Современная экономическая наука и образование
в России

РЭШ
Российская
экономическая
школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ПРОГРАММУ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» В РЭШ В 2014 ГОДУ

Москва 2014

Бремзен А. С., Голованы С. В., Катышев П. К., Хейфец И. Л., Шибанов О. К.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в Российскую экономическую школу в 2014 году. — М., 2014 — 82 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ на программу «Магистр экономики» в 2014 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене на программу «Магистр экономики».

Содержание и форма экзамена в течение ряда лет оставались неизменными.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена по математике.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2011—2013 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

   Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. **Предел последовательности**

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. **Предел функции. Непрерывность функций (отображений)**

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbf{R}^n$)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$**

   Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

    Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

    Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

    Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

    Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. **Степенные ряды**

    Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**
Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. 1, 2. М., Наука, 1984.

5. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1987.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1989.

7. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

8. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Наука, 1982.

9. Рудин У., *Основы математического анализа*. М., Мир, 1976.

10. Филиппов А. Ф., *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. М., Наука, 1979.

11. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

12. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

13. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

   Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

   Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

   Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

   Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

   Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

   Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. **Определитель матрицы**

   Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. Линейные операторы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. Евклидовы пространства

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1974.

5. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*. М., Наука, 1966.

6. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.

7. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., Наука, 1970.

8. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.

9. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1984.

10. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.

11. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., Наука, 1963.

12. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

13. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., Наука, 1980.

14. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

15. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М., Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2011 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и $\{b_n\}$ — положительная последовательность, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

II. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то существует положительная последовательность $\{b_n\}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

III. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то существует положительная последовательность $\{b_n\}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

2. Даны подпространства L_1, L_2, L_3 линейного пространства $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 3$. Обозначим через n_1, n_2, n_3 размерности L_1, L_2, L_3 соответственно, и через $X \oplus Y$ прямую сумму подпространств X и Y. Тогда

A если $n_1 + n_2 = n$, то $\mathbf{R}^n = L_1 \oplus L_2$

B если $L_2 \neq L_3$, то $L_1 + L_2 \neq L_1 + L_3$

C если $n_2 \neq n_3$, то $L_1 + L_2 \neq L_1 + L_3$

D если $L_1 \oplus L_2 = L_1 \oplus L_3$, то $L_2 = L_3$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Даны матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times m$. Тогда

A если $AB = I$, то $BA = I$

B если $AB = I$, то BA задает оператор проектирования

C если AB задает оператор проектирования, то $BA = I$

D если AB задает оператор проектирования, то BA задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Дана квадратная вещественная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Обозначим через $\det A$ определитель матрицы A. Тогда

A если $\det A > 0$, то у матрицы A существует отрицательное собственное число

B если $\det A < 0$, то у матрицы A существует положительное собственное число

C	если $\det A > 0$, то у матрицы A существует положительное собственное число

D	если $\det A < 0$, то у матрицы A существует отрицательное собственное число

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Дана ортогональная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Обозначим через I единичную матрицу порядка n. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Матрица $\frac{1}{2}(I - A)$ задает оператор проектирования.

II. Если матрица A симметричная, то матрица $\frac{1}{2}(I + A)$ задает оператор проектирования.

III. Если матрица A кососимметричная, то матрица $\frac{1}{2}(I + A)$ задает оператор проектирования.

A	ни одно из утверждений I, II и III

B	только II

C	только III

D	только II и III

E	I, II и III

6. Дана прямоугольная матрица A размера $m \times n$, b — столбец длины m, c — столбец длины n и x — искомый столбец подходящей длины. Через A^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Тогда

A	если система $Ax = b$ имеет решение при любом b, то система $A^T x = c$ имеет решение при любом c

B	если система $Ax = b$ имеет решение при любом b, то система $A^T x = c$ не имеет решений ни при каком $c \neq 0$

C	если система $Ax = b$ при любом b имеет единственное решение, то система $A^T x = c$ при любом c имеет единственное решение

D	если система $Ax = b$ при любом b имеет не более одного решения, то система $A^T x = c$ при любом c имеет не более одного решения

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Дана квадратная невырожденная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если A симметричная, то A^2 симметричная положительно определенная матрица

B если A несимметричная, то A^2 симметричная положительно определенная матрица

C если A^2 симметричная положительно определенная матрица, то A симметричная

D если A^2 симметричная положительно определенная матрица, то A несимметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A^2 + 2A = 0$. Тогда

A матрица A вырожденная

B матрица A невырожденная

C числа 0 и -2 оба являются собственными числами матрицы A

D хотя бы одно из чисел 0 и -2 не является собственным числом матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Даны прямоугольные матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times m$, где $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Известно, что матрица AB невырожденная. Тогда

A $m < n$

B $m \geqslant n$

C $\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} AB$

D $\operatorname{rank} BA \neq \operatorname{rank} AB$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Множество A является подмножеством множества вещественных чисел. Тогда

A если множество предельных точек множества A пустое, то множество A конечное

B если множество предельных точек множества A совпадает с множеством внутренних точек множества A, то множество A замкнутое

C если множество предельных точек множества A совпадает с множеством граничных точек множества A, то множество A замкнутое

D	если множество предельных точек множества A замкнутое, то множество A замкнутое

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Рассматриваются подмножества вещественной оси. Тогда

A	найдется замкнутое множество, являющееся конечным пересечением открытых множеств

B	найдется замкнутое множество, являющееся счетным пересечением открытых множеств

C	найдется открытое множество, являющееся конечным пересечением замкнутых множеств

D	найдется открытое множество, являющееся счетным пересечением замкнутых множеств

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится. Тогда

A	существует такая перестановка членов последовательности, что полученная последовательность сходится

B	последовательность $\{b_n = e^{a_n}, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

C	последовательность $\{c_n = a_n^3, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

D	последовательность $\{d_n = a_n^2 - a_n + 1, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. На интервале (a, b) задана функциональная последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$, причем каждая функция $f_n(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда

A	если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ непрерывна на (a, b)

B	если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b)

C	если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b) и для любого $x \in (a, b)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$, то $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$

D	если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то последовательность $\{f_n^2(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f^2(x)$ равномерно на (a, b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Функция $f(x)$ задана равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leqslant 2, \\ ax^2 + b, & \text{если } x > 2, \end{cases}$$

и дифференцируема на всей прямой. Тогда

A $a = 3,\ b = -4$

B $a = 2,\ b = 0$

C $a = 1,\ b = 4$

D числа a, b не совпадают ни с одним из вариантов A, B, C

E таких чисел a, b не существует

15. Дана функция двух переменных $f(x, y) = x^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon \sqrt{|x|} + 2\sqrt{|y|} = 2\}$. Тогда

A функция $f(x)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках

B функция $f(x)$ на множестве M достигает наименьшего значения в двух точках

C любой локальный экстремум функции $f(x)$ на множестве M является либо точкой наименьшего, либо точкой наибольшего значения функции $f(x)$ на множестве M

D наибольшее значение функции $f(x)$ на множестве M равно 20

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — числовой ряд. Тогда

A если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ расходится

B если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ сходится

C если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится

D если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ разложена в окрестности точки $x_0 = 0$ в ряд Тейлора: $f(x) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$. Тогда

A $\quad c_7 = 2,\ c_8 = 2$

B $\quad c_7 = 1,\ c_8 = 0$

C $\quad c_7 = -2,\ c_8 = 0$

D $\quad c_7 = -1,\ c_8 = 0$

E $\quad$ числа c_7, c_8 не совпадают ни с одним из вариантов A, B, C, D

18. Дана функция двух переменных $f(x, y) = \min\{x, y\}$ и множество $M = \{(x, y) \colon (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5\}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках

B $\quad$ функция $f(x)$ на множестве M достигает наименьшего значения в двух точках

C $\quad$ существует локальный минимум функции $f(x)$ на множестве M, который не является точкой наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве M

D $\quad$ существуют два локальных максимума функции $f(x)$ на множестве M, которые не являются точками наибольшего значения функции $f(x)$ на множестве M

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Объект A движется на координатной плоскости равномерно вдоль прямой $4y - 3x = 0$ со скоростью 20 м/сек в направлении увеличения x и y. Объект B движется на координатной плоскости равномерно вдоль прямой $3y - 4x = 0$ со скоростью 15 м/сек также в направлении увеличения x и y. В начальный момент времени объект A находится в начале координат, объект B — в точке с координатами $(21, 28)$ (единица измерения координат — метр). Объекты A и B будут находиться на наименьшем расстоянии

A $\quad$ через одну секунду после начала движения

B $\quad$ через две секунды после начала движения

C $\quad$ через три секунды после начала движения

D $\quad$ через промежуток времени, отличный от значений, перечисленных в A, B, C

E наименьшего расстояния не существует

20. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Найдите *ложное* утверждение.

A образ отрезка $[a, b]$ при отображении $f(x)$ является компактным множеством

B образ отрезка $[a, b]$ при отображении $f(x)$ является связным множеством

C функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$

D для любых чисел c, d, таких что $a < c < d < b$, выполнено равенство $f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x)dx$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

21. Дана последовательность функций $f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\dfrac{x^3 - 1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — множество таких чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A множество M ограничено сверху

B функция $f(x)$ является нечетной функцией

C график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту

D $f'(1) = 6$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Пусть M — множество сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n(x+1)^n}$. Тогда

A $M = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

B $M = (-\infty, -4/3) \cup (2/3, +\infty)$

C $M = (-4, 2)$

D $M = (-4/3, 2/3)$

E множество M не совпадает ни с одним из множеств в A, B, C, D

23. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана равенствами $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$, $n \geqslant 1$. Тогда

A существует такое число a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет две предельные точки

B существует такое число a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является неограниченной

C существует такое число $a \neq 2\pi$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2\pi$

D если $a = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{2}x^3 dx}{2x^8 + 4}$ равен

A $\frac{\sqrt{2}x^4}{4} \ln(2x^8 + 4) + C$

B $\frac{\sqrt{2}}{16} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

C $\frac{1}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

D $\frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

E другой функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D

25. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{n^5 + 5n^4} - \sqrt{n^2 + 2n}\right)$ равен

A 0

B $-3/2$

C $5/2$

D другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

26. Уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = 4 - x$

A имеет единственное решение, лежащее в интервале $(0, 1/5)$

B имеет единственное решение, лежащее в интервале $(1/5, 1)$

C имеет единственное решение, лежащее в интервале $(2, 3)$

D не имеет решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Острый угол, под которым кривые $x^2 + 2y^2 = 3$ и $x^2 + 3x + 4y^2 = 8$ пересекаются в точке $(1, 1)$, равен

A $\operatorname{arctg} \frac{1}{8}$

B $\quad \operatorname{arctg}\frac{5}{16}$

C $\quad \operatorname{arctg}\frac{2}{21}$

D $\quad \operatorname{arctg}\frac{3}{11}$

E $\quad$ другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

28. Интеграл

$$\int_0^2 \frac{5dx}{x^2-3x-4}$$

равен

A $\quad -\ln 3$

B $\quad -\ln 2/3$

C $\quad -5\ln 6$

D $\quad -\ln 6$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

29. Неопределенный интеграл

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\ln(\sin x)}$$

равен

A $\quad \ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

B $\quad -\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

C $\quad -\ln\cos x + C$

D $\quad \ln\ln\sin x + C$

E $\quad$ функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D

30. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\frac{dx}{dt} = x\sin t$, $x(0) = 1$, в точке $t = \pi$ равно

A $\quad e^2$

B $\quad e$

C $\quad e^{-1}$

D $\quad 1$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

31. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $z' = (z+4x)^2$, $z(0) = 2$, в точке $x = \pi/24$ равно

A $2/\sqrt{3}$

B $2/\sqrt{3} + \pi/6$

C $2\sqrt{3}$

D $2\sqrt{3} + \pi/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

32. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = xe^t - e^{e^{2t}}$, $x(0) = 2$, определено на

A интервале $(-\infty, e^e)$

B интервале $(-\infty, e^{2e})$

C интервале $(-\infty, 2e^e)$

D всей числовой прямой

E интервале, отличном от перечисленных в A, B, C, D

33. Предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi/2 - 10\sqrt{x}) \ln\cos 2x}{(2^x - 1)((x+1)^5 - (x-1)^5)}$$

равен

A $-\dfrac{\ln 2}{5}$

B $-\dfrac{1}{5\ln 2}$

C -5

D $-5\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

34. Предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

равен

A ∞

B $1/6$

C $-1/12$

D $\quad 0$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

35. Предел

$$\lim_{x\to 0} \sin(e^{2x} - 1) \cdot \sin(1/x)$$

равен

A $\quad 1$

B $\quad 2$

C $\quad e$

D $\quad 0$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

36. Интеграл

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$$

равен

A $\quad 0$

B $\quad \pi$

C $\quad -\pi$

D $\quad -2\pi$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

37. Интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$$

равен

A $\quad 2/3$

B $\quad 4/3$

C $\quad 1/2$

D $\quad 1$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

38. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности нуля, причем существуют пределы $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + g(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x)+g^2(x)$.

II. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)-g(x)$.

III. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

39. Функция $f(x)$ определена в окрестности нуля. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если для некоторого натурального k существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k$, то и для любого натурального $l>k$ существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^l$.

II. Если для некоторого натурального k существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k$, то существует и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)x^k \ln x$.

III. Если для некоторого натурального k для любого натурального l существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k \ln^l x$, то существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^{k-1}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

40. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой прямой, причем $f(0)=g(0)=$ $=0$. Тогда

A если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $g(x)$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

B если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $f(x)$ непрерывна в нуле, то и $g(x)$ непрерывна в нуле

C если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $g(f(x))$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

D если $f(f(x))$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2.1.2 Вторая часть теста

1. Квадратная матрица A четвертого порядка задает в стандартном базисе линейного пространства $\mathbf{R}^4$ оператор проектирования, не равный нулевому и тождественному операторам. Даны четыре вектора:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что x_1, x_2, x_3 являются собственными векторами матрицы A, а x_2, x_3, x_4 являются собственными векторами транспонированной матрицы A^T. Тогда

а) матрица A задает ортогональный проектор (при стандартном скалярном произведении);

Да Нет

б) ранг матрицы A равен 2;

Да Нет

в) ранг матрицы A не равен 2;

Да Нет

г) геометрическая кратность собственного числа 1 матрицы A равна трем;

Да Нет

д) вектор x_4 является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

е) если сумма элементов матрицы A равна нулю, то точка $\lambda = 0$ является точкой перегиба характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы A;

Да Нет

ж) если сумма элементов матрицы A равна 4, то точка $\lambda = 1$ является точкой перегиба характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы A;

Да Нет

з) у матрицы A существует бесконечно много инвариантных подпространств размерности 3.

Да Нет

2. Даны функция $f(x,y)=(x+2)^2+y^2$ и множество $M=\{(x,y)\colon y^2=x^3+3x^2\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке $(-3,0)$;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

в) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в трех точках $(-2,2)$, $(-2,-2)$, $(0,0)$;

Да Нет

г) функция $f(x,y)$ не достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

д) точка $\left(-2/3,-\sqrt{28/27}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(-2/3,\sqrt{28/27}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(-2,2)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1,2)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M.

Да Нет

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\alpha x}{\sqrt{t^2+1}}+\beta(t),\quad x(0)=\gamma,$$

где α и γ — вещественные числа, а $\beta(t)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной прямой. Тогда

а) если $\beta(t)\geqslant 0$ при всех $t\geqslant 0$, то $x(t)$ монотонно не убывает при всех $t\geqslant 0$;

Да Нет

б) если $\beta(t)$ ограничена на всей числовой прямой, то $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) функция $x(t)$ определена на всей числовой прямой;

Да Нет

г) если $\beta(t) \equiv 0$, то $x(t)$ — нечетная функция;

Да Нет

д) если $\alpha < 0$, $\gamma < 0$ и $\beta(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$ из области определения $x(t)$;

Да Нет

е) если $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta(t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t) > \int_0^t \beta(u)\,du$ при всех $t \geqslant 0$ из области определения $x(t)$;

Да Нет

ж) если $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\beta(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, то $x(3/2) \geqslant e$;

Да Нет

з) если $\alpha = 3$, $\gamma = 0$, $\beta(t) = 8t^3$, то $x(5) < 5000$.

Да Нет

4. Функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, определяется равенством $f(x) = \displaystyle\int_{3x-2}^{x^2-x+1} g(t)dt$, где $g(t) = \dfrac{1}{|t|+2}$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда

а) производная $f'(x)$ существует при каждом $x \in \mathbf{R}$;

Да Нет

б) уравнение $f(x) = 0$ имеет два решения;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наибольшего значения;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наименьшего значения;

Да Нет

д) точка $x = \sqrt{3}$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

е) на отрезке $[-1, 0]$ функция $f(x)$ возрастает;

Да Нет

ж) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту.

Да Нет

5. Пусть множества M_1 и M_2 определяются следующим образом:

$$M_1 = \left\{x < 0\colon \text{существует } \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n\right\},$$
$$M_2 = \left\{x > 1\colon \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n!} \text{ сходится}\right\}.$$

Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n, & \text{если } x \in M_1,\\ a, & \text{если } x \in [0, 1],\\ b - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n!}, & \text{если } x \in M_2,\end{cases}$$

где a, b — константы. Обозначим через $M = M_1 \cup [0, 1] \cup M_2$. Тогда

а) при $a = 0$, $b = 2$ функция $f(x)$ достигает на M наибольшего значения;

Да Нет

б) при $a = 1$, $b = 1$ функция $f(x)$ достигает на M наименьшего значения;

Да Нет

в) существуют числа a, b, такие что $(-1/2, 1/2) \subset M$ и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(-1/2, 1/2)$;

Да Нет

г) существуют числа a, b, такие что $(1/2, 3/2) \subset M$ и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(1/2, 3/2)$;

Да Нет

д) точка $x = -\sqrt{2/3}$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$;

Да Нет

е) при любых a, b уравнение $f(x) = x$ имеет решение;

Да Нет

ж) при любых a, b график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту;

Да Нет

з) существуют такие числа a, b, что график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту с ненулевым углом наклона.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** E. **3.** B. **4.** D. **5.** B. **6.** C. **7.** A. **8.** E. **9.** C. **10.** B. **11.** B. **12.** C. **13.** A. **14.** A. **15.** A. **16.** C. **17.** B. **18.** C. **19.** C. **20.** D. **21.** E. **22.** E. **23.** D. **24.** C. **25.** B. **26.** D. **27.** C. **28.** D. **29.** D. **30.** A. **31.** E. **32.** D. **33.** E. **34.** B. **35.** D. **36.** D. **37.** A. **38.** A. **39.** A. **40.** E.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что векторы x_1, x_2, x_3 являются собственными векторами матрицы A и не ортогональны вектору x_4, который является собственным вектором матрицы A^T. Отсюда следует, что все эти четыре вектора соответствуют одному и тому же собственному числу. Кроме того, векторы x_2 и x_3 соответствуют тому же собственному числу также и как собственные векторы матрицы A^T (они не ортогональны сами себе). Это собственное число может быть одним из двух: 0 или 1, так как матрица A задает проектор. Оставшийся четвертый собственный базисный вектор должен соответствовать другому собственному числу, так как матрица A не совпадает с нулевой и единичной. Поэтому этот вектор должен быть ортогонален векторам x_2, x_3 и x_4 (собственные векторы матрицы A^T, соответствующие другому собственному числу). Легко подобрать такой вектор (обозначим его через y_4), например,

$$y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

и убедиться, что векторы x_1, x_2, x_3 и y_4 образуют базис в $\mathbf{R}^4$. В этом базисе матрица оператора, задаваемого матрицей A в стандартном базисе, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ответы на вопросы а) — «нет» (так как вектор y_4 не ортогонален линейной оболочке векторов x_1, x_2, x_3), б) — «нет», в) — «да» (ранг матрицы A равен 1 или 3), г) — «нет» (геометрическая кратность собственного числа 1 может быть равна 1), д) — «нет» (если бы x_4 был собственным вектором матрицы A, то он был бы обязан соответствовать тому же собственному числу, что и x_1, x_2 и x_3, а это невозможно).

Рассмотрим сумму элементов матрицы A. Ее можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ можно представить в виде суммы $x_2 + x_3$. Оба эти вектора — собственные, соответствуют собственному числу 0 или 1 (одному и тому же). Поэтому в первом случае

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

и характеристический многочлен матрицы A есть многочлен $p(\lambda) = (-\lambda)^3(1-\lambda)$. Во втором случае

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

и характеристический многочлен матрицы A есть многочлен $p(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda)^3$. Отсюда получаем ответы на вопросы е) — «да» и ж) — «да».

Чтобы построить бесконечно много инвариантных подпространств размерности 3, достаточно взять всевозможные двумерные подпространства линейной оболочки векторов x_1, x_2, x_3 (инвариантны как подпространства собственного подпространства матрицы A) и рассматривать их суммы с линейной оболочкой вектора y_4

(собственное подпространство). Так как сумма инвариантных подпространств инвариантна, то построенные трехмерные подпространства инвариантны относительно A, и ответ на вопрос з) — «да».

Задача 2. Подставим выражение для y^2 из определения множества M в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(x) = (x+2)^2 + x^3 + 3x^2 = x^3 + 4x^2 + 4x + 4$. Так как y^2 не может быть отрицательным, то функцию $g(x)$ нужно исследовать на множестве, где $x^3 + 3x^2 \geqslant 0$ (или $x \in [-3, +\infty)$).

Критические точки функции $g(x)$ на множестве $[-3, +\infty)$ найдем, приравняв производную к нулю:

$$g'(x) = 3x^2 + 8x + 4 = 0,$$

откуда получим $x = -2$ или $x = -2/3$. Добавим также левый конец полуинтервала $x = -3$.

Так как при $x \to +\infty$ значения функции $g(x)$ стремятся к $+\infty$, то $g(x)$ не достигает наибольшего значения на $[-3, +\infty)$ (а значит и $f(x, y)$ не достигает наибольшего значения на M, поэтому ответы на вопросы в) — «нет», г) — «да»).

Функция $g(x)$ — кубическая парабола, которая на множестве $[-3, +\infty)$ достигает наименьшего значения либо на левом его конце, либо во внутренней точке, в которой производная равна нулю. Как видно,

$$\begin{aligned}
g(-3) &= (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1, \\
g(-2) &= (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 4, \\
g(-2/3) &= (-2/3)^3 + 4 \cdot (-2/3)^2 + 4 \cdot (-2/3) + 4 = 76/27 < 4.
\end{aligned}$$

Это означает, что наименьшее значение достигается в точке $x = -3$, которая соответствует единственной точке $x = -3$, $y = 0$ множества M (действительно, $y^2 = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 = 0$). Таким образом, ответы на вопросы а) — «да» и б) — «нет».

Рассмотрим вторую производную функции $g(x)$ во внутренних точках множества $[-3, +\infty)$.

$$g''(x) = 6x + 8.$$

Как видно, $g''(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4 < 0$, $g''(-2/3) = 6 \cdot (-2/3) + 8 = 4 > 0$, откуда следует, что точка $x = -2$ является точкой локального максимума, а точка $x = -2/3$ — точкой локального минимума функции $g(x)$. Этим точкам соответствуют следующие точки множества M: $x = -2$, $y = \pm 2$ и $x = -2/3$, $y = \pm\sqrt{28/27}$. Таким образом, ответы на вопросы д) — «да», е) — «нет», ж) — «да», з) — «нет» (точка $x = 1$, $y = 2$ не является стационарной).

На рисунке 1 изображены множество M и критические точки функции $f(x, y)$ на нем в исходных координатах (x, y).

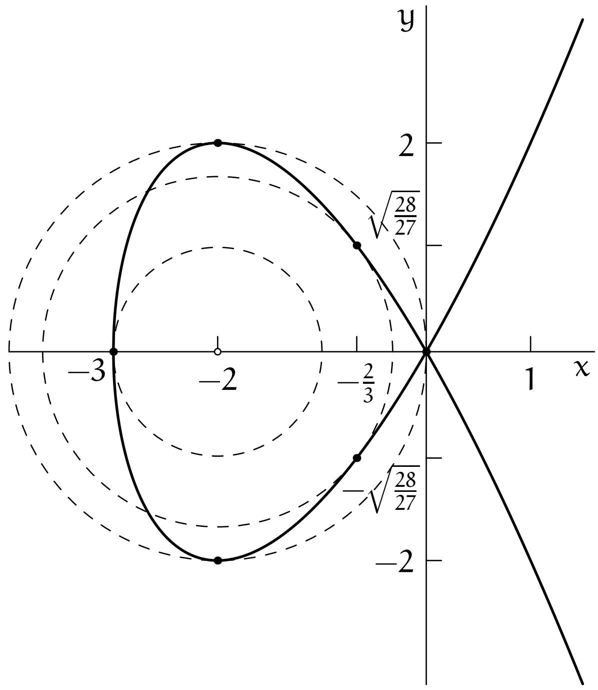

Рис. 1. Множество M и линии уровня функции $f(x, y)$

Задача 3. Найдем решение данного дифференциального уравнения. Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{\sqrt{t^2+1}}$$

может быть проинтегрировано с помощью таблицы интегралов, его общим решением является функция $x(t) = C \cdot \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}$. Решение исходного уравнения может быть найдено с помощью метода вариации постоянной: если подставить $x(t) = C(t) \cdot \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}$ в исходное уравнение, то после упрощения получим

$$\frac{dC}{dt}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha} = \beta(t),$$

откуда нетрудно вывести решение исходной задачи:

$$x(t) = \left[\gamma + \int_0^t \frac{\beta(\tau)d\tau}{\left(\tau + \sqrt{\tau^2+1}\right)^{\alpha}}\right]\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}.$$

Из явного вида решения немедленно следуют ответы на вопросы а) — «нет» (достаточно положить $\beta(t) \equiv 0$, $\alpha > 0$ и $\gamma < 0$), б) — «нет» (например, при $\beta(t) \equiv \equiv 0$, $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$), в) — «да», г) — «нет» (при $\gamma \neq 0$), д) — «да» (следует из того, что выражение в квадратных скобках отрицательное при всех $t \geqslant 0$), е) — «да» (достаточно внести выражение вне квадратных скобок под знак интерграла, оно строго больше знаменателя дроби во всех внутренних точках отрезка $[0, t]$).

Для параметров вопроса ж) решение задачи Коши можно вычислить в явном виде (снова воспользовавшись табличным интегралом), оно равно $x(t) = \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ и в точке $t = 3/2$ превышает $\left(3 + \sqrt{13}\right)/2 > 3 > e$ (ответ на вопрос ж) — «да»).

Чтобы ответить на вопрос з), подставим параметры в решение уравнения:

$$x(t) = \int_0^t \frac{8\tau^3 d\tau}{\left(\tau + \sqrt{\tau^2+1}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3 = 8\int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \sqrt{1+1/\tau^2}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3.$$

Заметим, что под интегралом стоит положительная возрастающая на $[0,t]$ функция, поэтому

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\left(1+\sqrt{1+1/\tau^2}\right)^3} \leqslant \int_0^t \frac{d\tau}{\left(1+\sqrt{1+1/t^2}\right)^3} = \frac{t}{\left(1+\sqrt{1+1/t^2}\right)^3}.$$

Таким образом,

$$x(t) \leqslant \frac{8t}{\left(1+\sqrt{1+1/t^2}\right)^3}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^3 = 8t^4,$$

и $x(5) \leqslant 8 \cdot 5^4 = 5000$ (ответ на вопрос з) — «да»).

Задача 4. Подынтегральная функция $g(t)$ непрерывна при каждом $t \in \mathbf{R}$, а пределы интегрирования как функции от x имеют производные при каждом $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет производную при каждом $x \in \mathbf{R}$ и

$$f'(x) = \frac{1}{|x^2 - x + 1| + 2} \cdot (2x - 1) - \frac{1}{|3x - 2| + 2} \cdot 3. \tag{1}$$

Из положительности функции $g(t)$ следует, что

$$\begin{aligned} &f(x) > 0, && \text{если } x^2 - x + 1 > 3x - 2,\\ &f(x) < 0, && \text{если } x^2 - x + 1 < 3x - 2,\\ &f(x) = 0, && \text{если } x^2 - x + 1 = 3x - 2. \end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} &f(x) > 0, && \text{если } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty),\\ &f(x) < 0, && \text{если } x \in (1, 3),\\ &f(0) = f(3) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, на вопросы а) и б) ответы «да». Из (1) следует (мы опускаем рутинные вычисления, заметим только, что $x^2 - x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$), что

$$f'(x) = \frac{-9x^2 + 14x - 13}{(x^2 - x + 3)(4 - 3x)} \qquad \text{при } x < \frac{2}{3}, \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{(x^2 - x + 3)x} \qquad \text{при } x \geqslant \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 && \text{при } x < \sqrt{3},\\ f'(x) &> 0 && \text{при } x > \sqrt{3},\\ f'(\sqrt{3}) &= 0. \end{aligned}$$

Значит, функция $f(x)$ строго убывает на $(-\infty, \sqrt{3})$ и строго возрастает на $(\sqrt{3}, +\infty)$. Таким образом, на вопрос в) ответ «нет», на вопросы г) и д) ответы «да», на вопрос е) ответ «нет».

Если $x > 3$, то $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - x + 3}{3x}$, и при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ имеет порядок роста такой же, как $\ln x$. Аналогично при $x \to -\infty$ функция $f(x)$ эквивалентна $3 \ln |x|$. Значит, на вопросы ж) и з) ответы «нет».

Задача 5. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ при любом вещественном k. Поэтому $M_1 = (-\infty, 0)$ и $f(x) = e^{-1/x^2}$ на M_1. Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{k^n}{n!} = e^k$ при любом вещественном k, то $M_2 = (1, +\infty)$ и $f(x) = b - e^{(x-1)^2}$ на M_2. Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x < 0, \\ a, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ b - e^{(x-1)^2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

При $a = 0$, $b = 2$ имеем $f(x) < 1$ при любом вещественном x, но $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 1$. Поэтому на вопрос а) ответ «нет». Поскольку $b - e^{(x-1)^2} \to -\infty$ при $x \to +\infty$ при любом вещественном b, то ответ на вопрос б) «нет».

Если $a = 0$, то можно показать (используя, например, индукцию), что функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет производные всех порядков и $f^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$. Поэтому при $a = 0$ и при любом b функция $f(x)$ дважды (и даже бесконечно) непрерывно дифференцируема на $(-1/2, 1/2)$. Значит, на вопрос в) ответ «да».

При любых a, b имеем:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0, && \text{если } 1/2 < x < 1, \\ f''(x) &= -2(1 + 2(x-1)^2)e^{(x-1)^2}, && \text{если } 1 < x < 3/2. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1-0} f''(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 1+0} f''(x) = -2$, то ответ на вопрос г) «нет».

Если $x < 0$, то $f(x) = e^{-1/x^2}$ и, следовательно,

$$f''(x) = \frac{2}{x^4}\left(\frac{2}{x^2} - 3\right) e^{-1/x^2}.$$

Поэтому единственной точкой перегиба является точка $-\sqrt{2/3}$. Ответ на вопрос д) «да».

Если, например, $a = -1$, $b = 0$, то $f(x) < 0$ при любом $x \geqslant 0$. Кроме того, $f(x) > 0$ при любом $x < 0$. Значит, уравнение $f(x) = x$ решений не имеет. Ответ на вопрос е) «нет».

Поскольку $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ при любых a, b, то ответ на вопрос ж) «да». При любых a, b предел $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)/x = -\infty$. Поэтому ответ на вопрос з) «нет».

3 Вступительный экзамен 2012 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{R}$ и точка $x \in \mathbf{R}$. Тогда

A если x — изолированная точка множества A, то x граничная точка множества A

B если x — граничная точка множества A, то x изолированная точка множества A

C если x — предельная точка множества A, то x граничная точка множества A

D если x — граничная точка множества A, то x предельная точка множества A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть A — ограниченное счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A A — открытое множество

B A — замкнутое множество

C A — компактное множество

D A — не является ни открытым, ни замкнутым множеством

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Дана система векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что каждый из векторов $x_1, \dots, x_m$ линейно выражается через остальные векторы системы. Через $\mathscr{L}(x_1, \dots, x_m)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{x_1, \dots, x_m\}$, и через $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m)$ — ее размерность. Тогда

A $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = m - 1$

B если $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = n$, то $m = n + 1$

C если $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = n$, то любые n векторов системы $\{x_1, \dots x_m\}$ линейно независимые

D если $\dim \mathscr{L}(x_1, \dots, x_m) = m - 1$, то любые $m - 1$ векторов системы $\{x_1, \dots x_m\}$ линейно независимые

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Даны две ненулевые матрицы A и B размера $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, где $m, n \geqslant 2$. Обозначим через a столбец длины m, через b столбец длины n и через x и y искомые столбцы подходящей длины. Тогда

A если система $ABx = Ab$ имеет решение при любом b, то система $Bx = b$ имеет решение при любом b

B если система $ABx = Ab$ при любом b имеет не более одного решения, то система $Bx = b$ при любом b имеет не более одного решения

C если система $ABx = a$ имеет решение при любом a, то система $BAy = b$ имеет решение при любом b

D если система $ABx = a$ при любом a имеет не более одного решения, то система $BAy = b$ при любом b имеет не более одного решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, α — вещественное число. Через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A $\det(A + B) = \det A + \det B$

B $\det(A - B) = \det A - \det B$

C $\det(\alpha A) = \alpha \det A$

D $\det(AB) = \det A \det B$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$. Известно, что $\mathbf{B}\boldsymbol{A} = 0$. Через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im} \boldsymbol{A} \subset \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

B $\operatorname{Im} \boldsymbol{A} \subset \operatorname{Im} \mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \subset \operatorname{Im} \mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \subset \operatorname{Ker} \mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A + B = I$, где I — единичная матрица. Найдите ***ложное*** утверждение

A если A — матрица проектирования, то B — матрица проектирования

B если A — матрица проектирования, то $AB = 0$

C если $AB = 0$, то A и B — матрицы проектирования

D если $AB = 0$, то $BA = 0$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

8. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, трактуемые как линейные операторы в пространстве $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Обозначим через B^T матрицу, транспонированную к B, через $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение к подпространству L и через $\operatorname{Im} X$ — образ матрицы X. Тогда

A если $B^T A = 0$, то $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$

B если $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$, то $B^T A = 0$

C если $B^T A = 0$, то $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^{\perp}$

D если $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^{\perp}$, то $B^T A = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если матрица A перестановочна с транспонированной A^T, то A симметричная

B если существует невырожденная матрица B, такая что $B^{-1}AB$ диагональная, то матрица A симметричная

C если существует скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$, такое что матрица A при этом скалярном произведении задает самосопряженный оператор, то A симметричная

D если существует невырожденная матрица B, такая что B^TAB диагональная, то A симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Даны две симметричные матрицы A и B порядка $n \geqslant 2$, причем матрица A является положительно определенной. Тогда

A если все собственные числа матрицы AB неотрицательные, то матрица B положительно полуопределена

B многочлен $\det(\lambda A + B)$ не имеет вещественных корней (через $\det X$ обозначается определитель матрицы X)

C если все элементы матрицы B неотрицательные, то матрица $A + B$ положительно определена

D если матрица $A + B$ положительно определена, то у матрицы B существует неотрицательный элемент

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функции $f(x)$, $g(x)$ заданы на всей числовой прямой и являются периодическими. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Функция $h(x) = f(x) + g(x)$ является периодической.

II. Функция $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ является ограниченной.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не являются постоянными, то на каждом конечном отрезке $[a, b]$ уравнение $f(x) + g(x) = 0$ имеет конечное число решений.

A только I

B только I и III

C только III

D I, II и III

E все утверждения I, II и III являются ложными

12. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, где $a < b$, и $x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A при любых a и b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является монотонной последовательностью

B существуют такие числа a, b, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится

C при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3a+4b}{7}$

D при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2a+3b}{5}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Предел $\lim\limits_{x\to 4}\left(3 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+4}}$ равен

A $1/\sqrt[6]{e}$

B $1/\sqrt[3]{e}$

C $1/\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, уменьшается со скоростью, пропорциональной площади треугольника. В момент времени $t = 0$ площадь треугольника равна 2, в момент времени $t = 1$ площадь треугольника равна 1/2. Площадь треугольника в момент времени $t = 3$ равна

A 1/4

B 1/6

C 1/8

D 1/10

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

15. Функция $f(x)$ задана на множестве $[0,+\infty)$, дифференцируема на $(0,+\infty)$, и ее график имеет наклонную асимптоту $y = a + bx$, $b \neq 0$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = B$, то $b = B$.

II. Существуют точки $0 < x_1 < x_2$, такие что $b = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

III. Если $f'(x) < b$ при любом $x > 0$, то существует такое число $N > 0$, что $f(x) <$ $< a + bx$ при любом $x > N$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

16. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[6]{n^6 + 6n^5} - \sqrt{n^2 + 2n}\right)$ равен

A 0

B -2

C -1

D 1

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Если $f(x)$ является четной функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является нечетной функцией.

II. Если $f(x)$ является периодической функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является периодической функцией.

III. Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ не существует первообразной на $\mathbf{R}$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

18. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x+x^2)}{e^x+e^{-x}-2}$ равен

A $-1/2$

B -1

C -2

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеет радиус сходимости R_2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ равен

A $\min\{R_1, R_2\}$

B $\max\{R_1, R_2\}$

C $\sqrt{R_1^2+R_2^2}$

D $\dfrac{R_1+R_2}{2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Пусть b — вещественное число. Последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ называется b-странной, если существует такое натуральное число N, что для любого $\varepsilon>0$ и для любого $n>N$ выполнено неравенство $|x_n-b|<\varepsilon$. Тогда

A существует такое число b, для которого не существует b-странных последовательностей

B существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность является неограниченной

C существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность имеет предел

D любая b-странная последовательность является монотонной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$ равен

A 1

B e

C $\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

22. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a + b}\right)^{1/x}$ равен

A $(a+b)^{ab}$

B $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$

C $\dfrac{ab}{a+b}$

D $(ab)^{1/(a+b)}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{5\,dx}{x^2 - x - 6}$ равен

A $\ln\dfrac{4}{9}$

B $\ln\dfrac{9}{4}$

C $5\ln\dfrac{9}{4}$

D $-5\ln\dfrac{9}{4}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

24. Интеграл $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\,dx}{x^2 - 2x + 2}$ равен

A $2\,\mathrm{arctg}(\pi + 1)$

B $2\ln\dfrac{1}{2}$

C $2(\mathrm{arctg}(\pi - 1) + \mathrm{arctg}(\pi + 1))$

D $2\cos\dfrac{9\pi}{16}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

25. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x \sin x}{x^2-3x+2}\,dx$ равен

A $\ln\frac{1}{2}$

B $3\ln\frac{1}{2}$

C $\pi/2-3$

D $3/2-\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

26. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (\cos^2 x+\cos x+1)\,dx$ равен

A 0

B $1+3\pi/4$

C $-1+\pi/4$

D $1-\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

27. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (2\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx$ равен

A $\pi/2$

B $1+3\pi/4$

C $3\pi/4$

D $1+\pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

28. Интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^7 x-1)\,dx$ равен

A $-\pi/2$

B $-\pi/4$

C $-\pi$

D $-\pi^7+1$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

29. Неопределенный интеграл $\int \frac{2x-1}{x^2-x-12}\,dx$ равен

A $\ln\left|x^2-x-12\right|+C$

B $\ln\left|\dfrac{x-4}{x+3}\right| + C$

C $\ln\left|\dfrac{x+4}{x-3}\right| + C$

D $\ln\left|\dfrac{x^2-x-12}{2x-1}\right| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

30. Значение максимального решения задачи Коши $y' = 5 - \dfrac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = 2$ в точке $x = 4$ равно

A $4/9$

B $79/8$

C $23/7$

D $17/9$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

31. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны при всех вещественных x. Тогда

A если $f(g(x))$ и $f(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $g(x)$ дифференцируема при всех x

B если $f(g(x))$ и $g(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

C если $f^2(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

D если $f(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f^2(x)$ дифференцируема при всех x

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает на нем значения между нулем и единицей. Тогда

A если $f(x)$ не возрастает, причем $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, то решение уравнения $f(x) = x$ существует и единственно

B если $f(x)$ непрерывна, строго возрастает на отрезке $[0, a]$, причем $f(0) > 0$ и $f(a) = 1$, и уравнение $f(x) = x$ имеет конечное число n решений на отрезке $[0, a]$, то n четно

C если уравнение $f(f(x)) = x$ имеет не более одного решения, то и уравнение $f(x) = x$ имеет не более одного решения

D если $f(f(x))$ непрерывна и не убывает, то и $f(x)$ не убывает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ на множестве $|x| + 2|y| = 2$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

34. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а производная $f'(x)$ существует и непрерывна на интервале $(0, 1)$, причем $f(0) = 0$. Тогда

A если функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

B если функция $f(x) \cdot f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

C если функция $f(x) \cdot f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

D если функция $\sqrt{f^2(x) + f'^2(x)}$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $y^6 - y^5 + x = 1$ в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$. Тогда ее производная в точке $x = 1$

A равна 0

B равна 1

C равна -1

D не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + 9}}$, $y(0) = 3$. Тогда значение $y(4)$

A равно 1

B равно 4

C равно 9

D равно $\ln 13$

E равно числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

37. Производная функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{2n}\right)^n$ в точке $x = 1$

A равна 1

B равна e

C равна $\sqrt{e}$

D равна $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

E равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Производная функции $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$ в точке $x = 0$

A равна 1

B равна 0

C равна $\ln(\pi/2)$

D равна $(\pi/2)^{\pi/2}$

E равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

39. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и принимает положительные значения на полупрямой $[0, +\infty)$ вместе со своей производной, причем $f(0) = e$ и для любого $x > 0$ выполнено неравенство $f'(x) < f(x)$. Тогда

A $f(1) < e$

B $f(e) < e^e$

C $f(2e) < e^8$

D $f(e^2) < e^{e^2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть $f(x) = x^2\sin(x^3)$ и M — множество ее критических точек (точек, в которых производная $f'(x) = 0$). Тогда

A множество M состоит из изолированных точек

B множество M компактно

C функция $f(x)$ достигает локального экстремума в каждой точке множества M

D функция $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3.1.2 Вторая часть теста

1. Пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму двух ненулевых подпространств L_1 и L_2 размерностей n_1 и n_2 соответственно. Матрица P задает оператор проектирования на L_1 параллельно L_2, матрица Q задает оператор проектирования на L_2 параллельно L_1. Квадратная матрица A размера $2n \times 2n$ определяется равенством

$$A = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где через I обозначается единичная матрица, а через 0 — нулевая. Обозначим через x, y столбцы длины n. Тогда

а) матрица A ортогональная;

Да Нет

б) матрица A задает оператор проектирования;

Да Нет

в) ранг матрицы A равен $2n_1$;

Да Нет

г) ранг матрицы A равен $2n_2$;

Да Нет

д) ранг матрицы A равен n;

Да Нет

е) если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

ж) если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

з) если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где $x \neq y$ и $x \neq -y$, является собственным вектором матрицы A, то $x-y$ является собственным вектором матрицы P или $x+y$ является собственным вектором матрицы Q.

Да Нет

2. Даны функция $f(x,y) = y - 4x^2 + 2x^4$ и множество $M = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

в) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

д) в точке $(0,1)$ функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

е) в точке $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) точка $(0,-1)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M.

Да Нет

3. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx}$, где α — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$. Тогда

а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является ограниченным;

Да Нет

в) существует α, для которого функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве M;

Да Нет

г) для любого α на множестве M ряд не сходится равномерно;

Да Нет

д) если $\alpha < 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) если $\alpha > 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) для любого α существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) существует α, для которого существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд не сходится равномерно.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \cos^3 t + f(t), \ \ x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр, а $f(t)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной прямой. Тогда

а) функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) если $f(t)$ ограничена на всей числовой прямой, то $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) если $f(t)$ периодическая с периодом 2π, то и $x(t)$ периодическая с периодом 2π;

Да Нет

г) если $f(\pi/2) = 0$, то и $x(\pi/2) = 0$;

Да Нет

д) если $x_0 = 1$ и $f(t) < 1$ при всех t, то $x(\pi) \leqslant \pi + 1$;

Да Нет

е) если $x_0 = 1$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(\pi) = e^{2/3}$;

Да Нет

ж) если $f(t) = e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$, то $x(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$;

Да Нет

з) если $x_0 = \sqrt{e}$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(t) \geqslant 1$ для всех $t > 0$.

Да Нет

5. Пусть $a > 0$ и $f(x) = \displaystyle\int_0^a t \cdot |t - x| dt$ при $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в одной точке;

Да Нет

б) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в двух точках;

Да Нет

в) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ возрастает на множестве $(1, +\infty)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, 0)$;

Да Нет

ж) точка $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

з) функция $f(x)$ является выпуклой функцией на $\mathbf{R}$.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. A. **2.** E. **3.** D. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** E. **8.** D. **9.** D. **10.** A. **11.** E. **12.** C. **13.** A. **14.** C. **15.** A. **16.** B. **17.** A. **18.** A. **19.** E. **20.** C. **21.** E. **22.** B. **23.** A. **24.** C. **25.** E. **26.** B. **27.** C. **28.** C. **29.** A. **30.** B. **31.** D. **32.** C. **33.** C. **34.** D. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** B. **39.** C. **40.** A.

3.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Так как $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму подпространств L_1 и L_2, то $P + Q = I$, откуда следует, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} P^2 & PI + IQ \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix} = A,$$

и матрица A задает оператор проектирования. Так как $A^T \neq A$, то $A \neq I$, следовательно, A не является ортогональной матрицей (только единичная матрица задает проектор и является ортогональной одновременно). Ответы на вопросы а) — нет, б) — да.

Так как матрица A является блочно-треугольной, то $\det(A - \lambda I) = \det(P - \lambda I)\det(Q - \lambda I)$. Поскольку число 0 является собственным числом матриц P (алгебраической кратности n_2) и Q (алгебраической кратности n_1), то оно является собственным числом матрицы A алгебраической кратности $n_1 + n_2 = n$. Так как алгебраическая кратность собственных чисел проектора совпадает с геометрической, то отсюда следует, что матрица A имеет ранг $2n - n = n$. Ответы на вопросы в) — нет, г) — нет, д) — да.

Если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $Px = x$ и $Qx = 0$. Отсюда

$$A \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + x \\ Qx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос е) — нет).

Если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $Qy = y$ и $Py = 0$. Отсюда

$$A\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Py + y \\ Qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос ж) — да).

Если

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + y \\ Qy \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то y является собственным вектором матрицы Q. При этом возможны два случая:

1. Пусть $Qy = 0$ (и $Py = y$). Тогда $\lambda = 0$ и $0 = Px + y = P(x + y)$, т. е. $x + y$ — собственный вектор матрицы P, а значит и матрицы Q.

2. Пусть $Qy = y$ (и $Py = 0$). Тогда $\lambda = 1$ и $Px + y = x = x + Py$, откуда $P(x - y) = x - y$.

Таким образом, ответ на вопрос з) — да.

Задача 2. Подставим выражение $x^2 = 1 - y^2$ из уравнения для множества M в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(y) = y - (1 - y^2) + 2(1 - y^2)^2 = 2y^4 + y - 2$. Так как множество M представляет собой окружность радиуса 1 с центром в нуле, то функцию $g(y)$ нужно исследовать на множестве $[-1, 1]$.

Производная $g'(y) = 8y^3 + 1$, откуда следует, что у уравнения $g'(y) = 0$ решение единственное ($y = -1/2 \in [-1, 1]$). Левее этой точки функция $g(x)$ убывает, правее — возрастает. Поэтому на множестве $[-1, 1]$ у функции $g(y)$ один локальный (он же глобальный) минимум $y = -1/2$ и два локальных максимума $y = -1$ и $y = 1$. Так как $g(-1) = -1$, а $g(1) = 1$, то последняя точка является и точкой глобального максимума. Заметим, что точке $y = -1/2$ соответствуют две точки исходного множества M ($x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$), а точкам $y = -1$ и $y = 1$ — по одной ($x = 0$, $y = -1$ и $x = 0$, $y = 1$).

Таким образом, функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в двух точках, а наибольшего — в одной (ответы на вопросы а) — нет, б) — да, в) — да, г — нет). Точка глобального максимума $x = 0$, $y = 1$ (ответ на вопрос д) — да). Точки $x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ — точки глобального минимума (ответы на вопросы е) — нет, ж) — да). Точка $x = 0$, $y = -1$ — действительно точка локального максимума (ответ на вопрос з) — да).

Задача 3. Точка $\alpha \in M$ и $f(\alpha) = 0$ (все члены ряда равны нулю). Если $x < \alpha$, то $x \notin M$ (четные члены ряда не определены).

Пусть $x > \max\{\alpha, 0\}$, тогда $(x - \alpha)^{1/n} \leqslant \max\{1, x - \alpha\}$, и исходный ряд (с положительными слагаемыми) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x - \alpha)^{1/n}e^{-nx}$ сходится, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\max\{1, x - \alpha\}\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Пусть $\alpha < x \leqslant 0$, тогда для всех n выполняется неравенство $(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \geqslant \geqslant \min\{x-\alpha, 1\}$ в котором правая часть не стремится к нулю, а значит ряд не сходится.

В итоге получаем $M = [\alpha, +\infty)$ при $\alpha \geqslant 0$ и $M = \alpha \cup (0, +\infty)$ при $\alpha < 0$, поэтому ответы на вопросы а) — нет, б) — нет.

При $\alpha > 0$ и $x \in M$

$$f(x) \leqslant e^{-\alpha}\frac{\max\{1, x-\alpha\}}{e^{x-\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} < \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}},$$

откуда следует, что $f(x)$ ограничена, и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом. Получаем ответы на вопросы в) — да, г) — нет, е) — да.

Для любого α при $x \in [a, b]$, где $\max\{\alpha, 0\} < a < b$, выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \leqslant \max\{1, b-\alpha\}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na},$$

и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом, ответ на вопрос ж) — да.

Если $\alpha < 0$ и $x \in (0, 1)$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty}(x-\alpha)^{1/n}e^{-nx} \geqslant \min\{(x-\alpha)^{1/m}, 1\}\sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} \geqslant$$
$$\geqslant \min\{(-\alpha)^{1/m}, 1\}\frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \to +\infty \quad \text{при } x \to 0 \text{ справа.}$$

Значит для любого m существует $x \in (0, 1)$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $(0, 1)$ не сходится равномерно, т. е. д) — нет.

Если $\alpha = 0$ и $x \in [0, 1]$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} x^{1/n}e^{-nx} \geqslant x^{1/m}\sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} = x^{1/m}\frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \sim \frac{1}{x^{1-1/m}}$$

при $x \to 0$ справа. Значит для любого $m > 1$ существует $x \in [0, 1]$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $[0, 1]$ не сходится равномерно, т. е. з) — да.

Задача 4. Найдем решение данного дифференциального уравнения. Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \cdot \cos^3 t$$

может быть легко проинтегрировано, его общим решением является функция $x(t) = C \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$. Решение исходного уравнения может быть найдено с помощью метода вариации постоянной: если подставить $x(t) = C(t) \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$ в исходное уравнение, то после упрощения получим

$$\frac{dC}{dt} \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3} = f(t),$$

откуда нетрудно вывести решение исходной задачи:

$$x(t) = \left[x_0 + \int_0^t f(\tau)e^{-\sin\tau+(\sin^3\tau)/3}d\tau\right] e^{\sin t-(\sin^3 t)/3}.$$

Из явного вида решения немедленно следуют ответы на вопросы: а) — да, б) — нет, в) — нет, г) — нет, д) — да (подынтегральное выражение может быть оценено сверху величиной $e^{-\sin\tau+(\sin^3\tau)/3}$, которая на отрезке $[0,\pi]$ не превосходит единицу), е) — нет (на самом деле тогда $x(\pi) = 1$), ж) — нет (у указанной величины нет предела при $t \to +\infty$), з) — нет (например, $x(3\pi/2) = e^{-1/6}$).

Задача 5. Рассмотрим три случая:

1. Пусть $x \leqslant 0$. Тогда $|t-x| = t-x$ при $t \in [0,a]$ и $f(x) = \int_0^a t(t-x)dt = \frac{a^3}{3} - \frac{a^2x}{2}$.
2. Пусть $0 < x \leqslant a$. Тогда $f(x) = \int_0^x t(x-t)dt + \int_x^a t(t-x)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^2x}{2} + \frac{a^3}{3}$.
3. Пусть $x > a$. Тогда $f(x) = \int_0^a t(x-t)dt = \frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{3}$.

Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и $f'(x) = -a^2/2$ при $x < 0$, $f'(x) = x^2 - a^2/2$ при $0 < x < a$, $f'(x) = a^2/2$ при $x > a$. В точках $x = 0$, $x = a$ производные слева и справа совпадают, значит, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой. Ответы на вопросы а), б) нет.

Из пунктов 1 и 3 следует, что при $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ является линейной, поэтому ответ на вопрос в) да.

Функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, a/\sqrt{2})$ и возрастает на множестве $(a/\sqrt{2}, +\infty)$. Значит, в точке $x = a/\sqrt{2}$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения. Кроме того, например, при $a = 1$ функция $f(x)$ возрастает на $(1, +\infty)$. Таким образом, ответы на вопросы г), д), е) да, на вопрос ж) нет.

Поскольку $f''(x) = 2x > 0$ при $0 < x < a$, то на интервале $(0, a)$ функция $f(x)$ является выпуклой. При $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ линейна, и графики этих линейных частей являются касательными, проведенными к графику функции $f(x)$ в точках с абсциссами $x = 0$, $x = a$. Поэтому график функции $f(x)$ лежит не ниже любой касательной, проведенной к этому графику. Значит, $f(x)$ является выпуклой функцией. Ответ на вопрос з) да.

4 Вступительный экзамен 2013 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Пусть M — счетное множество на числовой прямой, $P = \mathbf{R} \setminus M$ — дополнение множества M. Тогда

A у множества P существует внутренняя точка

B у множества P существует внешняя точка

C у множества P существует изолированная точка

D у множества P существует граничная точка

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Неопределенный интеграл $\int \frac{x^4}{1-x^4}dx$ равен

A $\quad -x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

B $\quad -x - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

C $\quad -x + \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arctg} x^2 + C$

D $\quad -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

3. Пусть M — подмножество числовой прямой и P — множество его изолированных точек. Тогда

A множество P непустое

B множество P открытое

C множество P замкнутое

D множество P ограниченное

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Для подмножества M числовой прямой обозначим через ∂M множество его граничных точек, а через $\overline{M}$ — его замыкание. Тогда

A $\quad \partial(M \cup N) = \partial M \cup \partial N$

B $\quad \overline{M \cap N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

C если множество M не содержит изолированных точек, то ∂M совпадает с множеством предельных точек множества M

D $\quad M = \overline{M} \setminus \partial M$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Неопределенный интеграл $\int \frac{x^4}{x+1}\,dx$ равен

A $\quad -\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + C$

B $\quad \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$

C $\quad \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| + C$

D $\quad \frac{(x+1)^4}{4} - x + \ln|x+1| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

6. Пусть A, B — ограниченные подмножества числовой прямой, $A + B = \{x + y, x \in A, y \in B\}$, $A - B = \{x - y, x \in A, y \in B\}$, $A \cdot B = \{x \cdot y, x \in A, y \in B\}$. Тогда

A $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$

B $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$

C $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$

D $\sup(A + B) = \sup A + \inf B$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана рекуррентно:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n},\ n = 1, 2, \ldots,$$

где $a \geqslant 0$. Тогда

A при любом $a \geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ строго возрастает

B существует такое $a \geqslant 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ не ограничена

C существуют такие числа a_1, $a_2 \geqslant 0$, что соответствующие последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходятся к разным пределам

D при любом $a \geqslant 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет предел

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^n$. Обозначим через M множество его сходимости и через $S(x)$, $x \in M$, его сумму. Тогда

A множество M замкнутое

B множество M ограниченное

C функция $S(x)$ является неограниченной функцией

D интервал $(4, 5) \subset M$ и на $(4, 5)$ ряд сходится равномерно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Даны функция двух переменных $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 2\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке

B функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке

C точка $(1,1)$ есть точка локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M

D точка $(0,-\sqrt{2})$ есть точка локального минимума функции $f(x,y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{1/(x^3-8)}$ равен

A $\dfrac{1}{\sqrt[24]{e}}$

B $\sqrt[24]{e}$

C $\dfrac{1}{\sqrt[12]{e}}$

D $\sqrt[6]{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

11. Концы стержня AB, длина которого равна 5 м, закреплены на двух взаимно перпендикулярных направляющих и могут скользить по ним. Пусть O — точка пересечения направляющих. Точка A движется от точки O с постоянной скоростью 1 м/с. Чему равно абсолютное значение скорости точки B в момент времени, когда длина отрезка AO равна 3 м?

A 0.50 м/с

B 0.75 м/с

C 1.00 м/с

D 1.25 м/с

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

12. Предел $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{2x}(\sin t)^t dt$ равен

A 1

B 2

C 3

D 4

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

13. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt[7]{n^7+7n^6}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ равен

A -1

B $-5/2$

C -4

D -5

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. $\sup\limits_{|x|\leqslant 1}\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg} x^n$ равен

A $-\pi/4$

B $\pi/4$

C 1

D $\pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

15. Область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^n-x^{4n}\right)\sin(xn)$ равна

A $(-1,1)$

B $[-1,1)$

C $(-1,1]$

D $[-1,1]$

E множеству, отличному от перечисленных в A, B, C, D

16. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Тогда

A последовательность $\{(-1)^n|a_n|\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

B последовательность $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

C последовательность $\{\sqrt{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

D последовательность $\{a_n+k(n-k)a_{n-k}\}_{n=k+1}^{\infty}$ сходится при некотором натуральном k

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\left(1+x/2+x^2/4\right)}{x^2}$ равен

A $-1/4$

B $\quad 1/4$

C $\quad -1/8$

D $\quad 1/8$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

18. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{2n+3k}{n}\right)^2$ равен

A $\quad 0$

B $\quad 30$

C $\quad 39$

D $\quad 62$

E $\quad$ числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, не постоянная и четная, а функция $g(x)$ определена на всех числовой оси, не постоянная и периодическая. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существуют функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что функция $f(x)g(x)$ периодическая.

II. Функция $f(x) + xg(x)$ не периодическая.

III. Функция $f(x) + g(x) + x$ не является четной.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только I и II

C $\quad$ только I и III

D $\quad$ только II и III

E $\quad$ I, II и III

20. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0,1]$, не убывает и принимает на нем значения между нулем и единицей. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Решения уравнения $f(x) = x$ существуют, и их конечное число.

II. Если $f(1) = 1$, то у уравнения $f(x) = x$ существует не менее двух решений.

III. Если $f(f(x))$ непрерывна, то и $f(x)$ непрерывна.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E все утверждения I, II, III ложные

21. Пусть функция двух переменных задана следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} a + 2x^2 - b(y - c), & \text{если } x^2 > 2 + x \text{ и } y < 6, \\ 3 + cx - y, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция является непрерывной на всей плоскости, если

A $a = 3,\ b = 1,\ c = 2$

B $a = 3,\ b = 0,\ c = 2$

C $a = 2,\ b = 0,\ c = 1$

D $a = -3,\ b = 1,\ c = 2$

E таких значений параметров не существует

22. Пусть $f(x) = -\exp\left(-\frac{a}{x}\right) + 1 - \frac{a}{x}$, где $a > 0$. Тогда

A функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$

B функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $a > 1$, и только при таких значениях параметра a

C функция $f(x)$ отрицательна при всех $x > 0$, если $0 < a \leqslant 1$, и только при таких значениях параметра a

D функция $f(x)$ положительна при всех $x > 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть функция $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. У функции $f(x)$ существует первообразная, являющаяся всюду непрерывной функцией.

II. Существует функция $f(x)$, у которой в точке разрыва существует производная.

III. Множество значений функции $f(x)$ является выпуклым множеством.

A только I

B только II

C только III

D только I и III

E все утверждения I, II, III ложные

24. Функции $f(x), g(x)$ определены и непрерывны на числовой прямой $\mathbf{R}$, и не равны тождественно нулю. Пусть точка $x_0 \in \mathbf{R}$. Тогда

A если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, а у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

B если у функции $f(x)$ не существует производной в точке x_0, и у функции $g(x)$ не существует производной в точке x_0, то у функции $f(x)g(x)$ не существует производной в x_0

C если у функции $f(x)$ существует производная в точке x_0, то у функции $f(x)$ существует производная в некоторой окрестности точки x_0

D если у функций $f(x)$, $g(x)$ существуют производные в точке x_0, то у функции $f(g(x))$ существует производная в точке x_0

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть функция $f(x)$ определена на всей вещественной прямой и обладает свойством: $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^{\alpha}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если $\alpha > 1$, то функция $f(x)$ постоянная.

II. Если $\alpha = 1$, то функция $f(x)$ дифференцируемая.

III. Если $0 < \alpha < 1$, то функция $f(x)$ непрерывная.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

26. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $x^2 + xy - y^2 = x$ в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$. Тогда ее производная в точке $x = 1$

A $\quad$ равна -1

B $\quad$ равна 0

C $\quad$ равна 1

D $\quad$ не существует

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = y^2x^3$, $y(0) = 8$. Тогда значение $y(1)$ равно

A $\quad$ $1/8$

B $\quad$ $8/3$

C $\quad$ 8

D $\quad$ -8

E $\quad$ другому числу или не существует

28. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{\cos x}$, $y(0) = 2$ на своей области определения

A $\quad$ не имеет нулей

B $\quad$ имеет ровно один ноль

C $\quad$ имеет ровно два нуля

D $\quad$ имеет ровно четыре нуля

E $\quad$ имеет более четырех нулей

29. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-1, 1)$ и дважды дифференцируема в каждой точке $(-1, 1)$. Тогда

A $\quad$ если функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на $(-1, 1)$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет не менее двух решений

B $\quad$ если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) < 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

C $\quad$ если существует точка $x^* \in (-1, 1)$ такая, что $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) > 0$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения

D $\quad$ если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, то функция $f(x)$ достигает либо наибольшего, либо наименьшего значения

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Функция $f(x, y) = \sin(\pi xy)$ на множестве $\{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наибольшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D достигает наибольшего значения в восьми точках

E не достигает наибольшего значения

31. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $f(x)$ принимает не менее двух значений. Тогда

A множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть открытым

B множество точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего значения, не может быть замкнутым

C если множества точек, в которых $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения, оба конечны, то количества элементов в них различаются не более чем на 1

D если $f(0) = f(1)$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего и наименьшего значения на интервале $(0, 1)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x, y)$ определена в окрестности точки $(0, 0)$. Тогда

A если для любого t функция $g(x) = f(x, tx)$ непрерывна в точке $x = 0$, то функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

B если для любого t функция $g(x) = f(x, tx)$ дифференцируема в точке $x = 0$, то функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$

C если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, то функция $h(x, y) = xyf(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$

D если функция $u(x, y) = \sin f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$, то и функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Дана система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что вектор x_{m+1} линейно выражается через $x_1, \ldots, x_m$. Через $\mathscr{L}(z_1, \ldots, z_k)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{z_1, \ldots, z_k\}$, а через $\dim \mathscr{L}(z_1, \ldots, z_k)$ — ее размерность. Тогда

A система $\{x_1, \ldots, x_m\}$ линейно зависимая

B $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = m$

C $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_{m+1}) = m$

D если система $\{x_1, \ldots, x_{m+1}\}$ линейно независимая, то $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_{m+1}) \leqslant \leqslant m$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

34. Пусть L_1 — множество решений системы $Ax = 0$, L_2 — множество решений системы $Bx = 0$, где A и B — матрицы размера $m \times n$ (m, $n \geqslant 2$), а x — неизвестный столбец подходящей длины. Тогда

A $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $A^T Bx = 0$ (через A^T обозначается матрица, транспонированная к A)

B $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$

C $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} x = 0$

D $L_1 \cap L_2$ — множество решений системы $(A + B)x = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначим определитель матрицы X. Тогда

A если $\det(AB) = \det(BA)$, то $AB = BA$

B если $A^2 = B^2$, то $A = B$ или $A = -B$

C если $(A - B)^2 = 0$, то $A = B$

D если $\det A = \det B \neq 0$, то матрица AB^{-1} ортогональная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Дан *нильпотентный* линейный оператор $\mathbf{A}$, действующий из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$ (т. е. $\mathbf{A}^m = 0$ для некоторого $m \geqslant 1$). Через $\operatorname{Ker} \mathbf{X}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A} > 0$

B если $\mathbf{A} \neq 0$, то $\dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}^2 > \dim \operatorname{Ker} \mathbf{A}$

C $\mathbf{A}^n = 0$

D пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в сумму подпространств $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{A}$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

37. Число инвариантных подпространств матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

равно

A 1

B 2

C 3

D 4

E бесконечно много

38. Пусть A — симметричная матрица третьего порядка, а x — неизвестный столбец длины 3. Тогда

A если множество $\{x\colon x^{\mathsf T}Ax = a\}$ неограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A знакопеременная (не является ни положительно, ни отрицательно полуопределенной)

B если множество $\{x\colon x^{\mathsf T}Ax = a\}$ ограничено при всех $a \in \mathbf{R}$, то матрица A положительно определенная

C если множество $\{x\colon x^{\mathsf T}Ax = a\}$ при всех $a \geqslant 0$ содержит в себе прямую, то матрица A положительно полуопределенная

D уравнение $x^{\mathsf T}Ax = a$ имеет решение при всех $a \in \mathbf{R}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A^2 = I$, где I — единичная матрица. Пусть $L_1 = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = x\}$ и $L_{-1} = \{x \in \mathbf{R}^n\colon Ax = -x\}$. Тогда

A Числа 1 и -1 оба являются собственными числами матрицы A

B подпространства L_1 и L_{-1} ортогональны друг другу при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$

C пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму L_1 и L_{-1}

D матрица A симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть P и Q — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, задающие проекторы на одно и то же подпространство $L \subset \mathbf{R}^n$. Через $\operatorname{Ker} X$ и $\operatorname{Im} X$ обозначим ядро и образ оператора, заданного матрицей X, соответственно. Найдите ***ложное*** утверждение

A $PQ = Q$

B $QP = P$

C $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$

D $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} Q$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

4.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть $f(x) = \int_{4x}^{x^2+3} e^{-t^2}dt$, где $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) при всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$;

Да Нет

б) уравнение $f(x) = 0$ имеет четное число корней;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) функция $f(x)$ имеет локальный минимум, который принадлежит интервалу $(1, 3)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ не убывает на множестве $[3, +\infty)$;

Да Нет

ж) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту с ненулевым углом наклона;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

Да Нет

2. Для семейства функций $f(x) = |x|^\gamma$, $\gamma \in \mathbf{R}$, рассмотрим предел

$$\lim_{\mu\to 0}\left\{\lim_{\nu\to 0}\frac{f(\mu+\nu+x)-f(\mu+x)-f(\nu+x)+f(x)}{\mu\nu}\right\}.$$

Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество, где он существует и конечен, и через $g(x)$ — его значение для $x \in M$. Тогда

а) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv 0$ на M;

Да Нет

б) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) \equiv \gamma$ на M;

Да Нет

в) если $g(x) \not\equiv \gamma$ на M, то число решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четное;

Да Нет

г) существуют более одного значения γ, при которых $g(x) > 0$ на M;

Да Нет

д) существуют более одного значения γ, при которых $g(x)$ не ограничена на M;

Да Нет

е) существуют более одного значения γ, при которых $M = \mathbf{R}$;

Да Нет

ж) существуют более одного значения γ, при которых $M \neq \mathbf{R}$;

Да Нет

з) если $\gamma = 2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, то $g(x)$ не равно 0 ни в одной точке M.

Да Нет

3. Даны функция $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2|x|y^3$ и множество $M = \{(x,y)\colon |x| + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке $\left(1/2, 1/\sqrt{2}\right)$;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в точке $(16/25, -3/5)$;

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

е) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

ж) точка $(0, -1)$ является точкой локального минимума функцим $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{\sqrt{16 - t^2}}, \quad x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр. Тогда

а) существует x_0 такое, что функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) при любом x_0 функция $x(t)$ определена в точке $t = 3$;

Да Нет

в) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) при любом $x_0 \neq 0$ функция $x(t)$ монотонно возрастает на своей области определения;

Да Нет

д) для любого $\tau > 0$ существует $x_0 > 0$ такое, что $x(t)$ не определена в точке τ;

Да Нет

е) если $x_0 > 1$ и $x(t)$ определена в точке $t = 2$, то $x(2) > 2$;

Да Нет

ж) существует $x_0 \neq 0$ такое, что функция $x(t) - x_0$ является нечетной;

Да Нет

з) если $x_0 < 1$, то $x(t)$ определена в точке $t = 7/2$.

Да Нет

5. Три вектора

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ 1+\alpha \end{pmatrix},$$

являются собственными векторами симметричной матрицы A третьего порядка. Известно, что

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+5\alpha \\ 1+2\alpha \\ 2-5\alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда

а) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

б) при $\alpha = 1$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ матрица A является ортогональной матрицей;

Да Нет

г) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

д) при $\alpha = 0$ матрица A является матрицей проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

е) при $\alpha = -1$ существует бесконечно много матриц A;

Да Нет

ж) при $\alpha = -1$ существует единственная матрица A;

Да Нет

з) при $\alpha = -1$ не существует матрицы A.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** A. **3.** E. **4.** E. **5.** B. **6.** C. **7.** D. **8.** C. **9.** C. **10.** A. **11.** B. **12.** B. **13.** D. **14.** B. **15.** E. **16.** C. **17.** D. **18.** C. **19.** C. **20.** E. **21.** E. **22.** A. **23.** E. **24.** E. **25.** C. **26.** A. **27.** E. **28.** A. **29.** A. **30.** B. **31.** A. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** E. **36.** D. **37.** B. **38.** A. **39.** C. **40.** D.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Для начала заметим, что подынтегральная функция положительная и непрерывная на всем $\mathbf{R}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff x^2+3 > 4x \iff x \notin [1,3],\\ f(x) = 0 &\iff x^2+3 = 4x \iff x \in \{1,3\},\\ f(x) < 0 &\iff x^2+3 < 4x \iff x \in (1,3). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x) = 0$ в двух точках $x = 1$ и $x = 3$, вопрос б) — да. При $x \in (1,3)$ функция $f(x) < 0$, поэтому вопрос а) — нет.

Так как $f(x) \leqslant 0 \iff x \in [1,3]$ и функция $f(x)$ непрерывна, то она достигает наименьшего значения на $[1,3]$, и это значение является наименьшим значением на всем $\mathbf{R}$ (вопрос г) — да). Достигается оно внутри отрезка (где значения функции отрицательные), и так как глобальный минимум является локальным, то д) — да.

Теперь заметим, что если $x > 0$, то $f(-x) > f(x)$ (поскольку подынтегральная функция положительная и $[4(-x), 3(-x)^2+3] \supset [4x, 3x^2+3]$). Поэтому при $x > 0$ наибольшее значение достигаться не может. Если же $x \leqslant 0$, то

$$f'(x) = 2xe^{-(x^2+3)^2} - 4e^{-(4x)^2} < 0,$$

что означает, что $f(x)$ убывающая, и локальных, а значит и глобальных максимумов при $x \leqslant 0$ у нее нет. Поэтому вопрос в) — нет.

Далее, поскольку подынтегральная функция e^{-t^2} очень быстро стремится к нулю при $t \to \pm\infty$, то $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ (так как оба предела интегрирования стремятся к $+\infty$) и $f(x) \to A > 0$ при $x \to -\infty$ (здесь нижний предел стремится к $-\infty$, а верхний — к $+\infty$). Поэтому у функции $f(x)$ есть две горизонтальные асимптоты и нет наклонных (вопросы ж) — нет, з) — да).

Если же предположить, что $f(x)$ не убывает на $[3, +\infty)$, то так как при $x > 3$ функция $f(x) > 0$, то и предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$ (предел неубывающей ограниченной функции). Это вступает в противоречие с тем, что предел на самом деле равен нулю (вопрос е) — нет).

Задача 2. Заметим, что предел в условии задачи является определением второй производной, соответственно, множество M — множество тех $x \in \mathbf{R}$, для которых существует $f''(x)$. Для заданной функции $f(x)$ вторая производная равна $g(x) = f''(x) = \gamma(\gamma-1)|x|^{\gamma-2}$ при $x \in M$.

При $\gamma \in \{0, 1\}$, $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому а) — да.

При $\gamma = 0$, $g(x) \equiv 0$ на $M = \mathbf{R}\setminus\{0\}$, при $\gamma = 2$, $g(x) \equiv 2$ на $M = \mathbf{R}$. Поэтому б) — да.

При всех $\gamma \geqslant 2$ вторая производная существует на всей прямой, то есть $M = R$. Поэтому е) — да.

При всех $\gamma \leqslant 0$ сама функция $f(x)$, а значит и ее вторая производная не существует в нуле, поэтому $M \neq \mathbf{R}$ и ж) — да.

Заметим, что при $\gamma \notin \{0, 1\}$ функция $g(x)$ может равняться нулю только в точке $x = 0$. Поэтому при всех $\gamma < 0$ и $x \in M$ $g(x) > 0$, а значит г) — да.

При всех $\gamma > 2$ вторая производная существует на всей прямой и не ограничена. Поэтому д) — да.

Если $\gamma = 1$, то $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому з) — нет.

Наконец заметим, что $g(x)$ — четная функция, поэтому количество ненулевых решений уравнения $g(x) = \gamma$ на M четно. Нулевое решение могло бы быть возможно только при $\gamma = g(0) = 0$, однако тогда $M = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ и $g(x) \equiv 0$ на M, поэтому в) — да.

Задача 3. Выразим $|x| = 1 - y^2$ из определения множества M и подставим в функцию $f(x, y)$:

$$g(y) = (1-y^2)^2 + 2y^2 + 2(1-y^2)y^3 = -2y^5 + y^4 + 2y^3 + 1,$$

где $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Исследуем функцию $g(y)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Возьмём производную и посмотрим, в каких точках $g'(y)$ обращается в ноль:

$$g'(y) = -10y^4 + 4y^3 + 6y^2 = 2y^2(3 + 2y - 5y^2) = 2y^2(1-y)(3+5y).$$

Это означает, что точки, которые могут быть экстремумами функции $f(x, y)$ — это $y = 0, x = \pm 1$, $y = 1, x = 0$ и $y = -3/5, x = \pm 16/25$. Также возможно, что существует экстремум на границе области определения $[-1, 1]$ функции $g(y)$, то есть в точке $y = -1, x = 0$ для функции $f(x, y)$.

Вторая и третья производные функции $g(y)$ равны

$$g''(y) = -40y^3 + 12y^2 + 12y = 4y(3 + 3y - 10y^2),$$
$$g'''(y) = -120y^2 + 24y + 12 = 12(1 + 2y - 10y^2).$$

Найдем знаки второй производной функции $g(y)$ в точках экстремума, знак третьей производной в точке $(1, 0)$, а также значения функции $g(y)$ в этих точках:

$$g''(0) = 0,\ g'''(0) > 0,\ g''\left(-\frac{3}{5}\right) > 0,\ g''(1) < 0,\ g''(-1) > 0,$$
$$g(0) = 1,\ g\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{2666}{3125} \approx 0.853,\ g(1) = 2,\ g(-1) = 2.$$

Следовательно, точки $y = 0, x = \pm 1$ являются точками локального минимума функции $f(x, y)$, точки $y = \pm 1, x = 0$ являются точками локального и глобального максимума функции $f(x, y)$, точки $y = -3/5, x = \pm 16/25$ являются точками локального и глобального минимума функции $f(x, y)$. Отсюда следуют ответы на вопросы задачи: а) нет, б) нет, в) да, г) да, д) да, е) нет, ж) нет, з) нет.

Задача 4. Правая часть дифференциального уравнения не определена при $t \geqslant 4$, так что никакое решение задачи Коши не может быть определено при всех t (ответ на вопрос а) — нет).

Найдем решение данной задачи Коши. Поскольку переменные разделяются, имеем

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{\sqrt{16 - t^2}},$$

откуда

$$-\frac{1}{x} + C = \arcsin\frac{t}{4},$$

так что

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 - \arcsin(t/4)}.$$

Видно, что при $x_0 > 1/\arcsin(3/4)$ знаменатель обращается в ноль при подходящем $t < 3$ (ответ на вопрос б) — нет). Напротив, при малых x_0 (меньших $2/\pi$) знаменатель положителен и отделен от нуля при всех $t < 4$, так что решение ограничено (ответ на вопрос в) — да). Положительный ответ на вопрос г) следует из явного вида решения задачи Коши. Ответ на вопрос д) — да (достаточно выбрать $x_0 = 1/\arcsin(\tau/4)$). Далее, для того, чтобы было определено $x(2)$, требуется $x_0 < 2/\pi < 1$ и значит посылка в утверждении е) никогда не выполнена, таким образом, ответ на вопрос е) — да. Из явного вида функции $x(t)$ имеем

$$x(t) - x(0) = \frac{x_0^2 \arcsin(t/4)}{1 - x_0 \arcsin(t/4)},$$

так что ответ на вопрос ж) — нет. Наконец, нетрудно видеть, что при $x_0 = 3/\pi < 1$ решение задачи Коши существует только при $t < 2\sqrt{3} < 7/2$, так что ответ на вопрос з) — нет.

Задача 5. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Заметим, что все три вектора попарно ортогональны, поэтому они образуют базис и могут соответствовать разным собственным числам матрицы A. Обозначим эти собственные числа через λ_1, λ_2 и λ_3 соответственно. Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3.

Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$. Следовательно,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = Ax_1 + Ax_2 + Ax_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, откуда следует, что матрица A ортогональная (вопросы а) нет, б) нет, в) да).

Пусть $\alpha = 0$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что в этом случае векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3x_1 + x_2 + 3x_3$. Следовательно,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3Ax_1 + Ax_2 + 3Ax_3 = 3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 3\lambda_1 x_3 =$$

$$= 3\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, откуда следует, что матрица A задает проектор на одномерное подпространство, порожденное вектором x_2 (вопросы г) да, д) нет).

Пусть $\alpha = -1$. Тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогично случаю $\alpha = 0$ векторы образуют базис, и вектор x_2 ортогонален x_1 и x_3, но x_1 и x_3 между собой не ортогональны. Поэтому векторы x_1 и x_3 соответствуют одному собственному числу (обозначим его через λ_1), а на собственное число, которому соответствует x_2, ограничений нет (обозначим его через λ_2). Разложим вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ по базису x_1, x_2, x_3. Получим $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -3x_1 + x_2 - 3x_3$. Следовательно,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -3Ax_1 + Ax_2 - 3Ax_3 = -3\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 3\lambda_1 x_3 =$$

$$= -3\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что эта система не имеет решений (вопросы е) нет, ж) нет, з) да).

5 Формат вступительного экзамена 2014 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей.

   Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 2 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет». Число вопросов в пределах каждого блока может быть различным.

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 2 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780—819 баллов	11
750—779 баллов	10
720—749 баллов	9
680—719 баллов	8
640—679 баллов	7
600—639 баллов	6
560—599 баллов	5
520—559 баллов	4
480—519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской экономической школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей;
* подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Курс 100 ак. часов: февраль—июль 2014 г. Начало занятий — 19 февраля.** Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда с 18:30, 3 ак. часа лекция, и пятница с 18:30, 2 ак. часа семинар).
* **Курс 72 ак. часа: апрель—июнь 2014 г. Начало занятий — 17 апреля.** В интенсивном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы. Занятия 2 раза в неделю (вторник и четверг, 18:30 по 3 ак. часа).

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. (495) 779-1401, email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись курсов по математике 50 ак. часов. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Календарь абитуриента 2014 г.

8.1 Дни открытых дверей

13 февраля 2014 г. (четверг), 18:30

6 апреля 2014 г. (воскресенье), 11:00

8.2 Заполнение анкеты с приложениями online

с 1 июня по 15 июля 2014 г.

8.3 Вступительные экзамены

с 21 по 23 июля 2014 г.

8.4 Прием документов для прошедших по конкурсу

до 8 августа 2014 г.

9 Приемная комиссия РЭШ

Телефон: +7-495-779-1401, +7-495-956-9508 доб. 103, 143.

Email: abitur@nes.ru.

Web: http://www.nes.ru.

Адрес: 117418, Москва, Нахимовский проспект, 47 (здание ЦЭМИ РАН), 19 этаж, офис 1919, проезд до ст. метро «Профсоюзная».