Современная экономическая наука и образование в России

Российская экономическая школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ НА ПРОГРАММУ «МАГИСТР ЭКОНОМИКИ» В РЭШ В 2013 ГОДУ

Москва 2013

Бремзен А. С., Головань С. В., Катышев П. К., Савватеев А. В., Хейфец И. Л.

Пособие по математике для поступающих на программу «Магистр экономики» в Российскую экономическую школу в 2013 году. — М., 2013 — 83 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ и дополняет справочник для поступающих в РЭШ в 2013 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене и дополняет справочник для поступающих в РЭШ.

Содержание экзамена в течение ряда лет оставалось неизменным, хотя формы экзамена менялись.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена. Требования, предъявляемые на вступительных экзаменах, содержатся в справочнике для поступающих в РЭШ.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2010—2012 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

   Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. **Предел последовательности**

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. **Предел функции. Непрерывность функций (отображений)**

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. **Числовые функции одного (числового) аргумента**

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. **Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$**

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. **Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbf{R}^n$)**

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$

Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. Определенный интеграл

Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. Числовые и функциональные ряды

Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. Степенные ряды

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**
    Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1958—87.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1989.

6. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

7. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Наука, 1982.

8. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

9. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

10. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

   Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

   Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

   Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

   Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

   Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

   Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. **Определитель матрицы**

   Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. **Линейные операторы**

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. **Евклидовы пространства**

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.* М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1974.

5. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.

6. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., Наука, 1970.

7. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.

8. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1984.

9. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.

10. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., Наука, 1963.

11. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

12. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., Наука, 1980.

13. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа.* (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

14. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства.* М., Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2010 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

- правильный ответ — «+1»
- неправильный ответ — «-0.25»
- отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- правильный ответ — «+1»
- неправильный ответ — «-1»
- отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Дана функция двух переменных $f(x,y) = x^2 + y^2$ и множество $M = \{(x,y)\colon \sqrt{|x|} + 2\sqrt{|y|} = 2\}$. Тогда

A функция $f(x,y)$ не ограничена на множестве M

B число локальных минимумов функции $f(x,y)$ на множестве M не больше трех

C число локальных максимумов функции $f(x,y)$ на множестве M не меньше трех

D в точке $(1, 1/4)$ функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Непустое множество $M \subset \mathbf{R}$ замкнуто, и множество его внутренних точек пусто. Тогда

A множество M конечно или счетно

B множество M ограничено

C все точки множества M являются изолированными точками

D все точки множества M являются его граничными точками

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n}$. Обозначим через M его множество сходимости. Тогда

A множество M неограниченное

B множество M замкнутое

C на множестве M ряд сходится равномерно

D отрезок $[0.1, 0.5]$ содержится в M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Предел $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right)$

A равен 0

B равен 1

C равен 2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

5. Дана функциональная последовательность $\{f_n(x) = ne^{-n|x|}, x \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \ldots\}$. Обозначим через M множество ее сходимости и через $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ при $x \in M$. Тогда

A интервал $(0, 1) \in M$, существует $\int_0^1 f(x)dx$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

B отрезок $[1, 5] \in M$, и последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится равномерно к $f(x)$ на $[1, 5]$

C $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (x^3 + 2) f_n(x)dx = 3$

D функция $f(x)$ является неограниченной на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \dfrac{y^2}{x}$, $y(1) = 1/2$. Найдите ***ложное*** утверждение:

A функция $y(x)$ является неограниченной

B $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$

C $\lim\limits_{x \to 0+0} y(x) = 0$

D функция $y(x)$ является возрастающей

E среди утверждений A, B, C, D есть хотя бы одно ложное

7. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ определяется рекуррентно $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Тогда

A предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ существует при любом $x_1 \geqslant 0$ и не зависит от x_1

B существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является неограниченной

C при любом $x_1 > 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является монотонной

D существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет два различных частичных предела

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-x\sqrt{n}}$. Обозначим через M множество его сходимости и через $S(x)$ — сумму этого ряда при $x \in M$. Тогда

A M — ограниченное множество

B функция $S(x)$ ограничена на M

C на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно

D функция $S(x)$ непрерывна на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. На координатной плоскости даны две окружности $x^2 + y^2 = 1$ и $\left(x - 10\sqrt{2}\right)^2 + \left(y - 10\sqrt{2}\right)^2 = 1$. В момент $t = 0$ радиус каждой окружности начинает увеличиваться со скоростью, пропорциональной ее радиусу. Через одну секунду радиус первой окружности удваивается, а радиус второй окружности увеличивается в четыре раза. Касание окружностей произойдет в момент времени

A $t = 2$ секунды

B $t = 3$ секунды

C $t = \ln 10$ секунд

D $t = \ln 12$ секунд

E t, отличный от перечисленных в A, B, C, D

10. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0, +\infty)$ функция и $a > 0$. Тогда интеграл $\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx$

A равен $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{a^3} x^2 f(x)\,dx$

B равен $2\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} x f(x^2)\,dx$

C равен $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{a^2} x f(x)\,dx$

D равен $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{a}} x f\left(\sqrt{x}\right)dx$

E не совпадает ни с одним из выражений в A, B, C, D

11. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$

A равен 0

B равен 1

C равен 1/2

D равен числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

12. Функция $f(x)$ определена на вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A если $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

B если $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на $\mathbf{R}$, и это устранимый разрыв, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

C если $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на $\mathbf{R}$, и это разрыв первого рода, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

D если $f(x)$ имеет единственную точку разрыва на $\mathbf{R}$, и это разрыв второго рода, то ее график замкнут в $\mathbf{R}^2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Дано множество $A \subset \mathbf{R}^2$. Обозначим через $X(A) = \{x \in \mathbf{R} \colon \exists y \in \mathbf{R} \colon (x, y) \in A\}$ проекцию множества A на ось Ox. Тогда

A если множество A замкнутое, то множество $X(A)$ тоже замкнутое

B если множество $X(A)$ замкнутое, то множество A тоже замкнутое

C если множество A открытое, то множество $X(A)$ тоже открытое

D если множество $X(A)$ открытое, то множество A тоже открытое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на $(0, 1)$, и $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x \in (0, 1), y = f(x)\}$ — ее график. Тогда

A Γ — ограниченное множество

B Γ — неограниченное множество

C Γ — открытое множество

D Γ — замкнутое множество

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и интегрируема по Риману на $[a, b]$. Обозначим через $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Тогда

A существует такая $f(x)$, что $F(x)$ имеет разрыв на $[a, b]$

B функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b)

C функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на всем (a, b), кроме, быть может, одной точки

D функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на всем (a, b), кроме, быть может, некоторого конечного множества

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $n \geqslant 3$, — система векторов, принадлежащих $\mathbf{R}^N$, где $N \geqslant 3$. Известно, что любые $n - 1$ векторов из X линейно независимые. Тогда

A система X линейно зависимая

B система X линейно независимая

C если система X линейно зависимая, то $n > N$

D если система X линейно независимая, то $n < N$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 3$. Обозначим через $\det A$ определитель матрицы A. Тогда

A если $\det A > 0$, то n четное

B если $\det A < 0$, то n нечетное

C если $\det A > 0$, то $\det(A^{\mathsf{T}}A) > 0$

D если $\det A < 0$, то $\det(A^{\mathsf{T}}A) < 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть A — матрица размера $m \times n$, a — столбец длины m, b — столбец длины n, и x — искомый столбец подходящей длины. Через A^{T} обозначается матрица, транспонированная к A. Тогда

A если система $Ax = a$ имеет не более одного решения при любом a, то система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ имеет не более одного решения при любом a

B если система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ имеет не более одного решения при любом a, то система $Ax = a$ имеет не более одного решения при любом a

C если система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ совместна при любом a, то система $Ax = a$ совместна при любом a

D если система $A^{\mathsf{T}}x = b$ совместна при любом b, то система $AA^{\mathsf{T}}x = a$ совместна при любом a

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Число инвариантных подпространств матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

трактуемой как линейный оператор в $\mathbf{R}^2$, равно

A 1

B 2

C 3

D 4

E бесконечно много

20. Пусть A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$ и x, y — столбцы длины n и m соответственно. Тогда

A если существует $y \neq 0$, такой что $ABy = y$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = x$

B если существует $y \neq 0$, такой что $ABy = y$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = -x$

C если существует y, такой что $ABy = 0$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = 0$

D если существует $y \neq 0$, такой что $ABy = 0$, то существует $x \neq 0$, такой что $BAx = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Линейные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ являются операторами проектирования в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является оператором проектирования

B если $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является оператором проектирования, то $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

C если $\mathbf{AB} = 0$, то $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ является оператором проектирования

D если $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$, то $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ является оператором проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Пусть A и B — симметричные положительно полуопределенные матрицы порядка $n \geqslant 3$. Обозначим через $\operatorname{rank} A$ ранг матрицы A. Тогда

A если $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geqslant n$, то матрица $A + B$ положительно определена

B если $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geqslant n$, то матрица $AB + BA$ положительно определена

C если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$, то матрица $A + B$ положительно определена

D если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$, то матрица $AB + BA$ положительно определена

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Пусть P — квадратная матрица порядка n, все собственные значения которой равны нулю или единице. Через I обозначим единичную матрицу. Тогда

A $P^2 = P$

B если P невырожденная, то $P = I$

C $(I - P)^{2n} = (I - P)^n$

D количество линейно независимых собственных векторов матрицы P^n не превосходит количества линейно независимых собственных векторов матрицы P

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. При каком наибольшем значении натурального параметра k максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\frac{dx}{dt} = e^x$, $x(0) = k$ определено в точке $t = 0.1$?

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

25. Сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

равна

A 1

B 2

C 4

D 6

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D.

26. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $\frac{1+x^2}{1+y^2} - \ln\frac{1+y}{1+x} = 1$. Производная $\frac{dy}{dx}$ в точке $(0,0)$

A равна 0

B равна 1

C равна -1

D равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

27. Выберите истинное утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A пересечение любого числа непустых компактных множеств является непустым компактным множеством

B объединение конечного числа множеств, каждое из которых является либо открытым, либо замкнутым, является либо открытым, либо замкнутым

C пересечение любого числа дополнений к компактным множествам является дополнением к компактному множеству

D любое компактное множество является пересечением некоторого (возможно, несчетного) числа отрезков

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Выберите ***ложное*** утверждение (все множества суть подмножества числовой прямой):

A если все граничные точки множества не принадлежат ему, то множество является открытым

B точная верхняя грань непустого ограниченного множества является его граничной точкой

C множество граничных точек множества, не являющегося ни открытым, ни замкнутым, само не является ни открытым, ни замкнутым

D если множество не является ни открытым, ни замкнутым, то множество его граничных точек непусто

E среди утверждений A, B, C, D есть хотя бы одно ложное

29. Даны числовые последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Тогда

A если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причем $y_n > 0$, то последовательность $\{z_n = x_n/y_n\}$ сходится

B если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, причем $x_n > 0$, $y_n > 0$, то последовательность $\{z_n = {x_n}^{y_n}\}$ сходится

C если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, а последовательность $\{z_n\}$ такова, что $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то последовательность $\{z_n\}$ также сходится, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} z_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

D если последовательность $\{x_n^2\}$ сходится, то последовательность $\{x_n\}$ имеет не более двух частичных пределов

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x$ равен

A 0

B 1

C $\sqrt{2}$

D 2

E $+\infty$

31. Сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$ равна

A $1/2$

B $1/4$

C $3/2$

D $3/4$

E 1

32. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+n}$

A равен 1

B равен $\ln 2$

C равен 0

D равен $+\infty$

E не существует

33. Интеграл $\int_{-1/2}^{1/2}\dfrac{dx}{1-x^2}$ равен

A $\ln 2$

B $\ln 3$

C $3\ln 2$

D $2\ln 3$

E $3\ln 3$

34. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентным соотношением $x_{n+1} = 1/2(x_n + + 2/x_n)$; известно, что $x_0 \neq 0$. Тогда

A последовательность $\{x_n\}$ расходится для $x_0 < 0$ и сходится к 1 для $x_0 > 0$

B последовательность $\{x_n\}$ расходится для $x_0 < 0$ и сходится к $\sqrt{2}$ для $x_0 > 0$

C последовательность $\{x_n\}$ сходится к -1 для $x_0 < 0$ и сходится к $\sqrt{2}$ для $x_0 > 0$

D последовательность $\{x_n\}$ сходится к $-\sqrt{2}$ для $x_0 < 0$ и сходится к $\sqrt{2}$ для $x_0 > 0$

E последовательность $\{x_n\}$ расходится для любого $x_0 \neq 0$

35. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n^2} = 0$. Тогда

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

B если a_n монотонна, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

C $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n^3} = 0$

D ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости не меньший, чем 1

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Пусть $a_0 = a \geqslant 0$. Последовательность $\{a_n\}$ для $n \geqslant 1$ определяется формулой

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1}^{1/2} & \text{для } n \text{ вида } 3k, \text{ где } k \text{ — целое;} \\ a_{n-1}^{2/3} & \text{для } n \text{ вида } 3k-1, \text{ где } k \text{ — целое;} \\ a_{n-1}^{3} & \text{для } n \text{ вида } 3k+1, \text{ где } k \text{ — целое.} \end{cases}$$

Тогда

A существует a такое, что последовательность $\{a_n\}$ не ограничена

B последовательность $\{a_n\}$ не является монотонной

C если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то она является постоянной

D предел последовательности $\{a_n\}$ существует только при $a = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

37. Ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеют радиусы сходимости 1 и 2, соответственно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$

A имеет радиус сходимости 2

B имеет радиус сходимости 1

C имеет радиус сходимости не меньший, чем 1

D имеет радиус сходимости, не больший, чем 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

38. Функция $f(x)$ определена на вещественной прямой и имеет при $x \to +\infty$ асимптоту, заданную уравнением $y = ax + b$. Тогда радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$

A одинаков при всех $a, b \in \mathbf{R}$

B равен единице при $a = 0$

C принимает не более двух различных значений

D либо равен единице, либо принимает значение, не меньшее 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Пусть $a_1 = a \in \mathbf{R}$, и далее для $n > 1$ определяется $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}a_{n-1}\right)$. Тогда предел последовательности $\{a_n\}$

A не существует при $|a| > \pi$

B если существует, то равен либо 0, либо 1, либо -1

C если существует, то равен либо 1, либо -1

D может принимать бесконечное число значений

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Дано дифференциальное уравнение $y' = y^4$. Тогда при любом начальном условии его максимальное (непродолжаемое) решение

A определено на ограниченном интервале

B определено при $x = 0$

C имеет вертикальную асимптоту

D не определено при $x = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2.1.2 Вторая часть теста

1. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left(\dfrac{1+x}{n}\right)\right)^{n^2}, & \text{если } x < -1,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\cos\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)^{1/n}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)^{1/n}, & \text{если } x > 0,\end{cases}$$

а функция $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Тогда

а) функция $f(x)$ определена при всех вещественных x;

Да Нет

б) график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения в единственной точке;

Да Нет

г) $f'(1) = 1$;

Да Нет

д) $f'(-1) = 0$;

Да Нет

е) функция $g(x)$ определена при всех вещественных x;

Да Нет

ж) функция $g(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке своей области определения;

Да Нет

з) график функции $g(x)$ имеет наклонную (причем не горизонтальную) асимптоту.

Да Нет

2. Даны функция $f(x,y) = (x-a)^2 + y^2$, где $a \in \mathbf{R}$, и множество $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\colon g(x,y) = 0\}$, где $g(x,y) = x^3 - 3x^2 - 4x - y^2$. Тогда

а) множество M является компактным;

Да Нет

б) при любом a функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на M в единственной точке;

Да Нет

в) при любом a функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M;

Да Нет

г) при любом a функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M не более, чем в одной точке;

Да Нет

д) при $a = 3$ наибольшее значение функции $f(x, y)$ на M равно $2\sqrt{2}$;

Да Нет

е) при $a = 1$ наименьшее значение функции $f(x, y)$ на M равно 1;

Да Нет

ж) существует a такое, что в любой точке, в которой функция $f(x, y)$ достигает локального минимума на M, выполнено равенство $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$;

Да Нет

з) при любых различных значениях a наименьшие значения функции $f(x, y)$ на M различные.

Да Нет

3. Дана квадратная вещественная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Известно, что $A^2 = -I$. Тогда

а) матрица A кососимметричная;

Да Нет

б) матрица A ортогональная;

Да Нет

в) если матрица A кососимметричная, то она ортогональная;

Да Нет

г) если матрица A симметричная, то она ортогональная;

Да Нет

д) пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму ядра и образа матрицы A;

Да Нет

е) у матрицы A существует инвариантное подпространство размерности 1;

Да Нет

ж) у матрицы A существует бесконечно много инвариантных подпространств размерности 2;

Да Нет

з) в $\mathbf{R}^n$ существуют подпространства L_1 и L_2, такие что $A(L_1) \subset L_2$, $A(L_2) \subset L_1$ и $\mathbf{R}^n = L_1 \oplus L_2$.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(e^{-nx} - e^{-3nx})$. Обозначим через M множество его сходимости, и для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

а) множество M замкнуто;

Да Нет

б) множество M не ограничено сверху;

Да Нет

в) функция $S(x)$ убывает на M;

Да Нет

г) функция $S(x)$ ограничена на M;

Да Нет

д) функция $S(x)$ непрерывна на M;

Да Нет

е) график функции $S(x)$ имеет асимптоту;

Да Нет

ж) для любого компактного подмножества $K \subset M$ ряд сходится к $S(x)$ равномерно на множестве K;

Да Нет

з) существует некомпактное подмножество $G \subset M$, на котором ряд сходится к $S(x)$ равномерно.

Да Нет

5. Функция $f(x)$ определена на вещественной прямой и периодична, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1. Тогда

а) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$ сходится;

Да Нет

б) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| f(n)$ сходится;

Да Нет

в) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ сходится;

Да Нет

г) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1;

Да Нет

д) если минимальный период функции $f(x)$ равен $\sqrt{2}$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1;

Да Нет

е) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, больший 1;

Да Нет

ж) если один из периодов функции $f(x)$ равен 1, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n f(n)$ сходится;

Да Нет

з) если минимальный период функции $f(x)$ является целым положительным числом, строго большим 1, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n) x^n$ имеет радиус сходимости, в точности равный 1.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. C. **2.** D. **3.** D. **4.** B. **5.** E. **6.** B. **7.** C. **8.** D. **9.** A. **10.** C. **11.** C. **12.** A. **13.** C. **14.** E. **15.** E. **16.** E. **17.** C. **18.** C. **19.** B. **20.** A. **21.** D. **22.** C. **23.** E. **24.** B. **25.** B. **26.** B. **27.** E. **28.** C. **29.** D. **30.** B. **31.** A. **32.** B. **33.** B. **34.** D. **35.** B. **36.** C. **37.** C. **38.** E. **39.** B. **40.** E.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Найдем пределы выражений, стоящих в определении функции $f(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1+x}{n}\right)\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2} = e^{-(1+x)^2/2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/n} = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Оставшийся предел найдем для трех разных случаев:
Случай $0 < x < 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\left(x^{2n}+1\right)^{1/n} = \frac{1}{x}.$$

Случай $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(1+1)^{1/n} = 1.$$

Случай $x > 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} x\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)^{1/n} = x.$$

Таким образом, функцию $f(x)$ можно задать следующей формулой (см. также рис. 1):

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x+1)^2/2}, & \text{если } x < -1, \\ 1, & \text{если } -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1/x, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1, \\ x, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Следовательно, ответы на вопросы (а) — «да» (пределы существуют во всех точках вещественной оси), (б) — «да» (при $x \to -\infty$ функция $f(x)$ стремится к нулю),

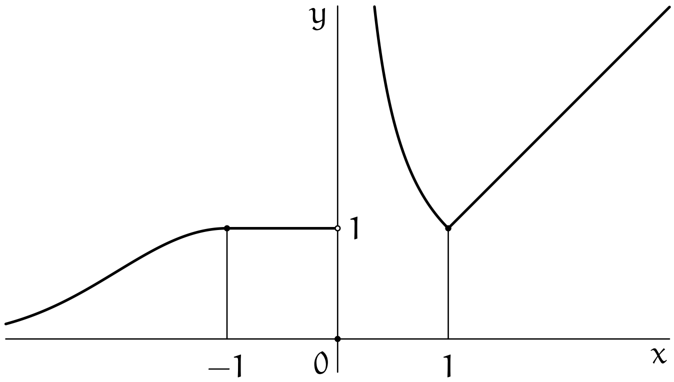

Рис. 1. График функции $f(x)$

(в) — «да» (в точке $x = 0$ достигается наименьшее значение, равное нулю), (г) — «нет» ($f'(1)$ не существует), (д) — «да».

Заметим, что если $x > 0$, то функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[0, x]$, поэтому интеграл $\int_0^x f(t)dt$ не существует и функция $g(x)$ не определена. Если же $x \leqslant 0$, то $f(x)$ ограничена на отрезке $[x, 0]$, и функция $g(x)$ определена. Поэтому ответ на вопрос (е) — «нет». Так как $f(x)$ непрерывна при всех $x < 0$, то $g(x)$ дифференцируема при всех $x < 0$ (ответ на вопрос (ж) — «да»).

Так как функция $g(x)$ определена на $(-\infty, 0]$, то наклонная асимптота может быть только при $x \to -\infty$. Функция $f(x)$ положительная при всех $x < 0$, поэтому $g(x)$ возрастающая, и так как $g(0) = 0$, то при всех $x < 0$ значения $g(x) < 0$. Заметим, что так как $-(x+1)^2/2 < x+2$, то функция $f(x) < e^{x+2}$ при $x \leqslant 0$, и функция $g(x)$ ограничена снизу функцией $\int_0^x e^{t+2}dt = e^2(e^x - 1)$. Легко видеть, что функция $e^2(e^x - 1)$ ограничена на $(-\infty, 0]$, а значит и $g(x)$ ограничена на $(-\infty, 0]$. Поэтому $g(x)$ как монотонная ограниченная функция имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$, а значит имеет горизонтальную асимптоту (ответ на вопрос (з) — «нет»).

Задача 2. Рассматривая $g(x, y) = 0$ как уравнение на x при фиксированном y, легко убедиться, что оно имеет решение при любом значении y, таким образом, множество M не является ограниченным. Функция $f(x, y)$, являющаяся квадратом расстояния до точки $(a, 0)$, не является ограниченной на неограниченном множестве и, следовательно, не может достигать на нем наибольшего значения. Ответы на вопросы (а), (б) и (д) — «нет». При этом множество M очевидно является замкнутым; наименьшее значение функции $f(x, y)$ на M не может достигаться вне круга $D = \{(x, y) \in R^2 : (x - a)^2 + y^2 \leqslant a^2\}$ (значение функции f вне этого круга больше a^2, в то время как ее значение в точке $(0, 0)$, принадлежащей M, равно a^2). Множество $M \cap B$ компактно, и к нему применима теорема Вейерштрасса. Ответ на вопрос (в) — «да».

Заметим, что множество M не содержит точек с абсциссой $0 < x < 4$ и с абсциссой $x < -1$. Поэтому при $a = 2$ значение функции f на множестве M не может быть меньше 4, а значение 4 достигается сразу в двух точках $(0,0)$ и $(4,0)$, т. е., ответ на вопрос (г) — «нет». Аналогично, при $a = 1$ значение функции f на множестве M не может быть меньше 1, а значение 1 достигается в единственной точке $(0,0)$, в которой выполнено $\partial g(x,y)/\partial y = 0$, т. е., ответы на вопросы (е) и (ж) — «да». Наконец, при $a = -2$ значение функции f на множестве M также не может быть меньше 1, а значение 1 достигается в точке $(-1,0)$, т. е., ответ на вопрос (з) — «нет».

Задача 3. Рассмотрим следующую матрицу 2×2:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(матрица, подобная кососимметрической). Легко видеть, что $B^2 = -I$. В качестве примера матрицы 6×6 можно предложить, например, блочно-диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос (а) — «нет»). Заметим, что эта матрица не является ортогональной (ответ на вопрос (б) — «нет»).

Пусть теперь матрица A кососимметрическая, то есть $A^T = -A$. Тогда $A^T A = -A^2 = I$, а следовательно A — ортогональная (ответ на вопрос (в) — «да»).

Если $A^2 = -I$, то матрица A не может быть симметричной (для которой $A^2 = A^T A$ — положительно полуопределенная матрица). Следовательно, посылка в утверждении пункта (г) ложная, и ответ — «да».

Заметим, что матрица A невырожденная (иначе A^2 была бы вырожденной). Поэтому ее ядро нулевое, а образ равен всему пространству $\mathbf{R}^n$, и ответ на вопрос (д) — «да».

Если бы у матрицы A было одномерное инвариантное подпространство, то у нее был бы собственный вектор x (соответствующий каком-нибудь собственному числу λ). Но тогда этот же вектор x был бы собственным вектором матрицы A^2 и соответствовал бы собственному числу $\lambda^2 \geqslant 0$. Однако матрица A^2 отрицательно определена. Поэтому ответ на вопрос (е) — «нет».

Что касается инвариантных подпространств размерности два, то взяв *любой* ненулевой вектор x, мы получим, что векторы $\{x, Ax\}$ образуют линейно независимую систему, а так как $A(Ax) = A^2 x = -x$, то линейная оболочка $\langle x, Ax \rangle$ инвариантна относительно матрицы A. Таким образом, ответ на вопрос (ж) — «да».

Подпространства L_1 и L_2 из пункта (з) можно построить следующим образом:

1. зафиксируем ненулевой вектор x_1;

2. положим $y_1 = Ax_1$, заметим, что система $\{x_1, y_1\}$ линейно независимая, линейная оболочка $\langle x_1, y_1 \rangle$ инвариантна относительно A, и $Ay_1 = -x_1$;

3. выберем ненулевой вектор x_2, не принадлежащий линейной оболочке $\langle x_1, y_1 \rangle$;

4. положим $y_2 = Ax_2$, заметим, что $y_2 \notin \langle x_1, y_1, x_2 \rangle$ (иначе $y_2 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \alpha_2 x_2$, и $-x_2 = Ay_2 = \alpha_1 Ax_1 + \beta_1 Ay_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 - \beta_1 x_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 y_1 - \beta_1 x_1 + \alpha_2(\alpha_1 x_1 + {}+\beta_1 y_1 + \alpha_2 x_2)$, и $x_2 \in \langle x_1, y_1 \rangle$) а значит система $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ линейно независимая;

5. повторяем действия в пунктах 3 и 4 до тех пор, пока есть возможность выбрать $x_{m+1} \notin \langle x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m \rangle$, то есть пока число векторов в системе $\{x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m\}$ не достигнет n.

В результате в качестве пространства L_1 можно взять линейную оболочку системы векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, а в качестве пространства L_2 — линейную оболочку системы векторов $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Ответ на вопрос (з) — «да».

Задача 4. Если $x < 0$, то ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю. При $x = 0$ ряд, очевидно, сходится, и $S(0) = 0$. Если $x > 0$, то ряд сходится, так как он представим в виде разности двух рядов, каждый из которых сходится, например, по признаку Даламбера. Таким образом, $M = [0, +\infty)$. Следовательно, ответ на вопрос (а) — «да», на вопрос (б) — «да». Так как $S(0) = 0$ и $S(x) > 0$ для любого $x > 0$, то на вопрос (в) ответ «нет».

Если $x > 0$, то

$$S(x) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-nx} - e^{-3nx}) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-3x}} = \frac{e^{-3x}(e^{2x} - 1)}{(1 - e^{-x})(1 - e^{-3x})}. \tag{1}$$

Так как $e^x = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$, то из (1) следует, что

$$S(x) \geqslant \frac{c}{x} \tag{2}$$

в некоторой (правой) окрестности точки 0, где $c > 0$ — некоторая константа. Поэтому на вопрос (г) ответ «нет». Из (2) также следует, что функция $S(x)$ разрывна в нуле, значит, на вопрос (д) ответ «нет». Из (2) вытекает, что в точке 0 график функции $S(x)$ имеет вертикальную асимптоту, значит, на вопрос (е) ответ «да».

На отрезке $[0, 1]$ (компактное множество) каждая частичная сумма является непрерывной функцией, а предельная функция $S(x)$ разрывна. Поэтому на отрезке $[0, 1]$ сходимость не равномерная, и ответ на вопрос (ж) — «нет».

Если $x \geqslant 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n^2 (e^{-nx} - e^{-3nx}) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n},$$

и числовой ряд в правой части неравенства сходится. По признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на некомпактном множестве $[1, +\infty)$. Ответ на вопрос (з) — «да».

Задача 5. (а) Нет. Знакопеременный корень из гармонического ряда сходится как ряд Лейбница, а сумма его квадратов — гармонический ряд:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(б) Нет, потому что если исходный ряд — всё тот же знакопеременный, а $f(x)$ постоянна (или периодична с периодом, равным 1), то получается сумма модулей знакопеременного ряда, которая не обязана сходиться (годится пример из (а), скажем).

(в) Нет. Оба ряда из примера пункта (а). Их произведение является гармоническим рядом, а радиус сходимости для функционального ряда на основе любых таких ухищрений равен единице.

(г) Нет, так как $f(n)$ может быть равна нулю во всех n, если период равен единице. Тогда указанный ряд — тождественный ноль.

(д) Нет. Зададим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \sqrt{2}k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наименьший период этой функции равен $\sqrt{2}$, но так как $\sqrt{2}$ есть иррациональное число, то $f(n) = 0$ при всех натуральных n. Таким образом, радиус сходимости ряда равен бесконечности.

(е) Нет, так как если у $f(x)$ период равен 1, а исходный ряд из пункта (а), то у результирующего ряда радиус сходимости в точности равен 1.

(ж) Да, так как тогда $f(n) = \mathrm{const}$. Поэтому такой ряд сходится вместе с исходным рядом.

(з) Можно легко построить функцию, не являющуюся периодичной с периодом 1, но принимающую значение 0 в целых точках (например, $f(x) = \sin \pi x$). Поэтому ответ — «нет».

3 Вступительный экзамен 2011 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, и $\{b_n\}$ — положительная последовательность, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

II. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то существует положительная последовательность $\{b_n\}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = +\infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

III. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то существует положительная последовательность $\{b_n\}$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

2. Даны подпространства L_1, L_2, L_3 линейного пространства $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 3$. Обозначим через n_1, n_2, n_3 размерности L_1, L_2, L_3 соответственно, и через $X \oplus Y$ прямую сумму подпространств X и Y. Тогда

A если $n_1 + n_2 = n$, то $\mathbf{R}^n = L_1 \oplus L_2$

B если $L_2 \neq L_3$, то $L_1 + L_2 \neq L_1 + L_3$

C если $n_2 \neq n_3$, то $L_1 + L_2 \neq L_1 + L_3$

D если $L_1 \oplus L_2 = L_1 \oplus L_3$, то $L_2 = L_3$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Даны матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times m$. Тогда

A если $AB = I$, то $BA = I$

B если $AB = I$, то BA задает оператор проектирования

C если AB задает оператор проектирования, то $BA = I$

D если AB задает оператор проектирования, то BA задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Дана квадратная вещественная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Обозначим через $\det A$ определитель матрицы A. Тогда

A если $\det A > 0$, то у матрицы A существует отрицательное собственное число

B если $\det A < 0$, то у матрицы A существует положительное собственное число

C если $\det A > 0$, то у матрицы A существует положительное собственное число

D если $\det A < 0$, то у матрицы A существует отрицательное собственное число

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Дана ортогональная матрица A порядка $n \geqslant 6$. Обозначим через I единичную матрицу порядка n. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Матрица $\frac{1}{2}(I - A)$ задает оператор проектирования.

II. Если матрица A симметричная, то матрица $\frac{1}{2}(I + A)$ задает оператор проектирования.

III. Если матрица A кососимметричная, то матрица $\frac{1}{2}(I + A)$ задает оператор проектирования.

A ни одно из утверждений I, II и III

B только II

C только III

D только II и III

E I, II и III

6. Дана прямоугольная матрица A размера $m \times n$, b — столбец длины m, c — столбец длины n и x — искомый столбец подходящей длины. Через A^T обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Тогда

A если система $Ax = b$ имеет решение при любом b, то система $A^T x = c$ имеет решение при любом c

B если система $Ax = b$ имеет решение при любом b, то система $A^T x = c$ не имеет решений ни при каком $c \neq 0$

C если система $Ax = b$ при любом b имеет единственное решение, то система $A^T x = c$ при любом c имеет единственное решение

D если система $Ax = b$ при любом b имеет не более одного решения, то система $A^T x = c$ при любом c имеет не более одного решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Дана квадратная невырожденная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если A симметричная, то A^2 симметричная положительно определенная матрица

B если A несимметричная, то A^2 симметричная положительно определенная матрица

C если A^2 симметричная положительно определенная матрица, то A симметричная

D если A^2 симметричная положительно определенная матрица, то A несимметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Дана квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A^2 + 2A = 0$. Тогда

A матрица A вырожденная

B матрица A невырожденная

C числа 0 и -2 оба являются собственными числами матрицы A

D хотя бы одно из чисел 0 и -2 не является собственным числом матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Даны прямоугольные матрицы A размера $m \times n$ и B размера $n \times m$, где $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Известно, что матрица AB невырожденная. Тогда

A $m < n$

B $m \geqslant n$

C $\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} AB$

D $\operatorname{rank} BA \neq \operatorname{rank} AB$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Множество A является подмножеством множества вещественных чисел. Тогда

A если множество предельных точек множества A пустое, то множество A конечное

B если множество предельных точек множества A совпадает с множеством внутренних точек множества A, то множество A замкнутое

C если множество предельных точек множества A совпадает с множеством граничных точек множества A, то множество A замкнутое

D если множество предельных точек множества A замкнутое, то множество A замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Рассматриваются подмножества вещественной оси. Тогда

A найдется замкнутое множество, являющееся конечным пересечением открытых множеств

B найдется замкнутое множество, являющееся счетным пересечением открытых множеств

C найдется открытое множество, являющееся конечным пересечением замкнутых множеств

D найдется открытое множество, являющееся счетным пересечением замкнутых множеств

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится. Тогда

A существует такая перестановка членов последовательности, что полученная последовательность сходится

B последовательность $\{b_n = e^{a_n}, n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится

C последовательность $\{c_n = a_n^3, n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится

D последовательность $\{d_n = a_n^2 - a_n + 1, n = 1, 2, \ldots\}$ не сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. На интервале (a, b) задана функциональная последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$, причем каждая функция $f_n(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда

A если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ непрерывна на (a, b)

B если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b)

C если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b) и для любого $x \in (a, b)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$, то $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$

D если последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на (a, b), то последовательность $\{f_n^2(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к функции $f^2(x)$ равномерно на (a, b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Функция $f(x)$ задана равенствами

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leqslant 2, \\ ax^2 + b, & \text{если } x > 2, \end{cases}$$

и дифференцируема на всей прямой. Тогда

A $a = 3,\ b = -4$

B $a = 2,\ b = 0$

C $a = 1,\ b = 4$

D числа a, b не совпадают ни с одним из вариантов A, B, C

E таких чисел a, b не существует

15. Дана функция двух переменных $f(x, y) = x^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y)\colon \sqrt{|x|} + 2\sqrt{|y|} = 2\}$. Тогда

A функция $f(x)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках

B функция $f(x)$ на множестве M достигает наименьшего значения в двух точках

C любой локальный экстремум функции $f(x)$ на множестве M является либо точкой наименьшего, либо точкой наибольшего значения функции $f(x)$ на множестве M

D наибольшее значение функции $f(x)$ на множестве M равно 20

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — числовой ряд. Тогда

A если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ расходится

B если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ сходится

C если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится

D если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ разложена в окрестности точки $x_0 = 0$ в ряд Тейлора: $f(x) = f(0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x^k$. Тогда

A $\quad c_7 = 2,\ c_8 = 2$

B $\quad c_7 = 1,\ c_8 = 0$

C $\quad c_7 = -2,\ c_8 = 0$

D $\quad c_7 = -1,\ c_8 = 0$

E $\quad$ числа c_7, c_8 не совпадают ни с одним из вариантов A, B, C, D

18. Дана функция двух переменных $f(x, y) = \min\{x, y\}$ и множество $M = \{(x, y) \colon (x - 2)^2 + (y-1)^2 = 5\}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x)$ на множестве M достигает наибольшего значения в двух точках

B $\quad$ функция $f(x)$ на множестве M достигает наименьшего значения в двух точках

C $\quad$ существует локальный минимум функции $f(x)$ на множестве M, который не является точкой наименьшего значения функции $f(x)$ на множестве M

D $\quad$ существуют два локальных максимума функции $f(x)$ на множестве M, которые не являются точками наибольшего значения функции $f(x)$ на множестве M

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Объект A движется на координатной плоскости равномерно вдоль прямой $4y - 3x = 0$ со скоростью 20 м/сек в направлении увеличения x и y. Объект B движется на координатной плоскости равномерно вдоль прямой $3y - 4x = 0$ со скоростью 15 м/сек также в направлении увеличения x и y. В начальный момент времени объект A находится в начале координат, объект B — в точке с координатами $(21, 28)$ (единица измерения координат — метр). Объекты A и B будут находиться на наименьшем расстоянии

A $\quad$ через одну секунду после начала движения

B $\quad$ через две секунды после начала движения

C $\quad$ через три секунды после начала движения

D $\quad$ через промежуток времени, отличный от значений, перечисленных в A, B, C

E наименьшего расстояния не существует

20. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Найдите *ложное* утверждение.

A образ отрезка $[a, b]$ при отображении $f(x)$ является компактным множеством

B образ отрезка $[a, b]$ при отображении $f(x)$ является связным множеством

C функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$

D для любых чисел c, d, таких что $a < c < d < b$, выполнено равенство $f(d) - f(c) = \int_c^d f'(x)dx$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

21. Дана последовательность функций $f_n(x) = n^2\left(1 - \cos\dfrac{x^3 - 1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ — множество таких чисел x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для каждого $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A множество M ограничено сверху

B функция $f(x)$ является нечетной функцией

C график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту

D $f'(1) = 6$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Пусть M — множество сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n(x + 1)^n}$. Тогда

A $M = (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$

B $M = (-\infty, -4/3) \cup (2/3, +\infty)$

C $M = (-4, 2)$

D $M = (-4/3, 2/3)$

E множество M не совпадает ни с одним из множеств в A, B, C, D

23. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана равенствами $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$, $n \geqslant 1$. Тогда

A существует такое число a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ имеет две предельные точки

B существует такое число a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является неограниченной

C существует такое число $a \neq 2\pi$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2\pi$

D если $a = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

24. Неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{2}x^3 dx}{2x^8 + 4}$ равен

A $\frac{\sqrt{2}x^4}{4} \ln(2x^8 + 4) + C$

B $\frac{\sqrt{2}}{16} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

C $\frac{1}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

D $\frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right) + C$

E другой функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D

25. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[5]{n^5 + 5n^4} - \sqrt{n^2 + 2n}\right)$ равен

A 0

B $-3/2$

C $5/2$

D другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E не существует

26. Уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = 4 - x$

A имеет единственное решение, лежащее в интервале $(0, 1/5)$

B имеет единственное решение, лежащее в интервале $(1/5, 1)$

C имеет единственное решение, лежащее в интервале $(2, 3)$

D не имеет решения

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Острый угол, под которым кривые $x^2 + 2y^2 = 3$ и $x^2 + 3x + 4y^2 = 8$ пересекаются в точке $(1, 1)$, равен

A $\operatorname{arctg} \frac{1}{8}$

B $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{16}$

C $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{21}$

D $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{11}$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

28. Интеграл

$$\int_0^2 \frac{5dx}{x^2-3x-4}$$

равен

A $-\ln 3$

B $-\ln 2/3$

C $-5\ln 6$

D $-\ln 6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

29. Неопределенный интеграл

$$\int \frac{\operatorname{ctg} x\, dx}{\ln(\sin x)}$$

равен

A $\ln\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

B $-\ln\left|\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$

C $-\ln\cos x + C$

D $\ln\ln\sin x + C$

E функции, отличной от перечисленных в A, B, C, D

30. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = x\sin t$, $x(0) = 1$, в точке $t = \pi$ равно

A e^2

B e

C e^{-1}

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

31. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $z' = (z+4x)^2$, $z(0) = 2$, в точке $x = \pi/24$ равно

A $2/\sqrt{3}$

B $2/\sqrt{3} + \pi/6$

C $2\sqrt{3}$

D $2\sqrt{3} + \pi/6$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

32. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = xe^t - e^{e^{2t}}$, $x(0) = 2$, определено на

A интервале $(-\infty, e^e)$

B интервале $(-\infty, e^{2e})$

C интервале $(-\infty, 2e^e)$

D всей числовой прямой

E интервале, отличном от перечисленных в A, B, C, D

33. Предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi/2 - 10\sqrt{x}) \ln\cos 2x}{(2^x - 1)((x+1)^5 - (x-1)^5)}$$

равен

A $-\dfrac{\ln 2}{5}$

B $-\dfrac{1}{5\ln 2}$

C -5

D $-5\ln 2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

34. Предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

равен

A ∞

B $1/6$

C $-1/12$

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

35. Предел

$$\lim_{x\to 0}\sin(e^{2x}-1)\cdot\sin(1/x)$$

равен

A 1

B 2

C e

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

36. Интеграл

$$\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$$

равен

A 0

B π

C $-\pi$

D -2π

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

37. Интеграл

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\,dx$$

равен

A $2/3$

B $4/3$

C $1/2$

D 1

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

38. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности нуля, причем существуют пределы $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+g(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f^2(x) + g^2(x)$.

II. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) - g(x)$.

III. Существует предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

39. Функция $f(x)$ определена в окрестности нуля. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если для некоторого натурального k существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k$, то и для любого натурального $l > k$ существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^l$.

II. Если для некоторого натурального k существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k$, то существует и $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)x^k \ln x$.

III. Если для некоторого натурального k для любого натурального l существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^k \ln^l x$, то существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)x^{k-1}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

40. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой прямой, причем $f(0) = g(0) = 0$. Тогда

A если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $g(x)$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

B если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $f(x)$ непрерывна в нуле, то и $g(x)$ непрерывна в нуле

C если $f(g(x))$ непрерывна в нуле и $g(f(x))$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

D если $f(f(x))$ непрерывна в нуле, то и $f(x)$ непрерывна в нуле

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3.1.2 Вторая часть теста

1. Квадратная матрица A четвертого порядка задает в стандартном базисе линейного пространства $\mathbf{R}^4$ оператор проектирования, не равный нулевому и тождественному операторам. Даны четыре вектора:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что x_1, x_2, x_3 являются собственными векторами матрицы A, а x_2, x_3, x_4 являются собственными векторами транспонированной матрицы A^T. Тогда

а) матрица A задает ортогональный проектор (при стандартном скалярном произведении);

Да Нет

б) ранг матрицы A равен 2;

Да Нет

в) ранг матрицы A не равен 2;

Да Нет

г) геометрическая кратность собственного числа 1 матрицы A равна трем;

Да Нет

д) вектор x_4 является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

е) если сумма элементов матрицы A равна нулю, то точка $\lambda = 0$ является точкой перегиба характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы A;

Да Нет

ж) если сумма элементов матрицы A равна 4, то точка $\lambda = 1$ является точкой перегиба характеристического многочлена $p(\lambda)$ матрицы A;

Да Нет

з) у матрицы A существует бесконечно много инвариантных подпространств размерности 3.

Да Нет

2. Даны функция $f(x, y) = (x+2)^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon y^2 = x^3 + 3x^2\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке $(-3, 0)$;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в трех точках $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, $(0, 0)$;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ не достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

д) точка $\left(-2/3, -\sqrt{28/27}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $\left(-2/3, \sqrt{28/27}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(-2, 2)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(1, 2)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

3. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{\sqrt{t^2+1}} + \beta(t), \quad x(0) = \gamma,$$

где α и γ — вещественные числа, а $\beta(t)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной прямой. Тогда

а) если $\beta(t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t)$ монотонно не убывает при всех $t \geqslant 0$;

Да Нет

б) если $\beta(t)$ ограничена на всей числовой прямой, то $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) функция $x(t)$ определена на всей числовой прямой;

Да Нет

г) если $\beta(t) \equiv 0$, то $x(t)$ — нечетная функция;

Да Нет

д) если $\alpha < 0$, $\gamma < 0$ и $\beta(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$ из области определения $x(t)$;

Да Нет

е) если $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta(t) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, то $x(t) > \int_0^t \beta(u)\,du$ при всех $t \geqslant 0$ из области определения $x(t)$;

Да Нет

ж) если $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\beta(t) = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$, то $x(3/2) \geqslant e$;

Да Нет

з) если $\alpha = 3$, $\gamma = 0$, $\beta(t) = 8t^3$, то $x(5) < 5000$.

Да Нет

4. Функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, определяется равенством $f(x) = \int_{3x-2}^{x^2-x+1} g(t)dt$, где $g(t) = \dfrac{1}{|t|+2}$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда

а) производная $f'(x)$ существует при каждом $x \in \mathbf{R}$;

Да Нет

б) уравнение $f(x) = 0$ имеет два решения;

Да Нет

в) функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наибольшего значения;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает на $\mathbf{R}$ наименьшего значения;

Да Нет

д) точка $x = \sqrt{3}$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

е) на отрезке $[-1, 0]$ функция $f(x)$ возрастает;

Да Нет

ж) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту.

Да Нет

5. Пусть множества M_1 и M_2 определяются следующим образом:

$$M_1 = \left\{x < 0\colon \text{существует } \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n\right\},$$
$$M_2 = \left\{x > 1\colon \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n!} \text{ сходится}\right\}.$$

Функция $f(x)$ определяется равенством

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n, & \text{если } x \in M_1, \\ a, & \text{если } x \in [0, 1], \\ b - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{n!}, & \text{если } x \in M_2, \end{cases}$$

где a, b — константы. Обозначим через $M = M_1 \cup [0, 1] \cup M_2$. Тогда

а) при $a = 0$, $b = 2$ функция $f(x)$ достигает на M наибольшего значения;

Да Нет

б) при $a = 1$, $b = 1$ функция $f(x)$ достигает на M наименьшего значения;

Да Нет

в) существуют числа a, b, такие что $(-1/2, 1/2) \subset M$ и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(-1/2, 1/2)$;

Да Нет

г) существуют числа a, b, такие что $(1/2, 3/2) \subset M$ и функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(1/2, 3/2)$;

Да Нет

д) точка $x = -\sqrt{2/3}$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$;

Да Нет

е) при любых a, b уравнение $f(x) = x$ имеет решение;

Да Нет

ж) при любых a, b график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту;

Да Нет

з) существуют такие числа a, b, что график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту с ненулевым углом наклона.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** E. **3.** B. **4.** D. **5.** B. **6.** C. **7.** A. **8.** E. **9.** C. **10.** B. **11.** B. **12.** C. **13.** A. **14.** A. **15.** A. **16.** C. **17.** B. **18.** C. **19.** C. **20.** D. **21.** E. **22.** E. **23.** D. **24.** C. **25.** B. **26.** D. **27.** C. **28.** D. **29.** D. **30.** A. **31.** E. **32.** D. **33.** E. **34.** B. **35.** D. **36.** D. **37.** A. **38.** A. **39.** A. **40.** E.

3.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что векторы x_1, x_2, x_3 являются собственными векторами матрицы A и не ортогональны вектору x_4, который является собственным вектором матрицы A^T. Отсюда следует, что все эти четыре вектора соответствуют одному и тому же собственному числу. Кроме того, векторы x_2 и x_3 соответствуют тому же собственному числу также и как собственные векторы матрицы A^T (они не ортогональны сами себе). Это собственное число может быть одним из двух: 0 или 1, так как матрица A задает проектор. Оставшийся четвертый собственный базисный вектор должен соответствовать другому собственному числу, так как матрица A не совпадает с нулевой и единичной. Поэтому этот вектор должен быть ортогонален векторам x_2, x_3 и x_4 (собственные векторы матрицы A^T, соответствующие другому собственному числу). Легко подобрать такой вектор (обозначим его через y_4), например,

$$y_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T,$$

и убедиться, что векторы x_1, x_2, x_3 и y_4 образуют базис в $\mathbf{R}^4$. В этом базисе матрица оператора, задаваемого матрицей A в стандартном базисе, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ответы на вопросы а) — «нет» (так как вектор y_4 не ортогонален линейной оболочке векторов x_1, x_2, x_3), б) — «нет», в) — «да» (ранг матрицы A равен 1 или 3), г) — «нет» (геометрическая кратность собственного числа 1 может быть равна 1), д) — «нет» (если бы x_4 был собственным вектором матрицы A, то он был бы обязан соответствовать тому же собственному числу, что и x_1, x_2 и x_3, а это невозможно).

Рассмотрим сумму элементов матрицы A. Ее можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ можно представить в виде суммы $x_2 + x_3$. Оба эти вектора — собственные, соответствуют собственному числу 0 или 1 (одному и тому же). Поэтому в первом случае

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

и характеристический многочлен матрицы A есть многочлен $p(\lambda) = (-\lambda)^3(1-\lambda)$. Во втором случае

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

и характеристический многочлен матрицы A есть многочлен $p(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda)^3$. Отсюда получаем ответы на вопросы е) — «да» и ж) — «да».

Чтобы построить бесконечно много инвариантных подпространств размерности 3, достаточно взять всевозможные двумерные подпространства линейной оболочки векторов x_1, x_2, x_3 (инвариантны как подпространства собственного подпространства матрицы A) и рассматривать их суммы с линейной оболочкой вектора y_4

(собственное подпространство). Так как сумма инвариантных подпространств инвариантна, то построенные трехмерные подпространства инвариантны относительно A, и ответ на вопрос з) — «да».

Задача 2. Подставим выражение для y^2 из определения множества M в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(x) = (x+2)^2 + x^3 + 3x^2 = x^3 + 4x^2 + 4x + 4$. Так как y^2 не может быть отрицательным, то функцию $g(x)$ нужно исследовать на множестве, где $x^3 + 3x^2 \geqslant 0$ (или $x \in [-3, +\infty)$).

Критические точки функции $g(x)$ на множестве $[-3, +\infty)$ найдем, приравняв производную к нулю:

$$g'(x) = 3x^2 + 8x + 4 = 0,$$

откуда получим $x = -2$ или $x = -2/3$. Добавим также левый конец полуинтервала $x = -3$.

Так как при $x \to +\infty$ значения функции $g(x)$ стремятся к $+\infty$, то $g(x)$ не достигает наибольшего значения на $[-3, +\infty)$ (а значит и $f(x, y)$ не достигает наибольшего значения на M, поэтому ответы на вопросы в) — «нет», г) — «да»).

Функция $g(x)$ — кубическая парабола, которая на множестве $[-3, +\infty)$ достигает наименьшего значения либо на левом его конце, либо во внутренней точке, в которой производная равна нулю. Как видно,

$$\begin{aligned} g(-3) &= (-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 4 = 1, \\ g(-2) &= (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = 4, \\ g(-2/3) &= (-2/3)^3 + 4 \cdot (-2/3)^2 + 4 \cdot (-2/3) + 4 = 76/27 < 4. \end{aligned}$$

Это означает, что наименьшее значение достигается в точке $x = -3$, которая соответствует единственной точке $x = -3$, $y = 0$ множества M (действительно, $y^2 = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 = 0$). Таким образом, ответы на вопросы а) — «да» и б) — «нет».

Рассмотрим вторую производную функции $g(x)$ во внутренних точках множества $[-3, +\infty)$.

$$g''(x) = 6x + 8.$$

Как видно, $g''(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4 < 0$, $g''(-2/3) = 6 \cdot (-2/3) + 8 = 4 > 0$, откуда следует, что точка $x = -2$ является точкой локального максимума, а точка $x = -2/3$ — точкой локального минимума функции $g(x)$. Этим точкам соответствуют следующие точки множества M: $x = -2$, $y = \pm 2$ и $x = -2/3$, $y = \pm\sqrt{28/27}$. Таким образом, ответы на вопросы д) — «да», е) — «нет», ж) — «да», з) — «нет» (точка $x = 1$, $y = 2$ не является стационарной).

На рисунке 2 изображены множество M и критические точки функции $f(x, y)$ на нем в исходных координатах (x, y).

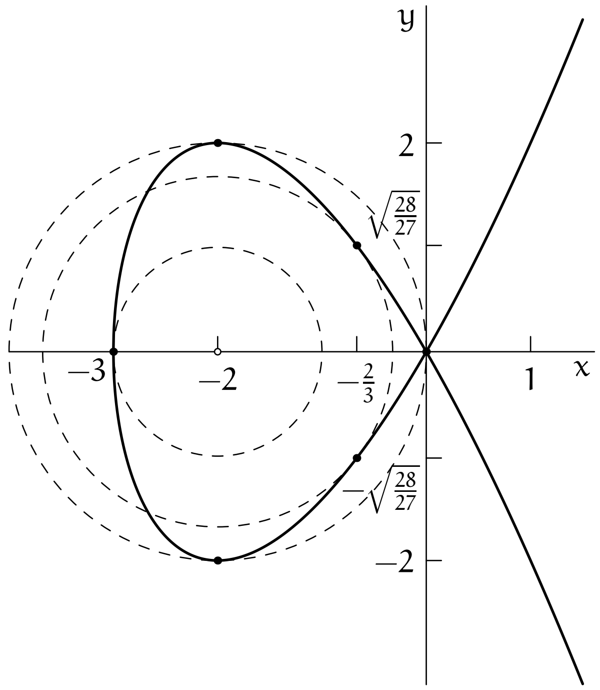

Рис. 2. Множество M и линии уровня функции $f(x, y)$

Задача 3. Найдем решение данного дифференциального уравнения. Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{\sqrt{t^2+1}}$$

может быть проинтегрировано с помощью таблицы интегралов, его общим решением является функция $x(t) = C \cdot \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}$. Решение исходного уравнения может быть найдено с помощью метода вариации постоянной: если подставить $x(t) = C(t) \cdot \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}$ в исходное уравнение, то после упрощения получим

$$\frac{dC}{dt}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha} = \beta(t),$$

откуда нетрудно вывести решение исходной задачи:

$$x(t) = \left[\gamma + \int_0^t \frac{\beta(\tau)d\tau}{\left(\tau + \sqrt{\tau^2+1}\right)^{\alpha}}\right]\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\alpha}.$$

Из явного вида решения немедленно следуют ответы на вопросы а) — «нет» (достаточно положить $\beta(t) \equiv 0$, $\alpha > 0$ и $\gamma < 0$), б) — «нет» (например, при $\beta(t) \equiv \equiv 0$, $\alpha > 0$ и $\gamma > 0$), в) — «да», г) — «нет» (при $\gamma \neq 0$), д) — «да» (следует из того, что выражение в квадратных скобках отрицательное при всех $t \geqslant 0$), е) — «да» (достаточно внести выражение вне квадратных скобок под знак интерграла, оно строго больше знаменателя дроби во всех внутренних точках отрезка $[0, t]$).

Для параметров вопроса ж) решение задачи Коши можно вычислить в явном виде (снова воспользовавшись табличным интегралом), оно равно $x(t) = \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)\ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$ и в точке $t = 3/2$ превышает $\left(3 + \sqrt{13}\right)/2 > 3 > e$) (ответ на вопрос ж) — «да»).

Чтобы ответить на вопрос з), подставим параметры в решение уравнения:

$$x(t) = \int_0^t \frac{8\tau^3 d\tau}{\left(\tau + \sqrt{\tau^2+1}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3 = 8\int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \sqrt{1+1/\tau^2}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3.$$

Заметим, что под интегралом стоит положительная возрастающая на $[0, t]$ функция, поэтому

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \sqrt{1+1/\tau^2}\right)^3} \leqslant \int_0^t \frac{d\tau}{\left(1 + \sqrt{1+1/t^2}\right)^3} = \frac{t}{\left(1 + \sqrt{1+1/t^2}\right)^3}.$$

Таким образом,

$$x(t) \leqslant \frac{8t}{\left(1 + \sqrt{1+1/t^2}\right)^3}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^3 = 8t^4,$$

и $x(5) \leqslant 8 \cdot 5^4 = 5000$ (ответ на вопрос з) — «да»).

Задача 4. Подынтегральная функция $g(t)$ непрерывна при каждом $t \in \mathbf{R}$, а пределы интегрирования как функции от x имеют производные при каждом $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет производную при каждом $x \in \mathbf{R}$ и

$$f'(x) = \frac{1}{|x^2 - x + 1| + 2} \cdot (2x - 1) - \frac{1}{|3x - 2| + 2} \cdot 3. \tag{1}$$

Из положительности функции $g(t)$ следует, что

$$\begin{aligned} &f(x) > 0, && \text{если } x^2 - x + 1 > 3x - 2, \\ &f(x) < 0, && \text{если } x^2 - x + 1 < 3x - 2, \\ &f(x) = 0, && \text{если } x^2 - x + 1 = 3x - 2. \end{aligned}$$

Поэтому имеем:

$$\begin{aligned} &f(x) > 0, && \text{если } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty), \\ &f(x) < 0, && \text{если } x \in (1, 3), \\ &f(0) = f(3) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, на вопросы а) и б) ответы «да». Из (1) следует (мы опускаем рутинные вычисления, заметим только, что $x^2 - x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$), что

$$f'(x) = \frac{-9x^2 + 14x - 13}{(x^2 - x + 3)(4 - 3x)} \quad \text{при } x < \frac{2}{3}, \tag{2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{(x^2 - x + 3)x} \quad \text{при } x \geqslant \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 && \text{при } x < \sqrt{3}, \\ &f'(x) > 0 && \text{при } x > \sqrt{3}, \\ &f'(\sqrt{3}) = 0. \end{aligned}$$

Значит, функция $f(x)$ строго убывает на $(-\infty, \sqrt{3})$ и строго возрастает на $(\sqrt{3}, +\infty)$. Таким образом, на вопрос в) ответ «нет», на вопросы г) и д) ответы «да», на вопрос е) ответ «нет».

Если $x > 3$, то $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - x + 3}{3x}$, и при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ имеет порядок роста такой же, как $\ln x$. Аналогично при $x \to -\infty$ функция $f(x)$ эквивалентна $3 \ln |x|$. Значит, на вопросы ж) и з) ответы «нет».

Задача 5. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$ при любом вещественном k. Поэтому $M_1 = (-\infty, 0)$ и $f(x) = e^{-1/x^2}$ на M_1. Поскольку $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{k^n}{n!} = e^k$ при любом вещественном k, то $M_2 = (1, +\infty)$ и $f(x) = b - e^{(x-1)^2}$ на M_2. Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x < 0, \\ a, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ b - e^{(x-1)^2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

При $a = 0$, $b = 2$ имеем $f(x) < 1$ при любом вещественном x, но $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 1$. Поэтому на вопрос а) ответ «нет». Поскольку $b - e^{(x-1)^2} \to -\infty$ при $x \to +\infty$ при любом вещественном b, то ответ на вопрос б) «нет».

Если $a = 0$, то можно показать (используя, например, индукцию), что функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет производные всех порядков и $f^{(n)}(0) = 0$ для всех $n \geqslant 0$. Поэтому при $a = 0$ и при любом b функция $f(x)$ дважды (и даже бесконечно) непрерывно дифференцируема на $(-1/2, 1/2)$. Значит, на вопрос в) ответ «да».

При любых a, b имеем:

$$\begin{aligned} &f''(x) = 0, && \text{если } 1/2 < x < 1, \\ &f''(x) = -2(1 + 2(x-1)^2)e^{(x-1)^2}, && \text{если } 1 < x < 3/2. \end{aligned}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1-0} f''(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 1+0} f''(x) = -2$, то ответ на вопрос г) «нет».

Если $x < 0$, то $f(x) = e^{-1/x^2}$ и, следовательно,

$$f''(x) = \frac{2}{x^4}\left(\frac{2}{x^2} - 3\right) e^{-1/x^2}.$$

Поэтому единственной точкой перегиба является точка $-\sqrt{2/3}$. Ответ на вопрос д) «да».

Если, например, $a = -1$, $b = 0$, то $f(x) < 0$ при любом $x \geqslant 0$. Кроме того, $f(x) > 0$ при любом $x < 0$. Значит, уравнение $f(x) = x$ решений не имеет. Ответ на вопрос е) «нет».

Поскольку $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ при любых a, b, то ответ на вопрос ж) «да». При любых a, b предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = -\infty$. Поэтому ответ на вопрос з) «нет».

4 Вступительный экзамен 2012 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{R}$ и точка $x \in \mathbf{R}$. Тогда

A   если x — изолированная точка множества A, то x граничная точка множества A

B   если x — граничная точка множества A, то x изолированная точка множества A

C   если x — предельная точка множества A, то x граничная точка множества A

D   если x — граничная точка множества A, то x предельная точка множества A

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть A — ограниченное счетное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A A — открытое множество

B A — замкнутое множество

C A — компактное множество

D A — не является ни открытым, ни замкнутым множеством

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Дана система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $m \geqslant 2$, в пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Известно, что каждый из векторов $x_1, \ldots, x_m$ линейно выражается через остальные векторы системы. Через $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m)$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$, и через $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m)$ — ее размерность. Тогда

A $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = m - 1$

B   если $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = n$, то $m = n + 1$

C   если $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = n$, то любые n векторов системы $\{x_1, \ldots x_m\}$ линейно независимые

D   если $\dim \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_m) = m - 1$, то любые $m - 1$ векторов системы $\{x_1, \ldots x_m\}$ линейно независимые

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Даны две ненулевые матрицы A и B размера $m \times n$ и $n \times m$ соответственно, где $m, n \geqslant 2$. Обозначим через a столбец длины m, через b столбец длины n и через x и y искомые столбцы подходящей длины. Тогда

A   если система $ABx = Ab$ имеет решение при любом b, то система $Bx = b$ имеет решение при любом b

B   если система $ABx = Ab$ при любом b имеет не более одного решения, то система $Bx = b$ при любом b имеет не более одного решения

C   если система $ABx = a$ имеет решение при любом a, то система $BAy = b$ имеет решение при любом b

D   если система $ABx = a$ при любом a имеет не более одного решения, то система $BAy = b$ при любом b имеет не более одного решения

E   все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, α — вещественное число. Через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A $\det(A+B) = \det A + \det B$

B $\det(A-B) = \det A - \det B$

C $\det(\alpha A) = \alpha \det A$

D $\det(AB) = \det A \det B$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, где $n \geqslant 2$. Известно, что $\mathbf{BA} = 0$. Через $\operatorname{Ker}\mathbf{X}$ и $\operatorname{Im}\mathbf{X}$ обозначим ядро и образ оператора $\mathbf{X}$ соответственно. Тогда

A $\operatorname{Im}\mathbf{A} \subset \operatorname{Ker}\mathbf{B}$

B $\operatorname{Im}\mathbf{A} \subset \operatorname{Im}\mathbf{B}$

C $\operatorname{Ker}\mathbf{A} \subset \operatorname{Im}\mathbf{B}$

D $\operatorname{Ker}\mathbf{A} \subset \operatorname{Ker}\mathbf{B}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Известно, что $A + B = I$, где I — единичная матрица. Найдите ***ложное*** утверждение

A если A — матрица проектирования, то B — матрица проектирования

B если A — матрица проектирования, то $AB = 0$

C если $AB = 0$, то A и B — матрицы проектирования

D если $AB = 0$, то $BA = 0$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

8. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, трактуемые как линейные операторы в пространстве $\mathbf{R}^n$ со стандартным скалярным произведением. Обозначим через B^T матрицу, транспонированную к B, через $L^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству L и через $\operatorname{Im} X$ — образ матрицы X. Тогда

A если $B^TA = 0$, то $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$

B если $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Im} B$, то $B^TA = 0$

C если $B^TA = 0$, то $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^\perp$

D если $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Im} B)^\perp$, то $B^TA = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если матрица A перестановочна с транспонированной A^T, то A симметричная

B если существует невырожденная матрица B, такая что $B^{-1}AB$ диагональная, то матрица A симметричная

C если существует скалярное произведение в пространстве $\mathbf{R}^n$, такое что матрица A при этом скалярном произведении задает самосопряженный оператор, то A симметричная

D если существует невырожденная матрица B, такая что B^TAB диагональная, то A симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Даны две симметричные матрицы A и B порядка $n \geqslant 2$, причем матрица A является положительно определенной. Тогда

A если все собственные числа матрицы AB неотрицательные, то матрица B положительно полуопределена

B многочлен $\det(\lambda A + B)$ не имеет вещественных корней (через $\det X$ обозначается определитель матрицы X)

C если все элементы матрицы B неотрицательные, то матрица $A + B$ положительно определена

D если матрица $A + B$ положительно определена, то у матрицы B существует неотрицательный элемент

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Функции $f(x)$, $g(x)$ заданы на всей числовой прямой и являются периодическими. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Функция $h(x) = f(x) + g(x)$ является периодической.

II. Функция $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ является ограниченной.

III. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ не являются постоянными, то на каждом конечном отрезке $[a, b]$ уравнение $f(x) + g(x) = 0$ имеет конечное число решений.

A только I

B только I и III

C только III

D I, II и III

E все утверждения I, II и III являются ложными

12. Пусть $x_1 = a$, $x_2 = b$, где $a < b$, и $x_{n+2} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

A при любых a и b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ является монотонной последовательностью

B существуют такие числа a, b, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не сходится

C при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3a+4b}{7}$

D при любых a, b последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2a+3b}{5}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Предел $\lim\limits_{x\to4}\left(3-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-5x+4}}$ равен

A $1/\sqrt[6]{e}$

B $1/\sqrt[3]{e}$

C $1/\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

14. Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, уменьшается со скоростью, пропорциональной площади треугольника. В момент времени $t = 0$ площадь треугольника равна 2, в момент времени $t = 1$ площадь треугольника равна 1/2. Площадь треугольника в момент времени $t = 3$ равна

A 1/4

B 1/6

C 1/8

D 1/10

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

15. Функция $f(x)$ задана на множестве $[0, +\infty)$, дифференцируема на $(0, +\infty)$, и ее график имеет наклонную асимптоту $y = a + bx$, $b \neq 0$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинны?

I. Если существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = B$, то $b = B$.

II. Существуют точки $0 < x_1 < x_2$, такие что $b = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

III. Если $f'(x) < b$ при любом $x > 0$, то существует такое число $N > 0$, что $f(x) < < a + bx$ при любом $x > N$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

16. Предел $\lim\limits_{n \to \infty} n \left(\sqrt[6]{n^6 + 6n^5} - \sqrt{n^2 + 2n} \right)$ равен

A 0

B -2

C -1

D 1

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

17. Функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются истинными?

I. Если $f(x)$ является четной функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является нечетной функцией.

II. Если $f(x)$ является периодической функцией и имеет первообразную на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ существует первообразная, которая является периодической функцией.

III. Если функция $f(x)$ имеет точки разрыва на $\mathbf{R}$, то у $f(x)$ не существует первообразной на $\mathbf{R}$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

18. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1 + x + x^2)}{e^x + e^{-x} - 2}$ равен

A $-1/2$

B -1

C -2

D 0

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

19. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеет радиус сходимости R_2. Радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ равен

A $\min\{R_1, R_2\}$

B $\max\{R_1, R_2\}$

C $\sqrt{R_1^2 + R_2^2}$

D $\dfrac{R_1 + R_2}{2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Пусть b — вещественное число. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ называется b-странной, если существует такое натуральное число N, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$. Тогда

A существует такое число b, для которого не существует b-странных последовательностей

B существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность является неограниченной

C существует такое число b, для которого некоторая b-странная последовательность имеет предел

D любая b-странная последовательность является монотонной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{1/x}$ равен

A 1

B e

C $\sqrt{e}$

D $\sqrt[4]{e}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

22. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a+b}\right)^{1/x}$ равен

A $(a+b)^{ab}$

B $a^{a/(a+b)}b^{b/(a+b)}$

C $\dfrac{ab}{a+b}$

D $(ab)^{1/(a+b)}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

23. Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{5\,dx}{x^2 - x - 6}$ равен

A $\ln\dfrac{4}{9}$

B $\ln\dfrac{9}{4}$

C $5\ln\dfrac{9}{4}$

D $-5\ln\dfrac{9}{4}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

24. Интеграл $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\,dx}{x^2 - 2x + 2}$ равен

A $2\operatorname{arctg}(\pi + 1)$

B $2\ln\dfrac{1}{2}$

C $2(\operatorname{arctg}(\pi - 1) + \operatorname{arctg}(\pi + 1))$

D $2\cos\dfrac{9\pi}{16}$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

25. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{3\cos x \sin x}{x^2 - 3x + 2}\,dx$ равен

A $\ln\frac{1}{2}$

B $3\ln\frac{1}{2}$

C $\pi/2 - 3$

D $3/2 - \pi/2$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

26. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \cos x + 1)dx$ равен

A 0

B $1 + 3\pi/4$

C $-1 + \pi/4$

D $1 - \pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

27. Интеграл $\int_0^{\pi/2} (2\sin^2 x + \cos^2 x)dx$ равен

A $\pi/2$

B $1 + 3\pi/4$

C $3\pi/4$

D $1 + \pi/4$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

28. Интеграл $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^7 x - 1)dx$ равен

A $-\pi/2$

B $-\pi/4$

C $-\pi$

D $-\pi^7 + 1$

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

29. Неопределенный интеграл $\int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 12}\,dx$ равен

A $\ln\left|x^2 - x - 12\right| + C$

B $\ln\left|\dfrac{x-4}{x+3}\right| + C$

C $\ln\left|\dfrac{x+4}{x-3}\right| + C$

D $\ln\left|\dfrac{x^2-x-12}{2x-1}\right| + C$

E семейству функций, отличному от перечисленных в A, B, C, D

30. Значение максимального решения задачи Коши $y' = 5 - \dfrac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = 2$ в точке $x = 4$ равно

A 4/9

B 79/8

C 23/7

D 17/9

E числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

31. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны при всех вещественных x. Тогда

A если $f(g(x))$ и $f(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $g(x)$ дифференцируема при всех x

B если $f(g(x))$ и $g(x)$ дифференцируемы при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

C если $f^2(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f(x)$ дифференцируема при всех x

D если $f(x)$ дифференцируема при всех x, то и $f^2(x)$ дифференцируема при всех x

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ и принимает на нем значения между нулем и единицей. Тогда

A если $f(x)$ не возрастает, причем $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$, то решение уравнения $f(x) = x$ существует и единственно

B если $f(x)$ непрерывна, строго возрастает на отрезке $[0, a]$, причем $f(0) > 0$ и $f(a) = 1$, и уравнение $f(x) = x$ имеет конечное число n решений на отрезке $[0, a]$, то n четно

C	если уравнение $f(f(x)) = x$ имеет не более одного решения, то и уравнение $f(x) = x$ имеет не более одного решения

D	если $f(f(x))$ непрерывна и не убывает, то и $f(x)$ не убывает

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ на множестве $|x| + 2|y| = 2$

A	достигает наибольшего значения в единственной точке

B	достигает наибольшего значения ровно в двух точках

C	достигает наибольшего значения ровно в четырех точках

D	достигает наибольшего значения в восьми точках

E	не достигает наибольшего значения

34. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а производная $f'(x)$ существует и непрерывна на интервале $(0, 1)$, причем $f(0) = 0$. Тогда

A	если функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

B	если функция $f(x) \cdot f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

C	если функция $f(x) \cdot f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f'(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

D	если функция $\sqrt{f^2(x) + f'^2(x)}$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M, то и функция $f(x)$ ограничена на $(0, 1)$ сверху числом M

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Неявная функция $y(x)$ задана уравнением $y^6 - y^5 + x = 1$ в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$. Тогда ее производная в точке $x = 1$

A	равна 0

B	равна 1

C	равна -1

D	не существует

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Функция $y(x)$ является максимальным (непродолжаемым) решением задачи Коши $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + 9}}$, $y(0) = 3$. Тогда значение $y(4)$

A равно 1

B равно 4

C равно 9

D равно $\ln 13$

E равно числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не определено

37. Производная функции $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{2n}\right)^n$ в точке $x = 1$

A равна 1

B равна e

C равна $\sqrt{e}$

D равна $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

E равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

38. Производная функции $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$ в точке $x = 0$

A равна 1

B равна 0

C равна $\ln(\pi/2)$

D равна $(\pi/2)^{\pi/2}$

E равна числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D, или не существует

39. Функция $f(x)$ определена, непрерывна и принимает положительные значения на полупрямой $[0, +\infty)$ вместе со своей производной, причем $f(0) = e$ и для любого $x > 0$ выполнено неравенство $f'(x) < f(x)$. Тогда

A $f(1) < e$

B $f(e) < e^e$

C $f(2e) < e^8$

D $f(e^2) < e^{e^2}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Пусть $f(x) = x^2\sin(x^3)$ и M — множество ее критических точек (точек, в которых производная $f'(x) = 0$). Тогда

A множество M состоит из изолированных точек

B множество M компактно

C функция $f(x)$ достигает локального экстремума в каждой точке множества M

D функция $f(x)$ достигает наибольшего значения ровно в двух точках множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4.1.2 Вторая часть теста

1. Пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму двух ненулевых подпространств L_1 и L_2 размерностей n_1 и n_2 соответственно. Матрица P задает оператор проектирования на L_1 параллельно L_2, матрица Q задает оператор проектирования на L_2 параллельно L_1. Квадратная матрица A размера $2n \times 2n$ определяется равенством

$$A = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

где через I обозначается единичная матрица, а через 0 — нулевая. Обозначим через x, y столбцы длины n. Тогда

а) матрица A ортогональная;

Да Нет

б) матрица A задает оператор проектирования;

Да Нет

в) ранг матрицы A равен $2n_1$;

Да Нет

г) ранг матрицы A равен $2n_2$;

Да Нет

д) ранг матрицы A равен n;

Да Нет

е) если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

ж) если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы A;

Да Нет

з) если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где $x \neq y$ и $x \neq -y$, является собственным вектором матрицы A, то $x-y$ является собственным вектором матрицы P или $x+y$ является собственным вектором матрицы Q.

Да Нет

2. Даны функция $f(x, y) = y - 4x^2 + 2x^4$ и множество $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

д) в точке $(0, 1)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

е) в точке $(-\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) точка $(0, -1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

3. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x - \alpha)^{1/n}e^{-nx}$, где α — вещественный параметр. Обозначим через $M \subset \mathbf{R}$ множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$. Тогда

а) для любого α множество M является замкнутым;

Да Нет

б) существует α, для которого множество M является ограниченным;

Да Нет

в) существует α, для которого функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве M;

Да Нет

г) для любого α на множестве M ряд не сходится равномерно;

Да Нет

д) если $\alpha < 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

е) если $\alpha > 0$, то на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно;

Да Нет

ж) для любого α существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) существует α, для которого существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд не сходится равномерно.

Да Нет

4. Пусть $x(t)$ — максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \cos^3 t + f(t), \ \ x(0) = x_0,$$

где x_0 — вещественный параметр, а $f(t)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной прямой. Тогда

а) функция $x(t)$ определена на всей вещественной прямой;

Да Нет

б) если $f(t)$ ограничена на всей числовой прямой, то $x(t)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

в) если $f(t)$ периодическая с периодом 2π, то и $x(t)$ периодическая с периодом 2π;

Да Нет

г) если $f(\pi/2) = 0$, то и $x(\pi/2) = 0$;

Да Нет

д) если $x_0 = 1$ и $f(t) < 1$ при всех t, то $x(\pi) \leqslant \pi + 1$;

Да Нет

е) если $x_0 = 1$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(\pi) = e^{2/3}$;

Да Нет

ж) если $f(t) = e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$, то $x(t)/t \to 0$ при $t \to +\infty$;

Да Нет

з) если $x_0 = \sqrt{e}$ и $f(t) \equiv 0$, то $x(t) \geqslant 1$ для всех $t > 0$.

Да Нет

5. Пусть $a > 0$ и $f(x) = \int_0^a t \cdot |t - x| dt$ при $x \in \mathbf{R}$. Тогда

а) функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в одной точке;

Да Нет

б) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ не дифференцируема ровно в двух точках;

Да Нет

в) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на $\mathbf{R}$;

Да Нет

д) существует такое число $a > 0$, что функция $f(x)$ возрастает на множестве $(1, +\infty)$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, 0)$;

Да Нет

ж) точка $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ является точкой локального минимума функции $f(x)$;

Да Нет

з) функция $f(x)$ является выпуклой функцией на $\mathbf{R}$.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. A. **2.** E. **3.** D. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** E. **8.** D. **9.** D. **10.** A. **11.** E. **12.** C. **13.** A. **14.** C. **15.** A. **16.** B. **17.** A. **18.** A. **19.** E. **20.** C. **21.** E. **22.** B. **23.** A. **24.** C. **25.** E. **26.** B. **27.** C. **28.** C. **29.** A. **30.** B. **31.** D. **32.** C. **33.** C. **34.** D. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** B. **39.** C. **40.** A.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Так как $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму подпространств L_1 и L_2, то $P + Q = I$, откуда следует, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} P^2 & PI + IQ \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix} = A,$$

и матрица A задает оператор проектирования. Так как $A^T \neq A$, то $A \neq I$, следовательно, A не является ортогональной матрицей (только единичная матрица задает проектор и является ортогональной одновременно). Ответы на вопросы а) — нет, б) — да.

Так как матрица A является блочно-треугольной, то $\det(A - \lambda I) = \det(P - \lambda I)\det(Q - \lambda I)$. Поскольку число 0 является собственным числом матриц P (алгебраической кратности n_2) и Q (алгебраической кратности n_1), то оно является собственным числом матрицы A алгебраической кратности $n_1 + n_2 = n$. Так как алгебраическая кратность собственных чисел проектора совпадает с геометрической, то отсюда следует, что матрица A имеет ранг $2n - n = n$. Ответы на вопросы в) — нет, г) — нет, д) — да.

Если $x \neq 0$ принадлежит образу матрицы P, то $Px = x$ и $Qx = 0$. Отсюда

$$A \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + x \\ Qx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос е) — нет).

Если $y \neq 0$ принадлежит образу матрицы Q, то $Qy = y$ и $Py = 0$. Отсюда

$$A \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Py + y \\ Qy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$$

(ответ на вопрос ж) — да).

Если

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & I \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Px + y \\ Qy \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то y является собственным вектором матрицы Q. При этом возможны два случая:

1. Пусть $Qy = 0$ (и $Py = y$). Тогда $\lambda = 0$ и $0 = Px + y = P(x + y)$, т. е. $x + y$ — собственный вектор матрицы P, а значит и матрицы Q.

2. Пусть $Qy = y$ (и $Py = 0$). Тогда $\lambda = 1$ и $Px + y = x = x + Py$, откуда $P(x - y) = x - y$.

Таким образом, ответ на вопрос з) — да.

Задача 2. Подставим выражение $x^2 = 1 - y^2$ из уравнения для множества M в функцию $f(x, y)$. Получим функцию $g(y) = y - (1 - y^2) + 2(1 - y^2)^2 = 2y^4 + y - 2$. Так как множество M представляет собой окружность радиуса 1 с центром в нуле, то функцию $g(y)$ нужно исследовать на множестве $[-1, 1]$.

Производная $g'(y) = 8y^3 + 1$, откуда следует, что у уравнения $g'(y) = 0$ решение единственное ($y = -1/2 \in [-1, 1]$). Левее этой точки функция $g(x)$ убывает, правее — возрастает. Поэтому на множестве $[-1, 1]$ у функции $g(y)$ один локальный (он же глобальный) минимум $y = -1/2$ и два локальных максимума $y = -1$ и $y = 1$. Так как $g(-1) = -1$, а $g(1) = 1$, то последняя точка является и точкой глобального максимума. Заметим, что точке $y = -1/2$ соответствуют две точки исходного множества M ($x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$), а точкам $y = -1$ и $y = 1$ — по одной ($x = 0$, $y = -1$ и $x = 0$, $y = 1$).

Таким образом, функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на M в двух точках, а наибольшего — в одной (ответы на вопросы а) — нет, б) — да, в) — да, г — нет). Точка глобального максимума $x = 0$, $y = 1$ (ответ на вопрос д) — да). Точки $x = -\sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ и $x = \sqrt{3}/2$, $y = -1/2$ — точки глобального минимума (ответы на вопросы е) — нет, ж) — да). Точка $x = 0$, $y = -1$ — действительно точка локального максимума (ответ на вопрос з) — да).

Задача 3. Точка $\alpha \in M$ и $f(\alpha) = 0$ (все члены ряда равны нулю). Если $x < \alpha$, то $x \notin M$ (четные члены ряда не определены).

Пусть $x > \max\{\alpha, 0\}$, тогда $(x - \alpha)^{1/n} \leqslant \max\{1, x - \alpha\}$, и исходный ряд (с положительными слагаемыми) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x - \alpha)^{1/n} e^{-nx}$ сходится, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\max\{1, x - \alpha\} \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Пусть $\alpha < x \leqslant 0$, тогда для всех n выполняется неравенство $(x - \alpha)^{1/n} e^{-nx} \geqslant \min\{x - \alpha, 1\}$ в котором правая часть не стремится к нулю, а значит ряд не сходится.

В итоге получаем $M = [\alpha, +\infty)$ при $\alpha \geqslant 0$ и $M = \alpha \cup (0, +\infty)$ при $\alpha < 0$, поэтому ответы на вопросы а) — нет, б) — нет.

При $\alpha > 0$ и $x \in M$

$$f(x) \leqslant e^{-\alpha} \frac{\max\{1, x - \alpha\}}{e^{x-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} < \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}},$$

откуда следует, что $f(x)$ ограничена, и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом. Получаем ответы на вопросы в) — да, г) — нет, е) — да.

Для любого α при $x \in [a, b]$, где $\max\{\alpha, 0\} < a < b$, выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x - \alpha)^{1/n} e^{-nx} \leqslant \max\{1, b - \alpha\} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-na},$$

и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как мажорируется сходящимся числовым рядом, ответ на вопрос ж) — да.

Если $\alpha < 0$ и $x \in (0,1)$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} (x-\alpha)^{1/n} e^{-nx} \geqslant \min\{(x-\alpha)^{1/m}, 1\} \sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} \geqslant$$
$$\geqslant \min\{(-\alpha)^{1/m}, 1\} \frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \to +\infty \quad \text{при } x \to 0 \text{ справа.}$$

Значит для любого m существует $x \in (0,1)$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $(0,1)$ не сходится равномерно, т. е. д) — нет.

Если $\alpha = 0$ и $x \in [0,1]$, то остаток ряда

$$R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} x^{1/n} e^{-nx} \geqslant x^{1/m} \sum_{n=m}^{\infty} e^{-nx} = x^{1/m} \frac{e^{-mx}}{1-e^{-x}} \sim \frac{1}{x^{1-1/m}}$$

при $x \to 0$ справа. Значит для любого $m > 1$ существует $x \in [0,1]$, такое, что $R_m(x) > 1$. Это означает, что ряд на интервале $[0,1]$ не сходится равномерно, т. е. з) — да.

Задача 4. Найдем решение данного дифференциального уравнения. Однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \cdot \cos^3 t$$

может быть легко проинтегрировано, его общим решением является функция $x(t) = C \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$. Решение исходного уравнения может быть найдено с помощью метода вариации постоянной: если подставить $x(t) = C(t) \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}$ в исходное уравнение, то после упрощения получим

$$\frac{dC}{dt} \cdot e^{\sin t - (\sin^3 t)/3} = f(t),$$

откуда нетрудно вывести решение исходной задачи:

$$x(t) = \left[x_0 + \int_0^t f(\tau) e^{-\sin\tau + (\sin^3 \tau)/3} d\tau \right] e^{\sin t - (\sin^3 t)/3}.$$

Из явного вида решения немедленно следуют ответы на вопросы: а) — да, б) — нет, в) — нет, г) — нет, д) — да (подынтегральное выражение может быть оценено сверху величиной $e^{-\sin\tau + (\sin^3 \tau)/3}$, которая на отрезке $[0, \pi]$ не превосходит единицу), е) — нет (на самом деле тогда $x(\pi) = 1$), ж) — нет (у указанной величины нет предела при $t \to +\infty$), з) — нет (например, $x(3\pi/2) = e^{-1/6}$).

Задача 5. Рассмотрим три случая:

1. Пусть $x \leqslant 0$. Тогда $|t - x| = t - x$ при $t \in [0, a]$ и $f(x) = \int_0^a t(t-x)dt = \dfrac{a^3}{3} - \dfrac{a^2 x}{2}$.

2. Пусть $0 < x \leqslant a$. Тогда $f(x) = \int_0^x t(x-t)dt + \int_x^a t(t-x)dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^2x}{2} + \frac{a^3}{3}$.

3. Пусть $x > a$. Тогда $f(x) = \int_0^a t(x-t)dt = \frac{a^2x}{2} - \frac{a^3}{3}$.

Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$ и $f'(x) = -a^2/2$ при $x < 0$, $f'(x) = x^2 - a^2/2$ при $0 < x < a$, $f'(x) = a^2/2$ при $x > a$. В точках $x = 0$, $x = a$ производные слева и справа совпадают, значит, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой. Ответы на вопросы а), б) нет.

Из пунктов 1 и 3 следует, что при $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ является линейной, поэтому ответ на вопрос в) да.

Функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, a/\sqrt{2})$ и возрастает на множестве $(a/\sqrt{2}, +\infty)$. Значит, в точке $x = a/\sqrt{2}$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения. Кроме того, например, при $a = 1$ функция $f(x)$ возрастает на $(1, +\infty)$. Таким образом, ответы на вопросы г), д), е) да, на вопрос ж) нет.

Поскольку $f''(x) = 2x > 0$ при $0 < x < a$, то на интервале $(0, a)$ функция $f(x)$ является выпуклой. При $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant a$ функция $f(x)$ линейна, и графики этих линейных частей являются касательными, проведенными к графику функции $f(x)$ в точках с абсциссами $x = 0$, $x = a$. Поэтому график функции $f(x)$ лежит не ниже любой касательной, проведенной к этому графику. Значит, $f(x)$ является выпуклой функцией. Ответ на вопрос з) да.

5 Формат вступительного экзамена 2013 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей.

   Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 2 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет». Число вопросов в пределах каждого блока может быть различным.

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 2 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 480 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780—819 баллов	11
750—779 баллов	10
720—749 баллов	9
680—719 баллов	8
640—679 баллов	7
600—639 баллов	6
560—599 баллов	5
520—559 баллов	4
480—519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской Экономической Школе работают платные подготовительные курсы по математике, ориентированные на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов по математике в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей;
* подготовить к обучению в РЭШ.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Курс 100 ак. часов: февраль—июнь 2013 г. Начало занятий — 14 февраля.** Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда с 18:30, 3 ак. часа лекция, и пятница с 18:30, 2 ак. часа семинар).
* **Курс 72 ак. часа: апрель—июнь 2013 г. Начало занятий — 16 апреля.** В интенсивном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы. Занятия 2 раза в неделю (вторник и четверг, 18:30 по 3 ак. часа).

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. (495) 779-1401, email okulagin@nes.ru.

7 Подготовительные курсы по математике на видео

В апреле–июне 2010 года Российская экономическая школа совместно с Интернет университетом информационных технологий провела видеозапись курсов по математике 50 ак. часов. Все записи находятся в свободном доступе на сайте школы.

8 Календарь абитуриента 2013 г.

8.1 Дни открытых дверей

1 декабря 2012 г. (суббота), 11:00

13 февраля 2013 г. (среда), 18:30

6 апреля 2013 г. (суббота), 11:00

8.2 Заполнение анкеты с приложениями online

с 1 мая по 1 июля 2013 г.

8.3 Вступительные экзамены

с 8 по 14 июля 2013 г.

8.4 Прием документов для прошедших по конкурсу

до 30 июля 2013 г.

9 Адрес РЭШ

117418, Москва, Нахимовский проспект, 47 (здание ЦЭМИ РАН), 17 этаж, офис 1721, тел. (495) 779-1401, (495) 956-9508, (499) 129-3844, проезд до ст. метро «Профсоюзная». Email abitur@nes.ru. Web http://www.nes.ru.