изд-во МГУ, 1987.
14. Ильин В. А., Ким Г. Д., *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*. М.: Изд-во МГУ, 1998.
15. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1984.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989.
17. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М.: Изд-во МГУ, 1987.
18. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
19. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1963.
20. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982.
21. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
22. Рудин У., *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
23. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М.: Наука, 1980.
24. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1979.

25. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.

26. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1964.

27. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М.: Наука, 1963.

28. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М.: Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

   Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. **Определитель матрицы**

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. **Линейные операторы**

   Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

   Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

   Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

   Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

   Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

   Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. **Евклидовы пространства**

   Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М.: Высшая школа, 1999.
2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М.: Физматлит, 2004.
3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М.: Наука, 1987.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М.: Наука, 1980.
5. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М.: Наука, 1964.

6. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 2000.
7. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1974.
8. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. М.: Наука, 1966.
9. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М.: Наука, 1971.
10. Ефимов А. В., Демидович Б. П., ред., *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. М.: Наука, 1981.
11. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М.: Наука, 1970.
12. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1984.
13. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М.: Изд-во МГУ, 1987.
14. Ильин В. А., Ким Г. Д., *Линейная алгебра и аналитическая геометрия*. М.: Изд-во МГУ, 1998.
15. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М.: Наука, 1984.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1989.
17. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М.: Изд-во МГУ, 1987.
18. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
19. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1963.
20. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Наука, 1982.
21. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
22. Рудин У., *Основы математического анализа*. М.: Мир, 1976.
23. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М.: Наука, 1980.
24. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М.: Наука, 1979.
25. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2. М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
26. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Наука, 1964.
27. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М.: Наука, 1963.
28. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М.: Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2018 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[4]{n}} \displaystyle\int_1^n \ln x \, dx$ равен

A 0

B e

C $\ln 2$

D 4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2. Выберите истинное утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A пересечение любого числа компактных множеств является компактным множеством

B объединение не более чем счетного числа ограниченных множеств является ограниченным множеством

C пересечение любого числа дополнений к замкнутым множествам является дополнением к замкнутому множеству

D любое множество является пересечением конечного числа множеств, каждое из которых является либо открытым либо замкнутым

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Интеграл $\int_1^2 \frac{x+3}{3x^2-x^3}dx$ равен

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\ln 2$

C $\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\ln 2$

D $-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

4. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^4-\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^4}{x}$ равен

A 2

B 4

C 6

D 8

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

5. Пусть $\{x_n\}$ — неограниченная последовательность. Тогда

A множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной верхней грани

B множество значений последовательности $\{x_n\}$ не имеет точной нижней грани

C если $x_n \neq 0$, то последовательность $\{1/x_n\}$ является ограниченной

D последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, такую что $x_{k_n} >$ $> n$ или $x_{k_n} < -n$ для всех n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ равен

A 1

B -1

C e

D $1/e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и дифференцируема на интервале $(0,1)$. Тогда существует значение $c \in \mathbf{R}$, такое что функция $g(x) = f(x) + cx$

A достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0,1]$ в одной из точек $x = 0$ или $x = 1$

B достигает своего наибольшего значения на отрезке $[0,1]$ в одной из его внутренних точек

C имеет ненулевую производную ($g'(x) \neq 0$) при всех $x \in (0,1)$

D имеет нулевую производную ($g'(x) = 0$) в некоторой точке $x \in (0,1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[0,1]$, причем $f(0) > g(0)$ и $f(1) > g(1)$. Тогда

A если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет конечное количество решений, то это количество четное

B если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет бесконечное количество решений, то множество его решений несчетно

C если уравнение $f^2(x) = g^2(x)$ имеет решения, то и уравнение $f(x) = g(x)$ имеет решения

D если для некоторого $x_0 < 0.5$ выполнено $f(2x_0) = g(2x_0)$, то количество решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(0, 2x_0)$ совпадает с количеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ на интервале $(2x_0, 1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей вещественной прямой, причем принимает значения разных знаков. Тогда

A функция $\operatorname{tg} f(x)$ определена на всей вещественной прямой

B функция $\operatorname{tg} f(x)$ определена не на всей вещественной прямой

C если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $\operatorname{arctg} f(x)$ достигает наибольшего значения

D если функция $f(x)$ достигает наименьшего и наибольшего значения, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \dfrac{1-y^2}{2x}$ с начальным условием $y(2) = 3$. Выберите *ложное* утверждение:

A $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1$

B $y'(1+\sqrt{2}) = -1$

C $y(3) = 2$

D $y(-3) = 1/2$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

11. График функции $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, построенный на плоскости в координатах (x, y), имеет

A ровно одну точку перегиба

B точку касания с прямой $y = ax + b$ для любого $a \in \mathbf{R}$ при некотором $b \in \mathbf{R}$

C наклонную асимптоту $y = ax + b$ для некоторых $a, b \in \mathbf{R}$

D четное число точек пересечения с прямой $y = a$ при некотором $a \in \mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\cos x} + \sin x\right)^{1/x}$ равен

A 1

B $\sqrt[4]{e^3}$

C e

D $\sqrt{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Найдите *ложное* утверждение.

A если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится, то она достигает своей точной верхней или точной нижней грани

B если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет условию $|a_{n+1} - a_n| < < 1/2^n$, $n = 1, 2, \ldots$, то она сходится.

C если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена, то множество её частичных пределов не пусто

D если последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ монотонна и содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

14. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$ $(a > 0, b > 0, c > 0)$ равен

A e^{abc}

B $e^{(a+b+c)/3}$

C $\sqrt[3]{abc}$

D $\dfrac{a+b+c}{3}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Множество $A \in \mathbf{R}$ содержится в множестве своих предельных точек. Тогда

A множество его граничных точек пусто

B множество его изолированных точек пусто

C множество A замкнуто

D множество A не замкнуто

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \left(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)^{1/\ln x}$ равен

A 0

B 1

C e

D e^2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ — сходящаяся последовательность, $\{y_n, n = 1, 2, \dots\}$ — ограниченная последовательность. Обозначим через $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, z_n$ верхний предел последовательности $\{z_n, n = 1, 2, \dots\}$. Тогда

A $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) > \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

B $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) < \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

C $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

D $\quad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n)$ не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $(1, +\infty)$.

II. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $(0, 2) \cup (3, 5)$.

III. Существует непрерывная на интервале $(0, 1)$ функция, множество значений которой есть $[0, 2]$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D I, II и III

E ни одно из утверждений I, II и III

19. Кривая на координатной плоскости задана уравнением $x^3 + y^3 = 9$. Через точку $(1, 2)$ проведена касательная к этой кривой. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат, и отрезком касательной между осями координат, равна

A $81/8$

B $64/3$

C $63/4$

D $39/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

20. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 1]$ и принимает значения в отрезке $[0, 1]$. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана рекуррентно: $x_1 \in [0, 1]$, $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 2, 3, \dots$ Тогда

A	если функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то для любого $x_1 \in [0, 1]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

B	если функция $f(x)$ не убывает, то для любого $x_1 \in [0, 1]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

C	если функция $f(x)$ разрывна на $[0, 1]$, то существует такое число $x_1 \in [0, 1]$, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует

D	если предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и равен c, то $f(c) = c$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Пусть A и B — две матрицы размера $m \times n$, где $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Обозначим через $\operatorname{tr} X$ след (сумму диагональных элементов) квадратной матрицы X, также обозначим через X^T матрицу, транспонированную к X. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Если $A \neq 0$, то $\operatorname{tr}(A^T A) > 0$.

II. $\operatorname{tr}(A^T B) \leqslant \dfrac{\operatorname{tr}(A^T A) + \operatorname{tr}(B^T B)}{2}$.

III. $(\operatorname{tr}(A^T B))^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^T A) \operatorname{tr}(B^T B)$.

A	ни одно из I, I, III

B	только I

C	только I и II

D	только I и III

E	I, II и III

22. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Обозначим через $p_X(\lambda) = \det(X - \lambda I)$ характеристический многочлен матрицы X. Тогда

A	$p_{A^2}(\lambda) = p_A(\lambda)$

B	$p_{A^2}(\lambda^2) = (p_A(-\lambda))^2$

C	$p_{A^2}(\lambda^2) = (p_A(\lambda))^2$

D	$p_{A^2}(\lambda^2) = p_A(\lambda) \cdot p_A(-\lambda)$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, которые трактуются как линейные операторы в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\operatorname{Im} X$ и $\operatorname{Ker} X$ образ и ядро матрицы X соответственно. Тогда

A если $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} B$, то $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$

B если $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$, то $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$

C если $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$, то $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} B$

D если $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Ker}(AB)$, то $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — две системы векторов в $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$. Обозначим через $L(X)$ и $L(Y)$ их линейные оболочки. Тогда

A если $L(X) \subset L(Y)$ и система X линейно зависимая, то $m \leqslant n$

B если $L(X) \subset L(Y)$ и система X линейно независимая, то $m \leqslant n$

C если $L(X) \subset L(Y)$ и система Y линейно зависимая, то $m \leqslant n$

D если $L(X) \subset L(Y)$ и система Y линейно независимая, то $m \leqslant n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y + \sin x$, $y(0) = 0$. Тогда $y(x)$

A не определена при $x = \pi$

B определена при $x = 1\pi$, но не определена при $x = 2\pi$

C определена при $x = 2\pi$, но не определена при $x = 4\pi$

D определена при $x = 4\pi$, но не определена при $x = 8\pi$

E определена при $x = 8\pi$

26. Интеграл $\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx$ равен

A $1/60$

B $1/30$

C $1/3$

D $11/12$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

27. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой. Тогда

A функция $\ln f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

B функция $\arcsin f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

C функция $f^2(x) - 2f(x) + 3$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

D функция $\operatorname{tg} f(x)$ также определена, непрерывна и ограничена на всей вещественной прямой

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Функция $f(x, y) = x^2 - y^2$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + 2y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках, но не достигает наименьшего значения

C достигает наименьшего значения ровно в двух точках, но не достигает наибольшего значения

D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Функция $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

A достигает глобального максимума в точке $x = 0$

B имеет точку перегиба в точке $x = 0$

C достигает локального минимума в точке $x = 1$

D не достигает глобального минимума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Непустые множества $A, B \subset \mathbf{R}$ таковы, что замыкание множества A равно замыканию множества B. Тогда

A если x — внутренняя точка для A, то x — внутренняя точка для B

B если x — внешняя точка для A, то x — внешняя точка для B

C если x — граничная точка для A, то x — граничная точка для B

D если $x \in A$ — предельная точка для A, то $x \in B$ и x — предельная точка для B

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть при $n \in \mathbf{N}$
$$f_n(x) = \frac{nx}{n + x^2}$$
и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (для тех значений $x \in \mathbf{R}$, при которых этот предел существует). Тогда при $n \to \infty$ функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$

A равномерно на $\mathbf{R}$

B равномерно на $(-\infty, -1]$

C равномерно на $[1, +\infty)$

D равномерно на $[-1, 1]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на множестве $M \subset \mathbf{R}$. Тогда

A если $M = [0, +\infty)$ и функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M, то $f(x)$ ограничена на M

B если $M = (0, 1)$ и функция $f(x)$ дифференцируема на M, то $f(x)$ равномерно непрерывна на M

C если $M = (0, 1)$, функция $f(x)$ дифференцируема на M и производная $f'(x)$ не ограничена на M, то $f(x)$ не является равномерно непрерывной функцией на M

D если $M = [0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть A — ортогональная матрица порядка $2n$, где $n \geqslant 2$. Обозначим через a_1, a_2, ..., a_{2n} столбцы матрицы A. Матрицы P и Q определяются следующим образом:
$$P = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T, \quad Q = \sum_{i=n+1}^{2n} a_i a_i^T,$$
где через a_i^T обозначена строка, транспонированная к столбцу a_i. Тогда

а) матрица P задает ортопроектор;

Да Нет

б) матрица Q ортогональная;

Да Нет

в) матрица $P - Q$ ортогональная;

Да Нет

г) $P + Q = I$;

Да Нет

д) $QP = P$;

Да Нет

е) $A^T PA$ является диагональной матрицей;

Да Нет

ж) AQA^T является диагональной матрицей;

Да Нет

з) $APA^T + AQA^T$ является диагональной матрицей.

Да Нет

2. Дан функциональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2x^2 - x^4} \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right).$$
Обозначим через M множество тех x, для которых ряд сходится, и для $x \in M$ обозначим сумму этого ряда через $f(x)$. Тогда

а) множество M ограничено сверху;

Да Нет

б) множество M открыто;

Да Нет

в) граница множества M пуста;

Да Нет

г) уравнение $f(x) = 0$ имеет чётное число решений;

Да Нет

д) функция $f(x)$ является чётной;

Да Нет

е) интервал $(-3, -2)$ содержится в M, и на интервале $(-3, -2)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) интервал $(0, 1)$ содержится в M, и на интервале $(0, 1)$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) функция $f(x)$ ограничена на M.

Да Нет

3. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = y^2 - y$, $y(0) = a$, где a — вещественный параметр. Тогда

а) при любом a область определения функции $y(x)$ является неограниченным множеством;

Да Нет

б) при любом a функция $y(x)$ строго монотонна;

Да Нет

в) при любом a график функции $y(x)$ имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

г) при любом a функция $y(x)$ является не периодической функцией;

Да Нет

д) если $0 < a < 1$, то областью определения функции $y(x)$ является вся числовая прямая;

Да Нет

е) $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 1$ при любом $a \neq 0$;

Да Нет

ж) если $a = 3$, то $y(3) = \dfrac{3}{3 - 2e^3}$;

Да Нет

з) при любом a уравнение $y(x) = 1$ имеет не более одного решения.

Да Нет

4. Дана функция $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2$ и множество $M = \{(x, y)\colon y^2 + x^3 = 2\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

в) число локальных максимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да Нет

г) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да Нет

д) точка $(0, \sqrt{2})$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $(\sqrt[3]{2}, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(1, -1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. A. **2.** A. **3.** B. **4.** D. **5.** D. **6.** E. **7.** D. **8.** E. **9.** C. **10.** D. **11.** C. **12.** C. **13.** E. **14.** C. **15.** B. **16.** B. **17.** C. **18.** C. **19.** A. **20.** B. **21.** E. **22.** D. **23.** A. **24.** B. **25.** E. **26.** B. **27.** C. **28.** A. **29.** E. **30.** B. **31.** D. **32.** D.

2.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Заметим, что матрицы P и Q можно представить в виде матричных произведений следующим образом:

$$P = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^T, \quad Q = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} A^T,$$

где 0 и I обозначают нулевую и единичную матрицы порядка n соответственно. Отсюда немедленно следует, что P и Q симметричные, и что

$$P^2 = \left(A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^T \right)^2 = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 A^T = A \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^T = P$$

($A^T A = I$ в силу ортогональности матрицы A), т. е. P задает ортопроектор (ответ на вопрос а) да).

Матрица Q вырожденная, поэтому ортогональной не является (ответ на вопрос б) нет).

Рассмотрим матрицу $P - Q$. Так как она симметричная, то

$$(P-Q)^T(P-Q) = (P-Q)^2 = \left(A\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)A^T\right)^2 =$$

$$= A\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)^2 A^T = A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}A^T = I,$$

т. е. ответ на вопрос в) да.

Сумма матриц $P + Q$ равна

$$P + Q = A\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right)A^T = A\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}A^T = I,$$

т. е. ответ на вопрос г) да.

Далее, $QP = (I - P)P = P - P^2 = P - P = 0$, т. е. ответ на вопрос д) нет.

Так как $A^TA = I$, то $A^TPA = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и ответ на вопрос е) да. В то же время

$$AQA^T = A^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}(A^2)^T,$$

что может и не быть диагональной матрицей. В качестве примера можно рассмотреть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

для которой

$$AQA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответственно, ответ на вопрос ж) нет. И наконец, так как $P + Q = I$, то $APA^T + AQA^T = A(P+Q)A^T = AIA^T = I$, то ответ на вопрос з) да.

Задача 2. Очевидно, что $0 \in M$ и $f(0) = 0$. Пусть $x \neq 0$. Известно, что

$$1 - \cos\frac{x}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Из интегрального признака Коши следует, что если $2x^2 - x^4 < 1$, то ряд сходится, если $2x^2 - x^4 \geqslant 1$, то ряд расходится. Элементарный анализ показывает, что $2x^2 - x^4 < 1$ при $x^2 \neq 1$ и $2x^2 - x^4 \geqslant 1$ при $x^2 = 1$. Следовательно, $M = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, Поэтому ответы на вопросы а) нет, б) да, в) нет.

При любом $x \in M$ каждое слагаемое ряда — неотрицательное число. Если $x \neq 0$, найдётся такое n, что $0 < |x|/n < 2\pi$, и, значит, среди членов ряда будет положительное слагаемое. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение $x = 0$. Ответ на вопрос г) нет. Каждое слагаемое ряда является чётной функцией, следовательно, $f(x)$ — чётная функция. Ответ на вопрос д) да. В силу а) $(-3,-2) \subset M$. Функция $g(x) = 2x^2 - x^4$ на интервале $(-3,-2)$ возрастает, поэтому $n^{2x^2-x^4} < n^{-8}$ при $x \in (-3,-2)$. Значит,

$$\left| n^{2x^2-x^4} \left(1 - \cos\frac{x}{n}\right)\right| < \frac{2}{n^8} \text{ при } x \in (-3,-2),$$

и по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на интервале $(-3,-2)$. Ответ на вопрос е) да.

На интервале $(0,1)$ функция $g(x) = 2x^2 - x^4$ является возрастающей, а функция $\cos(x/n)$ является убывающей при любом n. Значит, каждое слагаемое ряда является возрастающей функцией на $(0,1)$, поэтому существует конечный или равный $+\infty$ предел $A = \lim\limits_{x\to 1-} f(x)$. Пусть $f_N(x) = \sum_{n=1}^N n^{2x^2-x^4}(1 - \cos(x/n))$. Так как слагаемые ряда неотрицательны, то $f_N(x) \leqslant f(x)$. Переходя к пределу при $x \to 1-$, получаем: $\sum_{n=1}^N n(1-\cos(1/n)) \leqslant A$. Поскольку $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2} = 1/2$, то при n, больших некоторого N_0 выполняется неравенство $1 - \cos(1/n) \geqslant 1/(4n^2)$, и

$$\sum_{n=1}^{N} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \geqslant \sum_{n=1}^{N_0} n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=N_0+1}^{N}\frac{1}{n}.$$

Поскольку гармонический ряд расходится, то отсюда следует, что конечного предела $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$ не существует, т.е. в окрестности $x = 1$ функция $f(x)$ является неограниченной. Как следствие, сходимость на интервале $(0,1)$ неравномерная. Ответы на вопросы ж) нет, з) нет.

Задача 3. Если $a = 0$, то почти очевидно, что $y(x) = 0$. Если $a = 1$, то решение $y(x) = 1$. Пусть $a \neq 0$, $a \neq 1$. Тогда в окрестности точки $x = 0$ выполнены неравенства $y(x) \neq 0$, $y(x) \neq 1$ в силу непрерывности решения $y(x)$, и можно «разделить переменные». Имеем:

$$\frac{dy}{y^2 - y} = dx, \quad \frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y} = dx, \quad \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + C, \quad \left|\frac{y-1}{y}\right| = e^{x+C}.$$

Если $a > 1$, то $\dfrac{a-1}{a} = e^C$, $\left|\dfrac{y-1}{y}\right| = \dfrac{y-1}{y}$ и $y(x) = \dfrac{a}{a-(a-1)e^x}$. Область определения этой функции — полубесконечный интервал $\left(-\infty, \ln\dfrac{a}{a-1}\right)$.

Если $0 < a < 1$, то $\dfrac{1-a}{a} = e^C$, $\left|\dfrac{y-1}{y}\right| = \dfrac{1-y}{y}$ и вновь $y(x) = \dfrac{a}{a-(a-1)e^x}$. Область определения этой функции — вся числовая прямая.

Аналогично при $a < 0$ получаем такое же выражение: $y(x) = \dfrac{a}{a-(a-1)e^x}$. Область определения этой функции — полубесконечный интервал $\left(\ln\dfrac{a}{a-1}, +\infty\right)$.

Поэтому ответ на вопрос а) да. Ответ на вопрос б) нет, так как при $a = 0$ решение — это константа. Ответ на вопрос в) нет, а на вопрос д) да, так как при $0 < a < 1$ решение задано на всей числовой прямой. Ответ на вопрос г) нет, так как константа является периодической функцией. Ответ на вопрос е) нет, так как при $a < 0$ решение не определено в окрестности $-\infty$.

При $a = 3$ решение $y(x)$ не определено при $x \geqslant \ln(3/2)$, а поскольку $\ln(3/2) < 3$, то ответ на вопрос ж) нет.

При $a = 1$ уравнение $y(x) = 1$ имеет бесконечно много решений. Поэтому ответ на вопрос з) нет.

Задача 4. Заметим, что выразив $y^2 = 2 - x^3$ из соотношения, задающего множество M, и подставив его в функцию $f(x, y)$ мы получим функцию $g(x) = 3x^2 + 2(2 - x^3) = 4 + x^2 - 2x^3$, которую можно исследовать как функцию одной переменной. Так как $y^2 \geqslant 0$, то исследовать функцию $g(x)$ следует на множестве, где $2 - x^3 \geqslant 0$ или на полуинтервале $\left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right]$. Как видим, при $x \to -\infty$ функция $g(x) \to +\infty$, поэтому у функции $g(x)$ на $\left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right]$ (а значит и у $f(x, y)$ на множестве M) не достигается наибольшее значение, но достигается наименьшее значение (ответы на вопросы а) нет, б) да).

Рассмотрим условие первого порядка $g'(x) = 6x - 6x^2 = 0$, откуда получим два значения $x = 0$ и $x = 1$. Вторая производная $g''(x) = 6 - 12x$ в точке $x = 0$ положительная (локальный минимум), а в точке $x = 1$ отрицательная (локальный максимум). Значению $x = 0$ соответствуют две точки $x = 0, y = \pm\sqrt{2}$, они обе являются точками локального минимума (ответ на вопрос д) да), значению $x = 1$ также соответствуют две точки $x = 1, y = \pm 1$, они обе являются точками локального максимума (ответ на вопрос ж) нет, на вопрос з) да). Теперь исследуем поведение функции $g(x)$ на границе полуинтервала $\left(-\infty, \sqrt[3]{2}\right]$. Производная $g'\left(\sqrt[3]{2}\right) = 6\sqrt[3]{2}\left(1 - \sqrt[3]{2}\right) < 0$, а значит точка $x = \sqrt[3]{2}$ является точкой локального минимума (ответ на вопрос е) нет). Этой точке соответствует единственная точка $x = \sqrt[3]{2}, y = 0$. Таким образом, число локальных максимумов $f(x, y)$ на M равно два (ответ на вопрос в) нет), число локальных минимумов $f(x, y)$ на M равно три (ответ на вопрос г) да).

3 Вступительный экзамен 2019 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Число $\arcsin(\sin 10)$ равно

A $10-2\pi$

B $3\pi-10$

C $10-4\pi$

D $4\pi-10$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

2. Кривая на плоскости $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ определяется уравнением $x^2y + 2x - y^2 = 0$. Тогда

A касательная к этой кривой горизонтальна в точке $(x, y) = (-1, 1)$

B касательная к этой кривой горизонтальна в точке $(x, y) = (1, -1)$

C касательная к этой кривой вертикальна в точке $(x, y) = (1, -1)$

D касательная к этой кривой вертикальна в точке $(x, y) = (-1, 1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ отображают отрезок $[0, 1]$ в себя, причем функция $f(g(x))$ непрерывна на $[0, 1]$. Тогда

A функция $g(f(x))$ непрерывна на $[0, 1]$

B если функция $f(g(x))$ строго возрастает, то и функция $g(f(x))$ строго возрастает

C если функция $g(x)$ непрерывна в каждой точке $[0, 1]$, то и функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$

D функция $g(f(x))$ достигает наибольшего и наименьшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)} - x\right)$ равен

A $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$

B $\dfrac{a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1}{3}$

C 0

D 3

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, либо не существует

5. Функция $z(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ на множестве $\{(x, y) \colon x - y = \pi/4\}$

A достигает наибольшего значения, равного $1 + 1/\sqrt{2}$

B достигает наименьшего значения, равного $1 - \sqrt{3}/2$

C не достигает наибольшего значения

D не достигает наименьшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Функция $y(x)$ задана как неявная функция равенством $y^2 + 2xy - x^2 = 2y$ в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда

A если $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то точка $x = 0$ является точкой локального минимума функции $y(x)$

B если $(x_0, y_0) = (1, 1)$, то точка $x = 1$ является точкой локального максимума функции $y(x)$

C если $(x_0, y_0) = (0, 0)$, то точка $x = 0$ не является точкой локального экстремума функции $y(x)$

D если $(x_0, y_0) = (1, 1)$, то точка $x = 1$ не является точкой локального экстремума функции $y(x)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y - e^x$$

с начальным условием $y(0) = 1$. Тогда $y(1)$ равно

A 0

B 1

C e

D $-1/e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

8. Пусть

$$f(x) = \int_{-x}^{x} e^{-(x^2+t^2)/2} dt$$

и $f'(x)$ — производная функции $f(x)$. Тогда значение производной $f'(0)$ равно

A 0

B -1

C 1

D 2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

9. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \ln\left(x + e^x\right) - x^2\right)$ равен

A 0

B $1/e$

C $1/2$

D $\ln 2$

E числу, отличному от A, B, C, D, или не существует

10. Выберите истинное утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A любое множество имеет точную верхнюю грань, причем единственную

B пересечение конечного количества множеств, каждое из которых является либо открытым, либо замкнутым, также является либо открытым, либо замкнутым

C объединение конечного количества множеств, каждое из которых является либо открытым, либо замкнутым, также является либо открытым, либо замкнутым

D объединение непустых непересекающихся множеств не может быть компактным

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть $f_n(x) = (x+2)\operatorname{arctg}(x^n)$. Обозначим через M множество тех x, для которых последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится, и для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A множество M открыто

B функция $f(x)$ является строго возрастающей

C уравнение $f(x) = c$ не имеет решений при $0 < c < 3$

D график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Последовательность вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots$ такова, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $x_{n+1} \neq x_n$ и

$$\frac{|x_{n+2} - x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Найдите *ложное* утверждение:

A последовательность $\{x_n\}$ сходится

B ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится

C последовательность $\{|x_{n+1} - x_n|\}$ сходится

D ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|$ сходится

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

13. Задана функция $f(x, y) = x - y$ и множество $M = \{(x, y)\colon 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1\}$. Выберите *ложное* утверждение

A $\quad$ функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наибольшего и наименьшего значения

B $\quad$ наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно $-1/\sqrt{7}$

C $\quad$ точка $(x, y) = \big(1/\sqrt{7}, -1/\sqrt{7}\big)$ является точкой глобального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D $\quad$ точка $(x, y) = (1, 1)$ не является точкой глобального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E $\quad$ среди утверждений A, B, C, D есть ложное

14. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y^3$, $y(0) = 1$. Тогда значение $y(3/8)$ равно

A $\quad$ $1/2$

B $\quad$ $1/4$

C $\quad$ $\operatorname{arctg}\sqrt{\pi}$

D $\quad$ 2

E $\quad$ другому числу или не существует

15. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2+1}$, $y(1) = -1$ на своей области определения

A $\quad$ не имеет нулей

B $\quad$ имеет ровно один ноль

C $\quad$ имеет ровно два нуля

D $\quad$ имеет ровно три нуля

E $\quad$ имеет более трех нулей

16. Пусть $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$, $\{y_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательности с положительными членами, первая последовательность сходится, вторая — расходится. Тогда

A $\quad$ последовательность $\{x_{n+1}/x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится

B $\quad$ последовательность $\{\sqrt[n]{x_n}, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится

C $\quad$ последовательность $\{x_n \cdot y_n, n = 1, 2, \ldots\}$ расходится

D $\quad$ последовательность $\{y_n^{x_n}, n = 1, 2, \ldots\}$ расходится

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Пусть A и B — подмножества числовой прямой $\mathbf{R}$, множество A открыто, множество B замкнуто. Тогда

A множество $A \cap B$ не является открытым

B множество $A \cup B$ замкнуто

C множество $A \setminus B$ открыто

D множество $B \setminus A$ не является замкнутым

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть M — подмножество числовой прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если множество M ограничено и каждая его точка является граничной, то оно содержит изолированные точки

B если множество M ограничено и каждая его точка является предельной, то оно замкнуто

C если множество M не ограничено и имеет предельные точки, то оно замкнуто

D если множество M бесконечно, ограничено и не имеет предельных точек, то оно открыто

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Задана функция $f(x,y) = e^{x+y}$ и множество $M = \{(x,y)\colon x + y^2 = 0\}$. Тогда

A функция $f(x,y)$ не ограничена на множестве M

B функция $f(x,y)$ достигает на множестве M наименьшего значения

C для любой точки $(x,y) \in M$ выполнено неравенство $f(x,y) \leqslant 7/5$

D точка $(0,0)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Наименьшее значение функции $f(x,y) = x^2 + y^2 + 6xy - 14x - 10y + 10$ равно

A -6

B -17

C -20

D -23

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

21. Задан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n.$$

Пусть M — множество точек на числовой прямой, в которых ряд сходится. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

A множество M ограничено

B множество M открыто

C $S(x) > 0$ для любого $x \in M$

D на отрезке $[0, 1]$ ряд сходится равномерно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Задана функция

$$f(x) = \int_{x+1}^{x^2} e^{-t^2} dt, \ x \in \mathbf{R}.$$

Тогда

A функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наибольшего значения

B функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наименьшего значения

C $f(x) > 0$ при любом $x \in \mathbf{R}$

D при любом c уравнение $f(x) = c$ имеет не более одного решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{1}{x_n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A если $x_1 < 1/2$, то последовательность $\{x_n\}$ расходится

B если $x_1 > 10$, то последовательность $\{x_n\}$ возрастающая

C существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n\}$ неограниченная

D существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n\}$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Пусть $x_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен

A 0

B $1/e$

C $1/e^2$

D $1/e^4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — системы векторов из $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 2$, $m, n \geqslant 1$. Известно, что система X линейно зависимая. Тогда

A если каждый вектор системы X линейно выражается через векторы системы Y и $n \leqslant m$, то система Y линейно зависимая

B если каждый вектор системы X линейно выражается через векторы системы Y и $n \geqslant m$, то система Y линейно зависимая

C если каждый вектор системы Y линейно выражается через векторы системы X и $n \leqslant m$, то система Y линейно зависимая

D если каждый вектор системы Y линейно выражается через векторы системы X и $n \geqslant m$, то система Y линейно зависимая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Квадратная матрица A порядка $n \geqslant 3$ трактуется как линейный оператор в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если A задает оператор проектирования, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

B если A диагонализируемая, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

C если A не диагонализируемая, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

D если A ортогональная, то у A бесконечно много инвариантных подпространств

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α — вещественный параметр. Тогда

A если A положительно определена, то A отрицательно определена

B если A отрицательно определена, то A положительно определена

C если $\alpha > 0$, то A положительно определена

D если $\alpha < 0$, то A отрицательно определена

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Заданы матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$ и столбец $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где α — вещественный параметр. Найдите *ложное* утверждение

A при всех α система $Ax = b$ имеет решение

B существует α, при котором система $Ax = b$ имеет единственное решение

C существует α, при котором множество решений системы $Ax = b$ одномерное

D существует α, при котором множество решений системы $Ax = b$ двумерное

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

29. Пусть L_1 и L_2 — подпространства в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, такие что $L_1 \subset L_2$. Матрицы P и Q задают операторы ортогонального проектирования на L_1 и L_2 соответственно. Найдите *ложное* утверждение

A QP задает оператор ортогонального проектирования

B PQ задает оператор ортогонального проектирования

C $Q - P$ задает оператор ортогонального проектирования

D $P - Q$ задает оператор ортогонального проектирования

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

30. Неопределенный интеграл $\int \cos^3 x \, dx$ равен

A $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$

B $\frac{1}{4}\sin^4 x$

C $\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

D $\frac{1}{4}\cos^4 x$

E $\dfrac{\cos^4 x}{4 \sin x}$

31. Неопределенный интеграл $\int x \sin x \, dx$ равен

A $\frac{1}{2}x^2 \sin x + C$

B $-x\cos x + C$

C $\quad \frac{1}{2}x^2 \cos x + C$

D $\quad (1 - x) \cos x + C$

E $\quad \sin x - x \cos x + C$

32. Определенный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$ равен

A $\quad \ln \frac{e}{1 + e}$

B $\quad \ln \frac{2e}{1 + e}$

C $\quad \ln \frac{2e}{e - 1}$

D $\quad \ln \frac{1 + e}{e}$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

3.1.2 Вторая часть теста

1. Задана функция $f(x, y) = 6x^2 + 12xy + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наибольшего и наименьшего значений;

Да Нет

б) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

в) число локальных минимумов функции $f(x, y)$ на множестве M чётное;

Да Нет

г) точка $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

д) в точке $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) существует такая точка $(x_1, y_1) \in M$, что $f(x_1, y_1) = 6$;

Да Нет

з) существует такая точка $(x_2, y_2) \in M$, что $f(x_2, y_2) = 2$.

Да Нет

2. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $\operatorname{Ker} A^{n-1} \neq \operatorname{Ker} A^n$, где через $\operatorname{Ker} X$ обозначается ядро матрицы X. Через $\operatorname{Im} X$ обозначим образ матрицы X. Тогда

а) матрица A невырожденная;

Да Нет

б) матрица A нильпотентная, т. е. $A^m = 0$ для некоторого m;

Да Нет

в) ранг матрицы A не больше чем $n - 2$;

Да Нет

г) ранг матрицы A не меньше чем $n - 1$;

Да Нет

д) $\operatorname{Ker} A^{m-1} \neq \operatorname{Ker} A^m$ при всех $1 < m \leqslant n$;

Да Нет

е) сумма $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A = \mathbf{R}^n$;

Да Нет

ж) если $A^{n-1}x \neq 0$, то векторы x, Ax, A^2x, ..., $A^{n-1}x$ образуют базис в $\mathbf{R}^n$;

Да Нет

з) матрица A имеет бесконечно много инвариантных подпространств.

Да Нет

3. Пусть

$$f_n(x) = \frac{\sin(n(x+n))}{n(1+x)^2}.$$

Обозначим через M множество точек $x \in \mathbf{R}$, для которых последовательность $f_n(x)$ сходится, и пусть

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \; x \in M.$$

Пусть $g_n(x) = f'_n(x)$. Тогда:

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) множество M открыто;

Да Нет

в) для любого n существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$;

Да Нет

г) существует точка $x \in M$, в которой функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода;

Да Нет

д) существует точка $x \in M$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема;

Да Нет

е) последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на M;

Да Нет

ж) последовательность $g_n(x)$ сходится в каждой точке $x \in M$;

Да Нет

з) для любого n существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

Да Нет

4. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left(y - e^{-e^{-x}}\right)$$

с начальным условием $y(0) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $y(x)$, $\bar{y} = \sup\limits_{x\in M} y(x)$. Тогда

а) множество M ограничено;

Да Нет

б) функция $y(x)$ ограничена на M;

Да Нет

в) функция $y(x)$ немонотонна на M;

Да Нет

г) функция $y(x)$ равномерно непрерывна на M;

Да Нет

д) $\bar{y} = 1/e$ при $a = 1/e$;

Да Нет

е) $\bar{y} = e$ при $a = 3/e$;

Да Нет

ж) график функции $y(x)$ имеет не менее одной точки перегиба;

Да Нет

з) если $\bar{x}$ — точка локального максимума функции $y(x)$, то в точке $\bar{x}$ достигается наибольшее значение функции $y(x)$ при $x \in M$.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** B. **3.** E. **4.** A. **5.** A. **6.** E. **7.** A. **8.** D. **9.** A. **10.** E. **11.** D. **12.** B. **13.** B. **14.** D. **15.** A. **16.** E. **17.** C. **18.** D. **19.** C. **20.** E. **21.** D. **22.** B. **23.** D. **24.** A. **25.** D. **26.** A. **27.** B. **28.** B. **29.** D. **30.** A. **31.** E. **32.** B.

3.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Множество M является компактным, а функция $f(x, y)$ непрерывна на M, значит, в силу теоремы Вейерштрасса $f(x, y)$ достигает на M наибольшего и наименьшего значений. Каждая точка множества M является регулярной, следовательно, функция Лагранжа имеет следующий вид: $L(x, y, \lambda) = 6x^2 + 12xy + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Запишем условие первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 12x + 12y - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 12x + 2y - 2\lambda y = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} (6-\lambda)x + 6y = 0, \\ 6x + (1-\lambda)y = 0. \end{cases}$$

Получили линейную однородную систему относительно x, y, которая должна иметь ненулевое решение, поскольку функция $f(x, y)$ имеет на M точки максимума и минимума, и $(0, 0) \notin M$. Следовательно, определитель полученной системы равен нулю. Таким образом, $(6-\lambda)(1-\lambda) - 36 = 0$, значит, $\lambda = -3$ или $\lambda = 10$.

Пусть $\lambda = -3$. Тогда из первого уравнения системы следует, что $y = -\dfrac{3}{2}x$ и с учётом ограничения получаем две точки $A_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, -\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $A_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$. Аналогично при $\lambda = 10$ получаем ещё две точки $A_3 = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $A_4 = -\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, -\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$. Заметим, что $f(A_1) = f(A_2) = -\dfrac{39}{13}$, $f(A_3) = f(A_4) = \dfrac{142}{13}$. Поскольку других точек, удовлетворяющих необходимому условию экстремума нет, то A_1, A_2 — это точки наименьшего значения, а точки A_3, A_4 — это точки наибольшего значения функции $f(x, y)$ на множестве M. Других локальных экстремумов нет. Получаем следующие ответы: а) да, б) нет, в) да, г) нет, д) да, е) да, ж) да, з) да

Задача 2. Заметим, что если $\operatorname{Ker} A^{m-1} = \operatorname{Ker} A^m$ для некоторого $m \geqslant 1$, то $\operatorname{Ker} A^m = \operatorname{Ker} A^{m+1} = \ldots$. Действительно, если $\operatorname{Ker} A^{m-1} = \operatorname{Ker} A^m$, то $\operatorname{Im} A^{m-1} = \operatorname{Im} A^m$, и при любом ненулевом $x \in \operatorname{Im} A^{m-1} = \operatorname{Im} A^m$ образ $Ax \neq 0$, значит $\operatorname{Ker} A^{m+1} = \operatorname{Ker} A^m$. Отсюда следует, что $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Ker} A^2 \neq \ldots \neq \operatorname{Ker} A^n$. Так как эта последовательность ядер вложенная, то $0 < \dim \operatorname{Ker} A < \dim \operatorname{Ker} A^2 < \ldots < \dim \operatorname{Ker} A^n \leqslant n$, откуда следует, что $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 2$, ..., $\dim \operatorname{Ker} A^n = n$. Ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да», в) — «нет», г) — «да», д) — «да».

Так как $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Ker} A^2$, то $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A \neq \{0\}$, и поэтому $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A \neq \mathbf{R}^n$, ответ на вопрос е) — «нет».

Для того, чтобы убедиться, что векторы x, Ax, A^2x, ..., $A^{n-1}x$ образуют базис в $\mathbf{R}^n$, достаточно доказать, что они линейно независимые. Пусть линейная комбинация

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Ax + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1}x = 0.$$

Тогда $A^{n-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 Ax + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1}x) = \alpha_0 A^{n-1}x = 0$, откуда следует, что $\alpha_0 = 0$. Аналогично получаем, что α_1, ..., α_{n-1} все равны нулю. Ответ на вопрос ж) — «да».

Найдем теперь инвариантные подпространства матрицы A. Зафиксируем вектор x, для которого $A^{n-1}x \neq 0$. Пусть L — инвариантное подпространство. Каждый вектор из L можно разложить по базису x, Ax, A^2x, ..., $A^{n-1}x$. Обозначим через m наименьшее значение i, для которого в L существует вектор z, в разложении которого вектор $A^i x$ входит с ненулевым коэффициентом. Пусть $z = \alpha_m A^m x + \ldots + \alpha_{n-1}A^{n-1}x$, где $\alpha_m \neq 0$. Так как L инвариантно относительно A, то Az, A^2z, ..., $A^{n-m-1}z \in L$ (и все ненулевые). Легко видеть, что эти векторы линейно независимые и образуют базис в $L_m = \langle A^m x, \ldots, A^{n-1}x\rangle$, следовательно $L = L_m$, то есть любое инвариантное подпространство для A есть одно из L_m, и их число равно $n+1$. Ответ на вопрос з) — «нет».

Задача 3. Функции $f_n(x)$ определены всюду на $\mathbf{R}$, кроме точки $x = -1$. При фиксированном x, если $x \neq -1$, числитель дроби — ограниченная функция, а знаменатель неограниченно растет с ростом n. Соответственно при любом $x \neq -1$ существует предел $f(x) \equiv \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ и множество $M = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Ответ на вопрос а) «нет», ответ на вопрос б) «да».

Поскольку для любого $n = 1, 2, \ldots$ функции $f_n(x)$ являются частным, в котором числитель — ограниченная функция, а знаменатель стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$ то предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ существует и равен нулю. Соответственно на вопрос в) ответ «да».

Функция $f(x) \equiv 0$ на множестве M. Поэтому в любой точке множества M она дифференцируема (и не имеет разрыва). Ответы на вопросы г) — «нет» и д) — «да».

Поскольку на множестве M функции $f_n(x)$ не ограничены (в окрестности точки $x = -1$), а предельная функция $f(x)$ ограничена, то равномерной сходимости последовательности функций $f_n(x)$ на множестве M нет. Соответственно на вопрос е) ответ «нет».

Найдем явный вид функций $g_n(x)$, для чего продифференцируем $f_n(x)$:

$$g_n(x) = f_n'(x) = -\frac{2\sin(n(x+n))}{n(1+x)^3} + \frac{\cos(n(x+n))}{(1+x)^2}.$$

Числитель обоих слагаемых ограничен. При $x \to +\infty$ знаменатель обоих слагаемых стремится к $+\infty$. Поэтому ответ на вопрос з) — «да».

Первое слагаемое представляет собой дробь, в которой знаменатель неограниченно растет с увеличением n. Поэтому первое слагаемое при $n \to \infty$ стремится к нулю.

Во втором слагаемом зависимость от n имеется только под знаком косинуса, аргумент которого по модулю неограниченно возрастает с ростом n, и при этом всевозможные разности значений аргумента для разных пар номеров n_1, n_2 (за исключением, возможно, некоторых отдельно взятых пар номеров) не кратны числу 2π – периоду косинуса (т.е. не могут быть представлены в виде $2\pi k$, где k – какое-то целое число). Это означает, что второе слагаемое не имеет предела при $n \to \infty$.

Теперь дадим строгое доказательство этого факта.

Предположим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n(x+n))$ существует при любом $x \in M$. Запишем следующее тригонометрическое тождество:

$$2\cos(n(1/2+n))\cos(n(-1/2+n)) = \cos(2n^2) + \cos(n) = 2\cos^2(n^2) - 1 + \cos(n),$$

из которого получим:

$$\cos(n) = 2\cos(n(1/2+n))\cos(n(-1/2+n)) + 1 - 2\cos^2(n(0+n)).$$

По предположению правая часть этого равенства имеет предел при $n \to \infty$ (рассматриваются $x = 0, \pm 1/2$). Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos(n) - \cos(n+2)) = 0$. Запишем эту разность как

$$\cos(n) - \cos(n+2) = 2\sin(n+1)\sin(1),$$

и так как $\sin(1) \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0$. Далее,

$$\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1),$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n) = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2(n) + \cos^2(n) = 1$. Следовательно, по крайней мере при одном из $x = 0$, $x = 1/2$, $x = -1/2$ искомого предела не существует. Ответ на вопрос ж) — «нет».

Задача 4. Данное уравнение является линейным, поэтому решение данной задачи Коши можно найти методом вариации постоянной. Общее решение однородного уравнения

$$y(x) = Ce^{-e^{-x}}, \quad C \in \mathbf{R},$$

откуда получаем решение задачи Коши

$$y(x) = (e^{-x} + ae - 1)e^{-e^{-x}},$$

определенное на всей вещественной прямой (ответ на вопрос а) — «нет»). При этом функция $e^{-e^{-x}}$ ограничена, так как ее значения лежат в интервале $(0, 1)$, и функция $e^{-x}e^{-e^{-x}} = e^{-x-e^{-x}}$ тоже ограничена, так как показатель степени ограничен сверху (достигает наибольшего значения в точке $x = 0$). Ответ на вопрос б) — «да».

Производная решения задачи Коши равна

$$y'(x) = (e^{-x} + ae - 2)e^{-e^{-x}}e^{-x}.$$

Заметим, что так как $e^{-x} > 0$, то при $a \geqslant 2/e$ производная всегда положительная (ответ на вопрос в) — «нет»). Также легко видеть, что производная ограничена на $\mathbf{R}$ (ответ на вопрос г) — «да»).

Функция $y(x)$ ни при каком $a \in \mathbf{R}$ не является постоянной, а любая непостоянная ограниченная на $\mathbf{R}$ функция имеет хотя бы одну точку перегиба (ответ на вопрос ж) — «да»).

Знак производной $y'(x)$ определяется знаком множителя $e^{-x} + ae - 2$. И так как e^{-x} убывает на $\mathbf{R}$, то если $y'(\bar{x}) = 0$, то $y'(x) > 0$ при $x < \bar{x}$ и $y'(x) < 0$ при $x > \bar{x}$ (ответ на вопрос з) — «да»).

При $a = 1/e$ производная $y'(x) = (e^{-x} - 1)e^{-e^{-x}}e^{-x}$, соответственно, $y(x)$ достигает наибольшего значения при $x = 0$. При этом $y(0) = (e^{-0} + 1 - 1)e^{-e^{-0}}e^{-0} = 1/e$ (ответ на вопрос д) — «да»).

При $a = 3/e$ производная $y'(x) = (e^{-x} + 1)e^{-e^{-x}}e^{-x} > 0$, соответственно, $y(x)$ монотонно возрастает на $\mathbf{R}$. При этом $\bar{y} = \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x} + 2)e^{-e^{-x}} = 2$ (ответ на вопрос е) — «нет»).

4 Вступительный экзамен 2020 г.

Экзамен по математике проводился в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляла 3 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста были следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ определены и непрерывны на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Тогда

A уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ не может иметь ровно два решения

B если $f(0, 0) > g(0, 0)$, а $f(1, 1) < g(1, 1)$, то уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ имеет бесконечно много решений

C если уравнение $f^2(x, y) = g^2(x, y)$ имеет решения, то и уравнение $f(x, y) = g(x, y)$ имеет решения

D если каждое из уравнений $f(x,y)=g(x,y)$ и $f(x,y)=-g(x,y)$ имеют нечетное количество решений, то уравнение $f^4(x,y)=g^4(x,y)$ имеет четное количество решений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть $f(x,y)=x^2+y^2$ и $M=\{(x,y)\colon 2|x|+|y|=1\}$. Найдите *ложное* утверждение.

A каждый локальный минимум функции $f(x,y)$ на множестве M является точкой наименьшего значения функции $f(x,y)$ на множестве M

B каждый локальный максимум функции $f(x,y)$ на множестве M является точкой наибольшего значения функции $f(x,y)$ на множестве M

C число локальных максимумов функции $f(x,y)$ на множестве M не меньше трёх

D число локальных минимумов функции $f(x,y)$ на множестве M больше двух

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

3. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$ равен

A $e^{-\pi}$

B $e^{-2/\pi}$

C $e^{-\pi/2}$

D e^2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

4. Предел $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos^2 x)^{1/(x-\sin x)}$ равен

A $1/e^3$

B $1/e^6$

C 0

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

5. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & -4 & -7\\ -2 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Тогда

A у матрицы A ровно два разных собственных числа

B число 0 — единственное собственное число матрицы A

C число 2 — единственное собственное число матрицы A

D число 3 — единственное собственное число матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Дана числовая последовательность $a_n = 1/(2n + n^2)$. Предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{1} (\ln x)^2 \, dx$$

равен

A 0

B 1

C 2

D 3

E другому числу или не существует

7. Функция $y(x)$ задана как неявная функция в окрестности точки $(x, y) = (1, 1)$ при помощи уравнения $x^3 + y^2 - 3x + 3y - 2 = 0$. Тогда

A функция $y(x)$ при $x = 1$ строго возрастает

B функция $y(x)$ при $x = 1$ строго убывает

C функция $y(x)$ при $x = 1$ имеет локальный минимум

D функция $y(x)$ при $x = 1$ имеет локальный максимум

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y \cdot \ln y$, $y(0) = e$. Тогда $y(x)$

A не определена при $x = 1$

B определена при $x = 1$, но не определена при $x = e$

C определена при $x = e$, но не определена при $x = e^2$

D определена при $x = e^2$, но не определена при $x = e^{e^2}$

E определена при $x = e^{e^2}$

9. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x^2-4}$, $y(0) = 1$ на своей области определения

A не имеет нулей

B имеет ровно один ноль

C имеет ровно два нуля

D имеет ровно четыре нуля

E имеет более четырех нулей

10. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на всей числовой прямой, причем $g(x) < 0$ для $x < 0$ и $g(x) > 0$ для $x > 0$. Тогда

A если функция $f(x)$ является нечетной, то функция $h(x) = f(x)/g(x)$ является четной

B если функция $f(x)$ является четной, то функция $h(x) = f(x)/g(x)$ является нечетной

C функцию $h(x) = f(x)/g(x)$ можно так доопределить в точке $x = 0$, что она станет непрерывной на всей числовой прямой

D функцию $h(x) = f(x)/g(x)$ нельзя так доопределить в точке $x = 0$, что она станет непрерывной на всей числовой прямой

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на всей вещественной прямой. Тогда

A если у графика функции $f(x)$ есть горизонтальная асимптота, то производная функции $f(x)$ нигде не равна нулю

B если у графика функции $f(x)$ есть две разные горизонтальные асимптоты, то у графика функции $f(x)$ есть точка перегиба

C если у графика функции $f(x)$ есть наклонная асимптота, то у графика функции $f^2(x)$ нет наклонной асимптоты

D если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения, то и функция $f^2(x)$ достигает наибольшего значения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Функция $f(x, y) = xy$ на множестве $\{(x, y) \colon x^2 + 4y^2 - 2xy = 1\}$

A достигает наибольшего значения ровно в двух точках и достигает наименьшего значения ровно в двух точках

B достигает наибольшего значения ровно в четырех точках, но не достигает наименьшего значения

C достигает наименьшего значения ровно в четырех точках, но не достигает наибольшего значения

D не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$ и $f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда существует точка $x \in \mathbf{R}$ такая, что

A $f'(x) \geqslant 0$

B $f'(x) \leqslant 0$

C $f''(x) \geqslant 0$

D $f''(x) \leqslant 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$, $f'_n(x)$ — производная $f_n(x)$. Тогда

A последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

B последовательность $f'_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

C последовательность $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,dt$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

D ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}dx$ равен

A 2

B $\dfrac{4}{e}$

C $2-\dfrac{2}{e}$

D $2-\dfrac{4}{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

16. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1/n}{n+1/n}\right)^n$ равен

A 1

B $1/e$

C $1/e^2$

D 0

E величине, отличной от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится

B ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится

C ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n^3$ сходится

D ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2}$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Функция $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+2xy$

A имеет два локальных минимума

B имеет два локальных максимума

C имеет один локальный минимум и один локальный максимум

D не имеет локальных экстремумов

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Дана последовательность функций $f_n(x)=n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{x^2-1}{nx}\right)\right)$, $n=1,2,\ldots$. Пусть $M\subset$ $\subset \mathbf{R}$ — множество таких чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для каждого $x\in M$ обозначим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A множество M замкнуто

B функция $f(x)$ нечетная

C уравнение $f(x)=-1$ имеет единственное решение

D функция $f(x)$ имеет две точки локального минимума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на $[0, +\infty)$, а также дифференцируема на $(0, +\infty)$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограниченная, то множество ее значений замкнутое

B если $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ ограниченная

C если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$

D если не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, то график функция $f(x)$ не имеет ни наклонной, ни горизонтальной асимптоты

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Кривая на плоскости xOy задана уравнением $x^3 + 3xy + y^2 = 1$. Через точку $(1, 0)$ проведена касательная к этой кривой. Площадь треугольника, образованного отрезками, отсекаемыми касательной на осях координат, и отрезком касательной, заключенным между осями координат, равна

A 1

B 1/2

C 2

D 3/2

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

22. Пусть $M \subset \mathbf{R}$. Обозначим через $\partial(M)$ множество граничных точек множества M, через $l(M)$ — множество его предельных точек. Тогда

A если $l(M) \subset \partial(M)$, то множество M замкнутое

B если $\partial(M) \subset l(M)$, то множество M не является открытым

C если $\partial(M) = M$, то множество M конечно

D $M \cup \partial(M) = M \cup l(M)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x^2 + x - 1)^n}{n}$. Обозначим через M множество тех x, для которых ряд сходится (множество сходимости). Тогда

A множество M замкнуто

B множество M открыто

C	если $a \in M$, $b \in M$, $a < b$, то $[a, b] \subset M$

D	$[1/2, 3/4] \in M$, и на этом отрезке ряд сходится равномерно

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Интеграл $\int_1^5 \frac{dx}{x^2 - 13x + 30}$ равен

A	$\ln 45/7$

B	$(\ln 45 - 2\ln 2)/7$

C	0

D	$\ln 180/7$

E	числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

25. Уравнение $\ln x = cx^2$ ($c > 0$ – параметр) имеет единственный корень. Тогда параметр c равен:

A	e

B	$e/2$

C	$1/e$

D	$\frac{1}{2e}$

E	другому числу либо такого значения параметра не существует

26. Пусть $f(x)$ дифференцируема на всей вещественной прямой и строго возрастает. Тогда предел

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^{1/3} - 2^{1/3}}$$

равен

A	$3 \cdot 2^{2/3} f'(2)$

B	$\frac{2^{3/2}}{3} f'(2)$

C	$2 \cdot 3^{2/3} f'(2)$

D	$\frac{3^{3/2}}{2} f'(2)$

E	другому числу или не существует

27. Функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси и удовлетворяет условиям:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y + 1), \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Тогда величина $f'(2)$ равна

A 3

B 5

C 7

D 9

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

28. Интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$ равен

A 0

B $\dfrac{\ln 2}{2}$

C $\ln 2$

D $2\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

29. Предел $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\int_0^1 (1+x)^t\, dx\right)^{1/t}$ равен

A e

B $2/e$

C $3e$

D $4/e$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

30. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — система векторов в $\mathbf{R}^n$, где $m, n \geqslant 2$. Обозначим через $\langle X\rangle$ линейную оболочку системы X и через $\dim\langle X\rangle$ — её размерность. Тогда

A если для любого $y \in \mathbf{R}^n$ система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно зависима, то $m = n$

B если для любого $y \in \mathbf{R}^n$ система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно зависима, то $\dim\langle X\rangle = m$

C если $\dim\langle X\rangle = n$, то для любого $y \in \mathbf{R}^n$ система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно зависима

D если существует $y \in \mathbf{R}^n$, для которого система $\{x_1, \ldots, x_m, y\}$ линейно независимая, то $m \geqslant n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть L_1, L_2, L_3 — подпространства в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$, размерностей n_1, n_2, n_3 соответственно. Тогда

A если $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$ и $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{0\}$, то $n_1 + n_2 + n_3 = n$

B если $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$, то $n_1 + n_2 + n_3 > n$

C если $n_1 + n_2 + n_3 \geqslant n$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

D если $n_1 + n_2 = n$ и $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, трактуемые как линейные операторы в $\mathbf{R}^n$. Известно, что $\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B = \mathbf{R}^n$, где через $\operatorname{Im} X$ обозначается образ матрицы X. Кроме того, обозначим через $\operatorname{Ker} X$ ядро матрицы X. Тогда

A $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$

B $\operatorname{Im}(A + B) = \mathbf{R}^n$

C $\operatorname{Ker}(A + B) \neq \{0\}$

D $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B = \mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4.1.2 Вторая часть теста

1. Функция $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots, & \text{если } 0 < x < \pi, \\ (\pi - x) + \dfrac{(\pi - x)^2}{2!} + \dfrac{(\pi - x)^3}{3!} + \ldots, & \text{если } x \geqslant \pi. \end{cases}$$

Обозначим через M множество, на котором определена функция $f(x)$ (соответствующий ряд сходится). Тогда

а) множество M открыто;

Да Нет

б) множество M замкнуто;

Да Нет

в) функция $f(x)$ ограничена на M;

Да Нет

г) функция $f(x)$ непрерывна на M;

Да Нет

д) функция $f(x)$ дифференцируема на M;

Да Нет

е) функция $f(x)$ имеет единственную точку локального минимума на M;

Да Нет

ж) график функции $f(x)$ имеет две точки перегиба;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

Да Нет

2. Даны функции $f(x, y) = y^2 - x^3$, $g(x, y) = y^2 + x^3$ и множество $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = (x + 5)(x^2 + 2x + 4)\}$. Тогда

а) множество M ограничено;

Да Нет

б) множество M замкнуто;

Да Нет

в) если функция $f(x, y)$ принимает на множестве M значения f_0 и f_1, то она принимает и все значения из интервала (f_0, f_1);

Да Нет

г) наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 13;

Да Нет

д) наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 125;

Да Нет

е) число точек локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M нечетное;

Да Нет

ж) функция $g(x, y)$ на множестве M не достигает наименьшего значения;

Да Нет

з) наименьшее значение функции $g(x, y)$ на множестве M достигается в единственной точке.

Да Нет

3. Пусть $y(x)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши для дифференциального уравнения
$$\frac{dy}{dx} = 2x(x^2 + y)$$
с начальным условием $y(0) = a$, где $a \in \mathbf{R}$ — параметр. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ — область определения функции $y(x)$. Пусть $f(a) = \inf\limits_{x \in M} y(x)$ и A — область определения функции $f(a)$. Тогда

а) $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

б) функция $y(x)$ чётная;

Да Нет

в) функция $y(x)$ имеет не более одного локального минимума;

Да Нет

г) функция $ay(x)$ имеет локальный минимум в точке $x = 0$;

Да Нет

д) существует $a \in \mathbf{R}$, при котором график функции $y(x)$ имеет ровно одну точку перегиба;

Да Нет

е) множество A ограничено снизу;

Да Нет

ж) множество A ограничено сверху;

Да Нет

з) функция $f(a)$ дифференцируема при всех $a \in A$.

Да Нет

4. Пусть A — ортогональная матрица порядка 3. Известно, что плоскость в $\mathbf{R}^3$, заданная уравнением $x_1 = 0$ инвариантна относительно A, и
$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},$$
где $\varphi \in [0, \pi]$ — параметр. Тогда

а) при любом $\varphi \in [0, \pi]$ существует единственная матрица A;

Да Нет

б) при любом $\varphi \in [0, \pi]$ существует ровно две матрицы A;

Да Нет

в) существует $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что при этом φ у любой матрицы A множество инвариантных подпространств конечное;

Да Нет

г) существует $\varphi \in [0, \pi]$ такое, что при этом φ у любой матрицы A множество инвариантных подпространств бесконечное;

Да Нет

д) при $\varphi = 0$ любая матрица A кососимметричная;

Да Нет

е) при $\varphi = \pi$ любая матрица A симметричная;

Да Нет

ж) при любом $\varphi \in (0, \pi)$ любая матрица A не является симметричной;

Да Нет

з) если матрица A не является симметричной, то её определитель $\det A = -1$.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой части

1. B. **2.** B. **3.** B. **4.** E. **5.** E. **6.** C. **7.** D. **8.** E. **9.** A. **10.** E. **11.** B. **12.** A. **13.** C. **14.** E. **15.** D. **16.** A. **17.** B. **18.** A. **19.** D. **20.** C. **21.** B. **22.** D. **23.** D. **24.** E. **25.** D. **26.** A. **27.** C. **28.** A. **29.** D. **30.** C. **31.** D. **32.** E.

4.2.2 Решения задач второй части

Задача 1. Ряд $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots$ представляет ряд Тейлора функции $\ln(1+x)$. Множеством сходимости этого ряда является промежуток $(-1, 1]$, следовательно, $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, 0]$. Ряд $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ представляет ряд Тейлора функции $\sin x$. Множеством сходимости этого ряда является вся числовая прямая, следовательно, $f(x) = \sin x$, $x \in (0, \pi)$. Ряд $(\pi - x) + \dfrac{(\pi - x)^2}{2!} + \dfrac{(\pi - x)^3}{3!} + \ldots$ представляет ряд Тэйлора функции $e^{\pi - x} - 1$. Множеством сходимости этого ряда является вся числовая прямая, следовательно, $f(x) = e^{\pi-x} - 1$, $x \in \in [\pi, +\infty)$. Окончательно получаем:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & \text{если } x \in (-1, 0], \\ \sin x, & \text{если } x \in (0, \pi), \\ e^{\pi-x} - 1, & \text{если } x \in [\pi, +\infty). \end{cases}$$

Ответ на вопрос а) «да», на вопрос б) «нет». Так как $\lim\limits_{x\to-1+} f(x) = -\infty$, то ответ на вопрос в) «нет». На интервалах $(-1, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, +\infty)$ функция $f(x)$ является элементарной, поэтому в каждой точке $x \in M$, такой что $x \neq 0$, $x \neq \pi$ функция $f(x)$ непрерывна. Имеем: $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = = \lim\limits_{x\to0-} \ln(1+x) = 0 = f(0)$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = \lim\limits_{x\to0+} \sin x = 0 = f(0)$, значит $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Аналогично проверяется непрерывность в точке $x = \pi$. В каждой точке $x \in M$, такой что $x \neq 0$, $x \neq \pi$ функция $f(x)$ дифференцируема. Проверим дифференцируемость в точках $x = 0$, $x = \pi$. Имеем: $\lim\limits_{x\to0-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0-} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = = \lim\limits_{x\to0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, Значит, $f'(0)$ существует и $f'(0) = 1$. Далее, $\lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sin x}{x-\pi} = = \lim\limits_{x\to\pi-} \dfrac{\sin(\pi-x)}{x-\pi} = [y = \pi - x] = \lim\limits_{y\to0+} \left(-\dfrac{\sin y}{y}\right) = -1$, $\lim\limits_{x\to\pi+} \dfrac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{x\to\pi+} \dfrac{e^{\pi-x}-1}{x-\pi} = = [y = \pi - x] = \lim\limits_{y\to0-} \left(-\dfrac{e^y-1}{y}\right) = -1$, Значит, $f'(\pi)$ существует и $f'(\pi) = -1$. Ответ на вопрос д) «да».

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственное решение $x = \pi/2$ и это, очевидно, точка локального максимума. Ответ на вопрос е) «нет». Прямым дифференцированием проверяется, что $f''(x) < 0$ при $x \in (-1, 0)$ и при $x \in (0, \pi)$, но $f''(x) > 0$ при $x \in (\pi, +\infty)$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в M, то отсюда следует, что график функции $f(x)$ имеет единственную точку перегиба $x = \pi$. Ответ на вопрос ж) «нет». Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^{\pi-x} - 1) = -1$, то график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту. Ответ на вопрос з) «да». График функции $f(x)$ представлен на рис. 1.

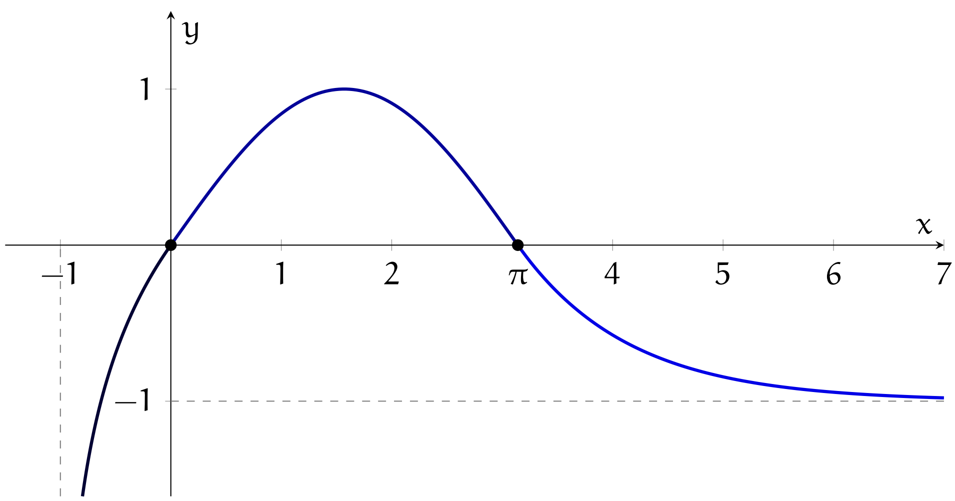

Рис. 1. График функции $f(x)$

Задача 2. Поскольку в левой части условия, определяющего множество M, стоит неотрицательная величина y^2, правая часть должна быть также неотрицательна. Это возможно только при $x \geqslant -5$ (поскольку дискриминант квадратного трехчлена x^2+2x+4 равен $-12 < 0$, а коэффициент при x^2 положителен, этот квадратный трехчлен не имеет вещественных корней и строго положителен). В то же время при любом $x \geqslant -5$ величина y^2 определяется однозначно. Поэтому числу $x = -5$ соответствует $y = 0$, а любому $x > -5$ соответствует ровно два значения (равных по модулю, но имеющих разные знаки), $\pm\sqrt{y^2} = \pm\sqrt{(x+5)(x^2+2x+4))}$. Таким образом, множество M — это бесконечная кривая, симметричная относительно оси OX, лежащая правее прямой $x = -5$ и проходящая через точку $(x, y) = (-5, 0)$. Соответственно, данная кривая не ограничена и замкнута, и на вопрос а) ответ «нет», а на вопрос б) ответ «да».

Если подставить в функцию $f(x, y) = y^2 - x^3$ значение y^2 из условия, определяющего множество M, то получим, что $f(x, y)$ на множестве M (т.е. при $x \geqslant -5$) равна функции $h(x) = 7x^2 + 14x + 20$. Эта квадратичная функция, во-первых, строго положительна (ее дискриминант отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен), а во-вторых, имеет в точке $x = -1$ локальный минимум, равный 13 (точка $x = -1$ — единственная точка при $x > -5$, где производная функции h обращается в ноль). Соответственно, поскольку эта функция гладкая, а ее аргумент может принимать любые значения из множества $[-5, +\infty)$, эта функция не ограничена и может принимать любые значения из множества $[13, +\infty)$. Соответственно, если эта функция принимает значения $f_0, f_1 \geqslant 13$, то она принимает и любые промежуточные значения между f_0 и f_1.

Поскольку, как уже было сказано, функция $h(x)$ при $x \geqslant -5$ не ограничена, то функция $f(x, y)$ на множестве M также не ограничена, поэтому у нее не может быть наибольшего значения.

В то же время точка локального максимума у функции $h(x)$ при $x \geqslant -5$ (и соответственно у функции $f(x, y)$ на множестве M) есть — это $x = -5$, граничная точка множества $[-5, +\infty)$ (соответственно, на множестве M это точка $(x, y) = (-5, 0) \in M$): правее точки $x = -5$ вплоть до точки $x = -1$ функция $h(x)$ убывает, поэтому $h(5) > h(x)\ \forall x \in (-5, -1]$. Других точек локального максимума у функции $h(x)$ (и соответственно у функции $f(x, y)$ на M) нет: производная функции $h(x)$ отлична от нуля всюду, кроме $x = -1$, где у функции $h(x)$ локальный (и глобальный) минимум, а других граничных точек, кроме $x = -5$, область определения функции $h(x)$ не имеет. Соответственно, точка локального максимума единственна.

Поэтому получаем следующие ответы на вопросы в)–е): в) — «да», г) — «да», д) — «нет», е) — «да».

Что касается функции $g(x, y) = f(x, y) + 2x^3$, то на множестве M она совпадает с функцией $p(x) = 2x^3 + h(x) = 2x^3 + 7x^2 + 14x + 20$, $x \geqslant -5$. Функция $p(x)$ имеет строго положительную производную $p'(x) = 6x^2 + 14x + 14$ (коэффициент при x^2 положителен, а дискриминант равен $-140 < 0$, поэтому данный квадратный трехчлен не имеет вещественных нулей и строго положителен), поэтому $p(x)$ при $x \geqslant -5$ строго (и неограниченно) возрастает. Соответственно, наименьшее значение функции $p(x)$ при $x \geqslant -5$ (и соответственно функции $g(x, y)$ на множестве M) достигается в единственной граничной точке, т. е. при $x = -5$.

Поэтому на вопрос ж) получаем ответ «нет», а на вопрос з) — ответ «да».

Задача 3. Дифференциальное уравнение является линейным, поэтому его решение определено на всей числовой прямой, так что на вопрос а) можно сразу ответить «да». Кроме того, при замене x на $-x$ правая часть уравнения меняет знак на противоположный, так что на вопрос б) тоже можно сразу ответить «да» (решение $y(x)$, заданное на $[0, +\infty)$, имеет $y'(0) = 0$, и его можно продолжить на $(-\infty, 0)$ по формуле $y(-x) = y(x)$).

Для ответа на остальные вопросы будем решать линейное дифференциальное уравнение с использованием замены переменных $y(x) = u(x)v(x)$, где неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнениям $u'(x) = 2xu(x)$, $v'(x) = 2x^3/u(x)$. Решая первое из этих уравнений методом разделения переменных, получаем ненулевое решение $u(x) = e^{x^2}$. Подставляя это решение $u(x)$ во второе уравнение, получаем

$$v(x) = \int 2x^3 e^{-x^2}\,dx = \int x^2 e^{-x^2}\,d(x^2) = C - (x^2+1)e^{-x^2} \;\Rightarrow\; y(x) = u(x)v(x) = Ce^{x^2} - x^2 - 1.$$

Подключая начальное условие $y(0) = a$, получаем $y(x) = (a+1)e^{x^2} - x^2 - 1$ (график решения $y(x)$ при разных начальных условиях см. на рис. 2).

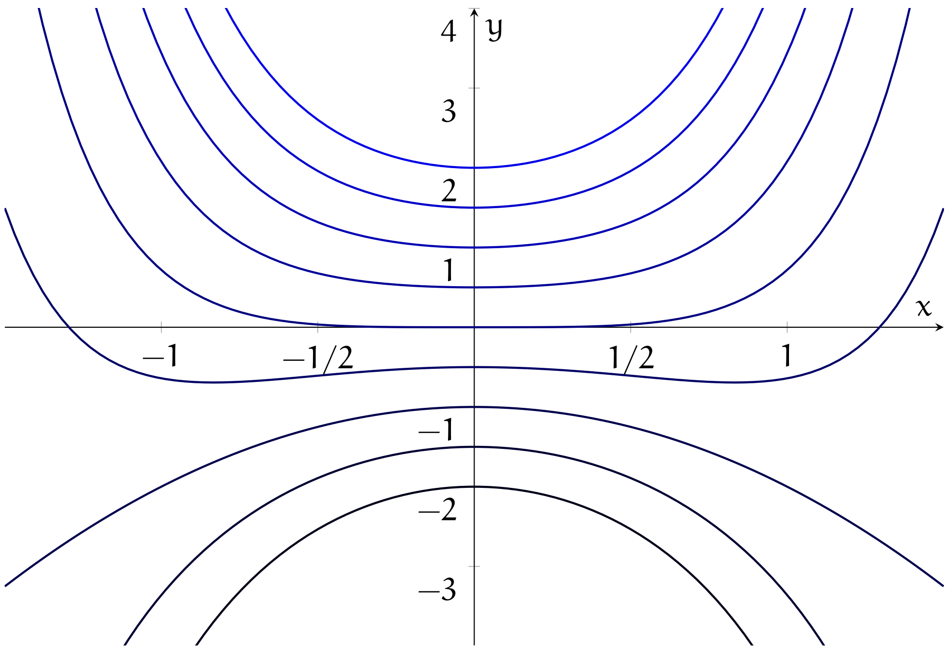

Рис. 2. Графики решений $y(x)$ задачи Коши при разных значениях a

Ответы на вопросы в)–з):

в). Условие первого порядка на локальный экстремум $y'(x) = 2x\left((a+1)e^{x^2} - 1\right) = 0$ дает $x = 0$ при всех $a \in \mathbf{R}$ или $x = \pm\sqrt{-\ln(a+1)}$ при $a \in (-1, 0)$. Для проверки условия второго порядка вычислим $y''(x) = 2(a+1)(1+2x^2)e^{x^2} - 2$ в точках, где выполнено условие первого порядка: $y''(0) = 2a$, $y''\left(\pm\sqrt{-\ln(a+1)}\right) = -4\ln(a+1)$. Последнее значение положительно при $a \in (-1, 0)$, поэтому локальный минимум функции $y(x)$ достигается при таких a более чем в одной точке, так что ответ на в) — «нет».

г). Функция $ay(x)$ имеет локальный минимум в точке $x = 0$ при любом $a \in \mathbf{R}$ (при $a > 0$ функция $y(x)$ имеет в нуле локальный минимум, при $a < 0$ — локальный максимум, а при $a = 0$ функция $ay(x) \equiv 0$), так что ответ на г) — «да».

д). Уравнение $y''(x) = 0$ имеет решения только при $a \in (-1, 0]$, но при $a \in (-1, 0)$ имеются два решения, являющихся точками перегиба (в них $y''(x)$ меняет знак), а при $a = 0$, хотя решение и единственно ($x = 0$), но в нем $y''(x)$ не меняет знака, оставаясь положительным и при $x > 0$, и при $x < 0$ — это локальный минимум, а не точка перегиба. Поэтому ответ на д) — «нет».

е)–з). Из приведенных выше вычислений следует, что

$$f(x) = \begin{cases} y(0) = a, & a \geqslant 0, \\ y\left(\pm\sqrt{-\ln(a+1)}\right) = \ln(a+1), & -1 < a < 0. \end{cases}$$

Если $a \leqslant -1$, то функция $y(x)$ неограничена снизу. Поэтому $A = (-1, +\infty)$, так что ответы на е) и ж) — соответственно, «да» и «нет». Кроме того, $f'(0) = 1$ как по формуле для $a \geqslant 0$, так и по формуле для $-1 < a < 0$. Поэтому функция $f(a)$ дифференцируема при $a = 0$, как и при всех прочих $a \in A$, так что ответ на з) — «да».

Задача 4. Обозначим плоскость, заданную уравнением $x_1 = 0$, через L. Так как матрица A ортогональная, а L инвариантно относительно A, то и $L^\perp = \langle(1, 0, 0)^T\rangle$ тоже инвариантно относительно A. И так как подпространство $L^\perp$ одномерное, то вектор $(1, 0, 0)^T$ собственный и $A(1, 0, 0)^T = (\alpha, 0, 0)^T$. Векторы $(0, 1, 0)^T$ и $(0, 0, 1)^T$ образуют базис в L, поэтому $A(0, 1, 0)^T = (0, \beta, \gamma)$. Таким образом,

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix},$$

откуда получаем, что

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}.$$

Из инвариантности L также следует, что $A(0, 0, 1)^T = (0, x, y)^T$. Найдем x и y. Так как матрица A ортогональная, то, во-первых, $x^2 + y^2 = 1$, и во-вторых, $x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0$. Эта система имеет два решения: $x = -\sin\varphi$, $y = \cos\varphi$ и $x = \sin\varphi$, $y = -\cos\varphi$ (геометрическое представление см. на рис. 3). Таким образом, существует две матрицы A, удовлетворяющие

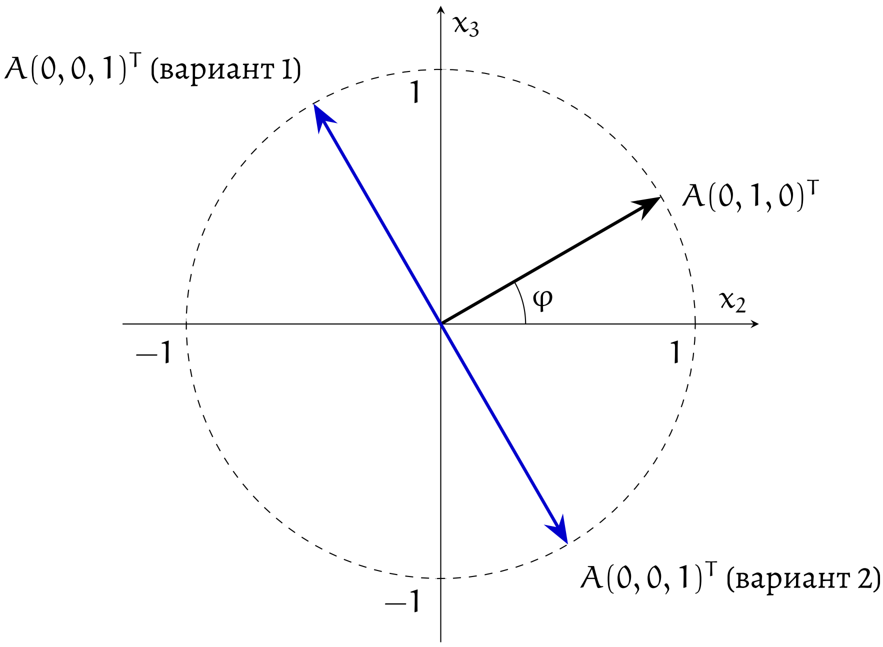

Рис. 3. Образы базисных векторов на плоскости L

поставленным условиям:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Соответственно, ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да».

При любом $\varphi \in [0, \pi]$ второй вариант матрицы A — симметричная матрица, а значит диагонализируемая. Так как она ортогональная, то для нее возможны только два собственных числа: -1 и 1. А так как она имеет порядок три, то по крайней мере одно ее собственное подпространство имеет размерность, большую единицы. Следовательно, такая матрица A имеет бесконечно много инвариантных подпространств, ответы на вопросы в) — «нет», ж) — «нет».

Рассмотрим $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. В этих случаях оба варианта матрицы A симметричные и имеют бесконечно много инвариантных подпространств. Ответы на вопросы г) — «да», д) — «нет», е) — «да».

И, наконец, определитель матрицы A для несимметричного случая можно сосчитать непосредственно. Он равен $(-1) \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = -1$, ответ на вопрос з) — «да».

5 Формат вступительного экзамена 2021 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме онлайнового теста. Продолжительность экзамена составляет 3 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей. Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 1.5 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет».

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 1.5 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780–819 баллов	11
750–779 баллов	10
720–749 баллов	9
680–719 баллов	8
640–679 баллов	7
600–639 баллов	6
560–599 баллов	5
520–559 баллов	4
480–519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской экономической школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей;
* подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Углубленный курс для программы МАЭ: февраль–июнь 2021 г.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда, 3 ак. часа лекция, и пятница, 2 ак. часа семинар).
* **Ускоренный курс для прикладных программ: апрель–июнь 2021 г.**
  В ускоренном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы по математическому анализу, линейной алгебре и теории вероятностей. Занятия 2 раза в неделю (вторник и четверг, 3 ак. часа лекция).

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. +7-495-956-9508 (доб. 103), email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись лекций на подготовительных курсах РЭШ по математике. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Приемная комиссия РЭШ

Телефоны: +7-495-956-9508 (доб. 144), +7-993-222-7993.

Email: abitur@nes.ru.

Web: http://www.nes.ru.

Адрес: Российская экономическая школа, 121353, город Москва, Сколковское шоссе, 45