I. Для программы «Магистр экономики»

Математический анализ

1. Элементы теории множеств

Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. Числовая прямая R и арифметическое пространство R^n

Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

Арифметическое (числовое, координатное) пространство R^n. Операции сложения элементов (векторов, точек) R^n и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в R^n.

3. Свойства множеств на числовой прямой и в R^n

Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в R^n как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства R^n. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота R^n). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в R^n и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустыхкомпактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытиякомпактного множества в R^n (на числовой прямой R).

4. Предел последовательности

Понятие последовательности точек R^n (или точек числовой прямой R) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек R^n. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в R^n.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. Предел функции. Непрерывность функций (отображений)

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств R^n или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в Rn (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в R^n или R^1. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на −∞ и +∞. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$\lim_{\to 0}\frac{\sin}{}$, $\lim_{\to\infty}(1+\frac{1}{})$, $\lim_{\to 0}\frac{\ln(1+)}{}$, $\lim_{\to 0}\frac{-1}{}$, $\lim_{\to 0}\frac{(1+)-1}{}$.

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в R^1

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в R^n)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных.

Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. Методы оптимизации в R^n

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. Определенный интеграл

Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. Числовые и функциональные ряды

Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. Степенные ряды

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., Лекции по математическому анализу. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., Дифференциальное и интегральное исчисление. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Зорич В. А., Математический анализ. Т. 1, 2. М., Наука, 1984.

5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., Математический анализ. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1987.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1989.

7. Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

8. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1982.

9. Рудин У., Основы математического анализа. М., Мир, 1976.

10. Филиппов А. Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1979.

11. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

12. Фихтенгольц Г. М., Основы математического анализа. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

13. Эльсгольц Л. Э., Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957.

Линейная алгебра

1. Матрицы и операции с ними

Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства R^n как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. Векторные пространства

Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из n + 1 вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства R^n. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. Системы линейных (алгебраических) уравнений

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в R^n (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в R^n, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в Rn как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в R^n. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в R^n как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. Линейные операторы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность L(X, Y) всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. Евклидовы пространства

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в R^n; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши— Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. Квадратичные формы

Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., Линейная алгебра. М., Наука, 1974.

5. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. М., Наука, 1966.

6. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре. М., 2000.

7. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., Наука, 1970.

8. Ильин В. А., Ким Б. Г., Линейная алгебра. М., Изд-во МГУ, 1998.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г., Линейная алгебра. М., Наука, 1984.

10. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов. М., Изд-во МГУ, 1987.

11. Курош А. Г., Курс высшей алгебры. М., Наука, 1963.

12. Проскуряков И. В., Сборник задач по линейной алгебре. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

13. Скорняков Л. А., Элементы линейной алгебры. М., Наука, 1980.

14. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа. (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

15. Шилов Г. Е., Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М., Наука, 1963.

II. Для программ «Экономика энергетики» и «Финансы, инвестиции, банки»

Теория вероятностей

- Эксперимент со случайным исходом и его математическое описание. Понятие пространства элементарных исходов, случайных событий и вероятности. Аддитивность вероятности. Простейшие вероятностные модели.
- Безусловная и условная вероятность. Независимость событий.
- Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- Случайные величины. Распределение. Числовые характеристики случайных величин. Примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
- Основные распределения: равномерное распределение, распределение Гаусса, биномиальное распределение, геометрическое распределение, показательное распределение, распределение Пуассона.
- Совместное распределение. Условное распределение.
- Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.
- Основные понятия и задачи статистики. Оценивание параметров. Свойства оценок.
- Доверительныые интервалы.
- Тестирование гипотез. Ошибки первого и второго рода.

Математический анализ

- Свойства множеств на числовой прямой и в $\boldsymbol{R}^n$. Предел последовательности. Предел функции, непрерывность функции.
- Производные функции одной переменной. Формула Тейлора.
- Интеграл Римана, неопределённый интеграл.
- Числовые и функциональные последовательности и ряды.
- Функции нескольких переменных. Производные и дифференциалы. Теорема о неявной функции.
- Безусловная и условная оптимизация в $\boldsymbol{R}^n$, необходимые и достаточные условия.

Линейная алгебра

- Линейные пространства и матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений.
- Квадратные матрицы. Определители, собственные числа.
- Линейные операторы и их матрицы. Специальные виды матриц и операторов (ортогональные матрицы, проекторы, матрицы простой структуры).
- Пространства со скалярным произведением. Самосопряженные операторы и симметричные матрицы.
- Квадратичные формы.

Литература

- Simon and Blume, Mathematics for Economists (математический анализ и линейная алгебра)
- Ross, A First Course in Probability (теория вероятностей и математическая статистика)
- Магнус, Катышев, Пересецкий, Эконометрика: Начальный курс (линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика - приложения, гл. 2)