Современная экономическая наука и образование
в России

Российская
экономическая
школа

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В РЭШ В 2009 ГОДУ

Москва 2009

Булавский В. А., Голованъ С. В., Девятов А. Е., Катышев П. К., Савватеев А. В.

Пособие по математике для поступающих в Российскую экономическую школу в 2009 году. — М., 2009 — 87 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ и дополняет справочник для поступающих в РЭШ в 2009 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене и дополняет справочник для поступающих в РЭШ.

Содержание экзамена в течение ряда лет оставалось неизменным, хотя формы экзамена менялись.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена. Требования, предъявляемые на вступительных экзаменах, содержатся в справочнике для поступающих в РЭШ.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2006—2008 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. Предел последовательности

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. Предел функции. Непрерывность функций (отображений)

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. **Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbb{R}^n$)**

   Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$**

   Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

    Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

    Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

    Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. Степенные ряды

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1958—87.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1989.

6. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

7. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Наука, 1982.

8. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

9. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

10. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. Определитель матрицы

Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. Линейные операторы

Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. Линейные преобразования векторных пространств

Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. Евклидовы пространства

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1974.

5. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.

6. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., Наука, 1970.

7. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.

8. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1984.

9. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.

10. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., Наука, 1963.

11. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

12. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., Наука, 1980.

13. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа.* (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

14. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М., Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2006 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

- правильный ответ — «+1»
- неправильный ответ — «−0.25»
- отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

- правильный ответ — «+1»
- неправильный ответ — «−1»
- отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Пусть A и B — две вещественные прямоугольные матрицы, имеющие размеры, соответственно, $m \times n$ и $s \times n$. Обозначим через L_1 множество решений системы $Ax = 0$, а через L_2 — множество решений системы $Bx = 0$. Тогда

A если $m + s > n$, то существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$

B если $m + s > n$, то $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

C если $m + s < n$, то $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$

D если $m + s < n$, то существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть A — вещественная кососимметрическая матрица, то есть для ее транспонированной выполняется равенство $A^T = -A$. Тогда

A если $A^2 = I$, то A — ортогональная матрица

B если $A^2 = -I$, то матрица A задает проектор

C если матрица A задает проектор, то $A = 0$

D если A ортогональная матрица, то у нее есть вещественное собственное число

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть L_1 и L_2 — подпространства в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim(L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$

B если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim L_1 + \dim L_2 \leqslant n$

C если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim(L_1 + L_2) > 0$

D если $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$, то подпространства L_1 и L_2 образуют прямую сумму

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, а I — единичная матрица того же порядка. Определим многочлен $p(\lambda)$ формулой $p(\lambda) = \det(I + \lambda A)$. Тогда

A многочлен $p(\lambda)$ имеет степень n

B если матрица A невырожденная, то многочлен $p(\lambda)$ имеет степень n^2

C многочлен $p(\lambda)$ имеет строго положительный корень

D если n нечетное, то многочлен $p(\lambda)$ имеет строго отрицательный корень

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть A и B — вещественные симметричные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A если A и B положительно определенные матрицы, то матрица AB имеет только вещественные положительные собственные числа

B $\qquad$ если A и B отрицательно определенные матрицы, то матрица AB имеет только вещественные отрицательные собственные числа

C $\qquad$ если матрица AB имеет только вещественные положительные собственные числа, то матрицы A и B положительно определенные

D $\qquad$ если матрица AB имеет только вещественные отрицательные собственные числа, то матрицы A и B отрицательно определенные

E $\qquad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение и предположим, что при любом вещественном α матрица $A + \alpha B$ задает оператор проектирования. Тогда

A $\qquad$ если n четное, то $B \neq 0$

B $\qquad$ если $B = 0$, то матрица A симметричная

C $\qquad$ если матрица A задает оператор ортогонального проектирования, то $A \neq B$

D $\qquad$ если матрица A не задает оператор проектирования, то $AB \neq BA$

E $\qquad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — вещественные матрицы, размеры которых равны, соответственно, $m \times n$ и $n \times m$. Тогда

A $\qquad$ если ранги матриц AB и A совпадают, то $m = n$ и матрица B невырожденная

B $\qquad$ если система $(AB)y = a$ имеет решение при любом $a \in \mathbf{R}^m$, то ранг матрицы A равен m

C $\qquad$ если матрица AB невырожденная, то и матрица BA невырожденная

D $\qquad$ если система $(BA)x = b$ имеет не более одного решения при каждом $b \in \mathbf{R}^n$, то ранг матрицы B равен m

E $\qquad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Определим функцию двух векторных аргументов $f(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, положив $f(x, y) = x^T A y$, где A — вещественная квадратная матрица порядка n. Тогда

A если матрица A симметричная, то $f(x,y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

B если функция $f(x,y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, то матрица A симметричная

C если матрица A невырожденная, то $f(x,y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

D если $x^T A x > 0$ при любом ненулевом $x \in \mathbf{R}^n$, то $f(x,y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — замкнутое подмножество $\mathbf{R}$, $a \in A$, $b \notin A$, $a < b$. Тогда

A найдется точка границы множества A, принадлежащая (a, b)

B найдется точка границы множества A, принадлежащая $[a, b)$

C найдется точка границы множества A, принадлежащая $(a, b]$

D не существует точки границы множества A, принадлежащей $[a, b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть M — компактное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A если M не имеет предельных точек, то M имеет мощность континуума

B если M не имеет предельных точек, то M счетное

C если M не имеет предельных точек, то M конечное

D если M не имеет предельных точек, то M пустое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Значение максимального решения задачи Коши $y' = -y^2$, $y(1) = 1$, в точке $x = -1$ равно

A 1

B 0

C -1

D e

E не определено

12. Решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$, $y(0) = y_0$, имеет предел $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1$. Тогда y_0 равно

A 0

B 1

C $e^{\pi/2}$

D $e^{-\pi/2}$

E не существует

13. Множество значений последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет ровно одну предельную точку. Тогда

A последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

B последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится

C последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная

D последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Наибольшее значение функции $f(x,y) = xy$ на множестве $M = \{(x,y)\colon -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}, y = \sqrt{2-x^2}\}$ достигается в точке (точках)

A $(1,1)$, $(-1,-1)$

B $(1,1)$

C $(-1,-1)$

D $(-1,1)$, $(1,-1)$

E не достигается ни в одной точке

15. Функция $f(x)$ определена на интервале (a,b). Тогда

A если $f(x)$ непрерывна на (a,b), то $f(x)$ ограничена на (a,b)

B если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то $f(x)$ ограничена на (a,b)

C если $f(x)$ непрерывна на (a,b), то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a,b)

D если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a,b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Кривая на плоскости (x, y) задана уравнением $6x^2 - 7xy - 2y^3 + 3 = 0$. Уравнение касательной к этой кривой, проведенной через точку $(1, 1)$, есть

A $8x - 13y + 5 = 0$

B $12x - 5y - 7 = 0$

C $5x - 13y + 8 = 0$

D $9x - 11y + 2 = 0$

E другое уравнение, не совпадающее ни с одном из перечисленных в A, B, C, D

17. Функция $f(x)$ задана и непрерывна в каждой точке числовой прямой, и $f(x) = \frac{x - \sin x}{2x^3}$ для $x \neq 0$. Тогда

A $f(0) = 0$

B $f(0) = 1/2$

C $f(0) = 1/6$

D $f(0) = 1/12$

E функция с указанными свойствами не существует

18. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана равенствами $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Тогда

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

B $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$

C $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$

D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует

19. Дана функция двух переменных $f(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2 + 6x + 10y + 5$. Тогда

A функция $f(x, y)$ на плоскости (x, y) имеет наибольшее значение и не имеет наименьшего значения

B функция $f(x, y)$ на плоскости (x, y) имеет наименьшее значение и не имеет наибольшего значения

C точка $(3,2)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y)$ на плоскости (x,y)

D точка $(2,4)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на плоскости (x,y)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Дана функция двух переменных $f(x,y) = e^{x^2+y}$ и множество $M = \{(x,y)\colon x + y \leqslant 2\}$. Тогда

A функция $f(x,y)$ на множестве M ограничена сверху и не ограничена снизу

B функция $f(x,y)$ на множестве M достигает наименьшего значения

C точка $(1/2, 3/2)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y)$ на множестве M

D точка $(0,0)$ является точкой локального минимума функции $f(x,y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Радиус сферы уменьшается со скоростью, пропорциональной площади поверхности сферы. В начальный момент времени ($t = 0$) радиус сферы равен 4, через две секунды радиус уменьшился в 2 раза. В какой момент времени радиус уменьшится в 4 раза?

A 4 сек.

B 6 сек.

C 8 сек.

D в другой момент времени, отличный от перечисленных в A, B, C

E такого момента времени не существует

22. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана равенствами $x_1 = a$, $x_{n+1} = e^{-x_n} + 2$, $n \geqslant 1$. Тогда

A при любом a последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ монотонно возрастает

B существует такое a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не ограничена сверху

C для любого $a \in [1, 2]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ имеет предел

D для любого $a \in [4, 6]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ имеет предел, и $\lim\limits_{t \to \infty} x_n < 2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Выберите ***ложное*** утверждение.

A пересечение счетного множества выпуклых подмножеств $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

B замыкание выпуклого подмножества $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

C внутренность выпуклого подмножества $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

D выпуклая функция, определенная на выпуклом замкнутом множестве $M \subset \mathbf{R}^n$, непрерывна на M

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

24. Дана функциональная последовательность $\{f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-\sqrt{nx}}, n = 1, 2, \dots\}$. Обозначим через M множество таких $x \in \mathbf{R}$, что существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, и пусть $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ на M. Тогда

A множество M открыто

B функция $f(x)$ имеет разрыв на M

C существует такой интервал $(a, b) \subset M$, что последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ не сходится равномерно на (a, b)

D для любого отрезка $[a, b] \subset M$ последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на $[a, b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x - 1}{x} \right)^n .$$

Пусть M — множество точек на числовой прямой $\mathbf{R}$, в которых ряд сходится. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

A множество M открыто

B $S(x) \geqslant 0$ при любом $x \in M$

C на интервале $(1/4, 1/3)$ ряд сходится к функции $S(x)$ равномерно

D функция $S(x)$ непрерывна на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Неопределенный интеграл
$$\int \frac{dx}{x^2+x}$$
равен

A $\dfrac{6}{2x^3+3x^2}+C$

B $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$

C $\ln|x^2+x|+C$

D $\ln\left|\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2\right|+C$

E $\ln\left|1+\dfrac{1}{x}\right|+C$

27. Неопределенный интеграл
$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$
равен

A $\dfrac{1}{2}x^2\ln|x^2+1|+C$

B $\dfrac{1}{x^2/2+\ln|x|}+C$

C $\ln|\operatorname{arctg} x|+C$

D $\operatorname{arctg} x+C$

E $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$

28. Определенный интеграл
$$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{2-x^2}}$$
равен

A $-\pi/4$

B $\pi/4$

C $-1/\sqrt{2}$

D $1/\sqrt{2}$

E $\pi/2$

29. Определенный интеграл

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \mathrm{tg}^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\right) dx$$

равен

A $\mathrm{tg}(7/2) - \mathrm{tg}\, 2$

B $\mathrm{tg}(5/2) - \mathrm{tg}\, 2$

C $1/2$

D $(\mathrm{tg}(7/2))^2 - (\mathrm{tg}\, 2)^2$

E $(\mathrm{tg}(5/2))^2 - (\mathrm{tg}\, 2)^2$

30. Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, равна

A $1/6$

B $1/3$

C $1/2$

D $2/3$

E 1

31. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}}{\sin \sqrt[3]{x}}$ равен

A $-2/3$

B $2/3$

C $3/2$

D 2

E не существует

32. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)^{(1-x)/x^2}$ равен

A $2 \ln \dfrac{1}{2}$

B $e^{-1/2}$

C $e^{1/2}$

D e^{-2}

E e^2

33. При каком наибольшем значении целого положительного числа k максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = x^k$, $x(0) = 1$ определено в точке $t = \pi/12$?

A 1

B 2

C 3

D 4

E другом

34. Пусть функция $f(x)$ определена, ограничена и непрерывна вместе со своей производной на $\mathbf{R}$, и пусть

$$g(x) = \begin{cases} [f^2(x)]^{f^2(x)}, & \text{если } f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны:

I. Функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

II. Функция $g(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$.

III. Функция $g(x)$ дифференцируема $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E ни одно из I, II и III

35. Сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

равна

A 2

B 4

C 6

D 1

E другому числу

36. Значение максимального (непродолжаемого) решения задачи Коши $\frac{dy}{dx} = $ $= y \sin x$, $y(\pi/2) = -\pi^3/48$ в точке $x = -\pi/2$

A равно $-\pi^3/16$

B равно $-\pi^3/48e$

C равно $-\pi^3/48$

D равно другому числу

E не существует

37. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $4x^2y - \sin xy + 3y^2 = 12$. Производная $\frac{dy}{dx}$ в точке $(0, 2)$

A равна $1/6$

B равна $-1/6$

C равна $-1/12$

D равна $1/12$

E равна другому числу или не существует.

38. Множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^{2n} x$ есть

A $\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$

B открытое множество, отличное от $\mathbf{R}$

C замкнутое множество, отличное от $\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$ и от $\mathbf{R}$

D $\mathbf{R}$

E Ни одно из A, B, C, D.

39. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $3x^5y^2 - 4xy^3 + 2x^2y^3 + 3x^4y^3 = 2$. Производная $\frac{dy}{dx}$ в точке $(1, -1)$ равна

A $\quad 0$

B $\quad -3$

C $\quad -1$

D $\quad 1$

E $\quad$ другому числу

40. Сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

равна

A $\quad \ln\frac{3}{2} - 1$

B $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - 1$

C $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$

D $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

E $\quad$ другому числу

2.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть положительные числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$, таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Функции $f_n(x)$ заданы формулами

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{nx^n}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ a_n \cdot \left(3x^2/2 + x\right), & \text{если } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^n}{(n-1)!}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится для любой точки $x \in \mathbf{R}$;

Да $\qquad\qquad$ Нет

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на своей области сходимости;

Да $\qquad\qquad$ Нет

в) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $f_n(x)$ непрерывна для любого n;

Да Нет

г) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что каждая $f_n(x)$ имеет ровно одну точку разрыва;

Да Нет

д) функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на своей области определения;

Да Нет

е) функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ положительна на своей области определения;

Да Нет

ж) для любой последовательности $\{a_n\}$ функции $f_n(x)$ дифференцируемы во всех точках, в которых непрерывны;

Да Нет

з) последовательность $g_N(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\right)^2}$ сходится к $g(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)^2}$ равномерно на своей области сходимости.

Да Нет

2. В пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, введено стандартное скалярное произведение, при котором матрица A порядка n задает ортогональный проектор. Столбцы $u \in \mathbf{R}^n$ и $v \in \mathbf{R}^n$ выбраны так, что матрица $A + uu^{\mathsf{T}}$ является невырожденной, а матрица $A + vv^{\mathsf{T}}$ — вырожденной (индекс T обозначает транспонирование). Тогда

а) матрица $A + uu^{\mathsf{T}}$ положительно определенная;

Да Нет

б) матрица $A + vu^{\mathsf{T}}$ вырожденная;

Да Нет

в) матрица $A + 2vv^{\mathsf{T}}$ положительно определенная;

Да Нет

г) ранг матрицы A не меньше, чем $n-1$;

Да Нет

д) ранг матрицы A не больше, чем $n-2$;

Да Нет

е) матрица $A + Auu^{\mathsf{T}}A$ положительно определенная;

Да Нет

ж) у матрицы $A - uu^{\mathsf{T}}$ есть строго отрицательное собственное число;

Да Нет

з) число 1 является собственным числом матрицы $A - uu^{\mathsf{T}}$.

Да Нет

3. Дана функция $f(x,y) = 2x^2 - 7y^2$ и множество $M = \{(x,y)\colon 4x^4 + y^4 = 4x^2 - 2y^2\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в четырех точках;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в трех точках;

Да Нет

в) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в четырех точках;

Да Нет

г) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в трех точках;

Да Нет

д) наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M равно 2;

Да Нет

е) наименьшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M равно 0;

Да Нет

ж) существует точка, принадлежащая M и являющаяся точкой локального минимума функции $f(x, y)$, в которой не достигается наименьшее значение функции $f(x, y)$ на M;

Да Нет

з) существует точка, принадлежащая M и являющаяся точкой локального максимума функции $f(x, y)$, в которой не достигается наибольшее значение функции $f(x, y)$ на M.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{n^{\alpha}},$$

где α — некоторый параметр. Пусть M — множество его сходимости. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

а) при любом $\alpha \in (0, 1)$ множество M непусто и замкнуто;

Да Нет

б) при любом $\alpha \in (0, 1)$ множество M не ограничено;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ непрерывна на множестве M;

Да Нет

г) при любом $\alpha \in [1, +\infty)$ функция $S(x)$ ограничена на любом ограниченном подмножестве множества M;

Да Нет

д) при $\alpha = 2$ существует такая точка $x_0 \in M$, что $S(x_0) = 2$;

Да Нет

е) при любом $\alpha \in [0, +\infty)$ ряд сходится к функции $S(x)$ равномерно на любом компактном подмножестве множества M;

Да Нет

ж) при $\alpha = 1$ ряд сходится равномерно на интервале $(0, 1)$;

Да Нет

з) существует $\alpha > 0$, такое что график функции $S(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

5. Пусть для всех $x \in \mathbf{R}$ функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{2+x}^{1+e^x} \frac{t}{1+t^4}\,dt.$$

Тогда

а) функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbf{R}$;

Да Нет

в) $f(x) \geqslant 0$ для всех x, в которых она определена;

Да Нет

г) $f'(x) \neq 0$ для всех x, в которых $f(x)$ дифференцируема;

Да Нет

д) $f(0) = 0$;

Да Нет

е) $f'(0) = 1$;

Да Нет

ж) предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;

Да Нет

з) предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** C. **3.** E. **4.** E. **5.** A. **6.** D. **7.** B. **8.** B. **9.** B. **10.** C. **11.** E. **12.** D. **13.** E. **14.** B. **15.** E. **16.** C. **17.** D. **18.** C. **19.** E. **20.** E. **21.** B. **22.** C. **23.** D. **24.** D. **25.** D. **26.** B. **27.** E. **28.** E. **29.** B. **30.** B. **31.** D. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** C. **36.** C. **37.** A. **38.** B. **39.** D. **40.** D.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Легко видеть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится для всех $x \in (-1, 0)$, и его сумма равна $3x^2/2 + x$. Для $x \geqslant 1$ ряд сходится (но не равномерно, поскольку функции $f_n(x)$ неограничены) к xe^x, а для $x \leqslant -1$ ряд сходится к $-\ln(1 - 1/x)$. Ответ на вопрос а) да, на вопрос б) нет. Кроме того, видно, что предел функции $f(x)$ справа в точке $x = -1$ равен $1/2$, а значение в этой точке равно $-\ln 2$. Ответы на вопросы д) и е) нет.

Далее видно, что независимо от a_n, все функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $x = 0$ (и равны нулю). Так что если выбрать a_n, позаботившись лишь о том, чтобы $\dfrac{a_n}{2} \neq \dfrac{(-1)^n}{n}$, то все функции $f_n(x)$ будут иметь разрыв в единственной точке $x = -1$. Вообще не иметь разрыва все функции $f_n(x)$ не могут. Например, для нечетных n значение в точке $x = -1$ отрицательно, а предел справа положителен. Ответ на вопрос в) нет, на вопрос г) да. Далее, правая производная функции $f_n(x)$ в точке $x = 0$ равна нулю для всех $n > 1$, а левая производная в той же точке равна a_n, что не обязательно то же самое. Ответ на вопрос ж) нет.

Исследуем теперь равномерную сходимость последовательности $g_N(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\right)^2}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на всем $\mathbf{R}$, то и $g_N(x)$ сходится к $g(x)$ на всем $\mathbf{R}$. Рассмотрим сходимость этой последовательности отдельно на трех множествах: $(-1, 0)$, $(-\infty, -1]$, $[0, +\infty)$.

Нетрудно видеть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на интервале $(-1, 0)$ равномерно (это следует из ограниченности функции $3x^2/2 + x$). Так как функция $\dfrac{1}{1 + x^2}$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то последовательность $g_N(x)$ суперпозиций этой функции с частичными суммами ряда тоже сходится равномерно.

На множестве $(-\infty, -1]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ является рядом Лейбница. Так как $f_n(x)$ равномерно стремится к нулю на $(-\infty, -1]$, то и сам ряд сходится равномерно. Равномерная сходимость последовательности $g_N(x)$ следует из равномерной непрерывности функции $\dfrac{1}{1 + x^2}$.

При $x \in (0, +\infty)$ все функции $f_n(x)$ неотрицательные и монотонно возрастающие. Следовательно, все частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ тоже неотрицательные и монотонно возрастающие. А значит функции $g_N(x)$ все монотонно убывающие. Кроме того, $g_N(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, и сходимость $g_N(x)$ к $g(x)$ монотонная при всех $x \in \mathbf{R}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $g_N(x)$ убывают по N и стремятся к нулю при $x \to +\infty$, то найдется такое $M > 0$, что при всех N и при всех $x > M$ выполнено неравенство $0 < g(x) < g_N(x) < \varepsilon$.

На отрезке $[0, M]$ последовательность непрерывных функций $g_N(x)$ монотонно сходится к непрерывной функции $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2 e^{2x}}$. Следовательно, сходимость равномерная, и найдется такое $N_0 \in \mathbf{N}$, что для всех $N > N_0$ и $x \in [0, M]$ выполняется неравенство $|g_N(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, получили, что при всех $N > N_0$ и $x \in [0, +\infty)$ справедливо неравенство $|g_N(x) - g(x)| < \varepsilon$. Это и значит, что последовательность $g_N(x)$ равномерно сходится к $g(x)$ на $[0, +\infty)$.

Следовательно, $g_N(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на объединении всех трех множеств, т. е. на $\mathbf{R}$. Ответ на вопрос з) да.

Задача 2. Как ортогональный проектор матрица A симетричная и положительно полуопределенная, т. е. $z^T A z \geqslant 0$ при всех $z \in \mathbf{R}^n$. Тогда $z^T(A + uu^T)z = z^T A z + (u^T z)^2 \geqslant 0$ при всех $z \in \mathbf{R}^n$, так что матрица $A + uu^T$ тоже положительно полуопределенная. Так как эта матрица невырожденная по условию задачи, то она и положительно определена. По аналогичным причинам матрица $A + vv^T$ тоже полуопределенная, но так как она вырожденная, то существует $z \in \mathbf{R}^n$, $z \neq 0$, при котором $z^T A + (z^T v)v^T = 0$. Тогда $z^T A z + (z^T v)^2 = 0$, и так как $z^T A z \geqslant 0$, то $z^T A z = 0$ и $z^T v = 0$. Первое равенство для полуопределенной симметричной матрицы A означает, что $z^T A = 0$. Поэтому $z^T(A + vu^T) = 0$, $z^T(A + 2vv^T) = 0$ и $z^T(A + Auu^T A) = 0$. Таким образом, ответы на пункты а) и б) да, на пункты в) и е) нет. Кроме того, матрица A вырожденная. В то же время ввиду невырожденности матрицы $A + uu^T$ система $z^T A = 0$, $z^T u = 0$ имеет только нулевое решение, т. е. расширенная матрица $[A, u]$ имеет ранг n. Поэтому матрица A имеет ранг ровно $n - 1$. Ответы на пункт г) да, на пункт д) нет.

Воспользовавшись вырожденностью матрицы A, выберем $z \in \mathbf{R}^n$, $z \neq 0$, $z^T A = 0$. При этом, как было отмечено выше, $z^T u \neq 0$, так что $z^T(A - uu^T)z = -(z^T u)^2 < 0$. То есть симметричная матрица $A - uu^T$ не является положительно полуопределенной, и у нее должно быть строго отрицательное собственное число. Ответ на пункт ж) да. Если $n = 2$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то все условия задачи выполнены, но матрица $A - uu^T$ не имеет 1 в качестве собственного числа. Этот контрпример показывает, что ответ на пункт з) нет.

Задача 3. Так как множество M компактное, а целевая функция непрерывна, то ее наибольшее и наименьшее значения на M достигаются, а соответствующие точки находятся либо среди стационарных точек, либо среди нерегулярных точек.

Нерегулярная точка (в которой производные функции, задающей множество M, равны нулю) в данной задаче одна: $x = 0$, $y = 0$.

Функция Лагранжа для этой задачи следующая:

$$L = 2x^2 - 7y^2 + \lambda(4x^4 + y^4 - 4x^2 + 2y^2).$$

Дифференцируя по x и y, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + \lambda(16x^3 - 8x) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -14y + \lambda(4y^3 + 4y) = 0.$$

Добавив к этой системе уравнение

$$4x^4 + y^4 = 4x^2 = 2y^2 \tag{1}$$

и решив полученную систему из трех уравнений, получим 7 стационарных точек:

$$\begin{array}{llll}
x = 0, & y = 0, & \lambda \text{ не определено}, & f(0,0) = 0, \\
x = -1, & y = 0, & \lambda = -\frac{1}{2}, & f(-1,0) = 2, \\
x = 1, & y = 0, & \lambda = -\frac{1}{2}, & f(1,0) = 2, \\
x = -\sqrt{\frac{2}{5}}, & y = -\sqrt{\frac{2}{5}}, & \lambda = \frac{5}{2}, & f\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -2, \\
x = -\sqrt{\frac{2}{5}}, & y = \sqrt{\frac{2}{5}}, & \lambda = \frac{5}{2}, & f\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -2, \\
x = \sqrt{\frac{2}{5}}, & y = -\sqrt{\frac{2}{5}}, & \lambda = \frac{5}{2}, & f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -2, \\
x = \sqrt{\frac{2}{5}}, & y = \sqrt{\frac{2}{5}}, & \lambda = \frac{5}{2}, & f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right) = -2.
\end{array}$$

(Заметим, что нерегулярная точка оказалась среди стационарных.)

Сравнивая значения функции $f(x, y)$ в стационарных точках, нетрудно заметить, что наибольшее значение функции на M равно 2 (достигается в двух точках), наименьшее значение функции на M равно -2 (достигается в четырех точках). Таким образом, ответы на вопросы а), б), г), е) нет, на вопрос в), д) да.

Единственная стационарная точка, в которой не достигается наибольшее или наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M, это точка $x = 0$, $y = 0$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки.

Выразив y^2 из соотношения (1), получим: $y^2 = 2x^2 - 2x^4 - y^4/2$ на множестве M. Подставив это выражение в $f(x,y)$, получим:

$$f(x,y) = 2x^2 - 7y^2 = 2x^2 - 7(2x^2 - 2x^4 - y^4/2) = -12x^2 + 14x^4 + 7/2y^4.$$

Заметим, что так как $4x^4 + y^4 \geqslant 0$, то при всех $(x,y) \in M$ выполняется неравенство $y^2 \leqslant 2x^2$ (и $y^4 \leqslant 4x^4$). Следовательно, при всех $(x,y) \in M$

$$f(x,y) = -12x^2 + 14x^4 + 7/2y^4 \leqslant -12x^2 + 28x^4.$$

Осталось заметить, что при $x \neq 0$, достаточно малых по абсолютной величине, величина в правой части неравенства отрицательная. Значит, точка $(0,0)$ является точкой локального максимума функции $f(x,y)$ на множестве M. Ответ на вопрос ж) нет, на вопрос з) да.

Задача 4. Заметим, во-первых, что если $x \in M$, то $x \geqslant 0$, а, во-вторых, что указанный ряд при $x = 1$ сходится для любого α. Из формулы Тейлора легко следует, что

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{n^\alpha} = \frac{\ln x}{n^{\alpha+1}} + \frac{g(n,x)}{n^{\alpha+1}}, \tag{2}$$

где функции $g(n,x)$ обладают следующим свойством:

для любого отрезка $[a,b] \subset (0,+\infty)$ существует последовательность $\{c_n, n = 1,2,\ldots\}$, такая что $|g(n,x)| \leqslant c_n$ при любом $x \in [a,b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. (3)

Таким образом, применяя интегральный признак Коши, получаем, что если $\alpha > 0$, то ряд сходится в любой точке $x > 0$; если $\alpha \leqslant 0$, то ряд расходится в любой точке $x > 0$, $x \neq 1$. В точке $x = 0$ ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Окончательно получаем:

$M = \{1\}$ при $\alpha \leqslant 0$,

$M = (0,+\infty)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$,

$M = [0,+\infty)$ при $1 < \alpha$.

Таким образом, на вопрос а) ответ нет, на вопрос б) — да.

Если $\alpha > 0$, то из (2), (3) и признака Вейерштрасса следует, что на любом отрезке $[a,b] \subset (0,+\infty)$ ряд сходится равномерно. Следовательно, при $\alpha > 0$ функция $S(x)$ непрерывна на $(0,+\infty)$. Поэтому на вопросы в) и е) ответы да. (Напомним, что при $\alpha = 0$ множество M состоит из одной точки.)

При любом α каждое слагаемое ряда является возрастающей по x функцией, поэтому функция $S(x)$ также является возрастающей. При этом, если $x < 1$, то $S(x) < 0$, а при $x \to +\infty$ функция $S(x)$ стремится к $+\infty$. Поэтому на вопрос д) ответ да.

Покажем, что при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ не ограничена на интервале $(0,1)$. Действительно, так как функция $S(x)$ возрастает на интервале $(0,1)$, то существует конечный или равный $-\infty$ предел $A = \lim\limits_{x\to 0+} S(x)$. Пусть $S^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[k]{x}-1}{k}$ — n-я частичная сумма ряда. Поскольку при $x < 1$ все слагаемые ряда отрицательны, то $S(x) < S^{(n)}(x)$ при каждом n. Переходя к пределу при $x \to 0+$, получаем $A < -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, и из расходимости гармонического ряда следует, что $A = -\infty$. Значит, на вопрос г) ответ нет, а на вопрос з) — да.

Поскольку при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ не ограничена на интервале $(0,1)$, а каждая частичная сумма $S^{(n)}(x)$, очевидно, ограничена на этом интервале, то на $(0,1)$ сходимость ряда не может быть равномерной. Ответ на вопрос ж) нет.

Задача 5. Неопределенный интеграл

$$\int \frac{t}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2) + C.$$

Соответственно,

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((1+e^x)^2\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((2+x)^2\right).$$

Эта функция определена на $\mathbf{R}$, непрерывна на $\mathbf{R}$, поскольку является композицией непрерывных на $\mathbf{R}$ функций, и дифференцируема на $\mathbf{R}$, поскольку является композицией дифференцируемых на $\mathbf{R}$ функций.

Заметим, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left((1+e^x)^2\right) = \pi/4$, а $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left((2+x)^2\right) = \pi/2$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/8 < 0$. Поэтому найдется $x \in \mathbf{R}$, в котором $f(x) < 0$.

Кроме того, прямой подстановкой можно убедиться в том, что $f(0) = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)e^x}{1+(1+e^x)^4} - \frac{(2+x)}{1+(2+x)^4}.$$

Соответственно,

$$f'(0) = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0 \neq 1.$$

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{e^{3x}} + \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{1}{e^{4x}} + \left(1+\frac{1}{e^x}\right)^4} - \frac{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \left(1+\frac{2}{x}\right)^4} \right) = 0$$

и

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(1+e^x)e^x}{1+(1+e^x)^4} - \frac{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \left(1+\frac{2}{x}\right)^4} \right) = 0.$$

Таким образом, ответы на вопросы: а) — да, б) — да, в) — нет, г) — нет, д) — да, е) — нет, ж) — да, з) — да.

3 Вступительный экзамен 2007 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Пусть M — не более, чем счетное подмножество вещественной прямой $\mathbf{R}$, и точка $x \in M$. Тогда

A если x граничная точка множества M, то x предельная точка множества M

B если x граничная точка множества M, то x изолированная точка множества M

C если x изолированная точка множества M, то x предельная точка множества M

D если x предельная точка множества M, то x граничная точка множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть M — непустое подмножество вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A множество граничных точек M пустое

B множество граничных точек M непустое

C множество граничных точек M открытое

D множество граничных точек M замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть M — множество значений непрерывной функции, отображающей $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$. Тогда

A множество M ограниченное

B множество M неограниченное

C множество M открытое

D множество M замкнутое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Максимальное решение задачи Коши $y' = -\dfrac{y^2}{x}$, где $y(e) = 1$, определено на множестве

A $(0, +\infty)$

B $(1, +\infty)$

C $(0, e^2)$

D $(-\infty, e^2)$

E $(-\infty, +\infty)$

5. Значение максимального решения задачи Коши $y' = x + y$, где $y(-1) = 0$, в точке $x = 1$ равно

A 0

B -1

C -2

D $-e$

E не определено

6. Даны функция $f(x, y) = (x - y)^2$ и множество $M = \{(x, y) \colon x^2 - y^2 = 1\}$. Тогда

A наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается в единственной точке

B наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается более, чем в одной точке

C наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается в единственной точке

D наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M достигается более, чем в одной точке

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Даны функция $f(x, y) = 2x + y$ и множество $M = \{(x, y) \colon |y| \leqslant 1, |x + y| \leqslant 1\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(0, 1)$

B функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(1, 0)$

C функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(2, -1)$

D функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в точке $(3, -2)$

E наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M не существует

8. Задана матрица A с размерами $m \times n$. Тогда

A если строки матрицы A линейно независимые, то $m > n$

B если строки матрицы A линейно зависимые, то $m > n$

C если $m > n$, то строки матрицы A линейно независимые

D если $m > n$, то строки матрицы A линейно зависимые

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть L_1 и L_2 — подпространства пространства $\mathbf{R}^n$ с размерностями n_1 и n_2, соответственно. Тогда

A если $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$, то $n_1 + n_2 = n$

B если $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$, то размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ больше нуля

C если $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$, то $n_1 + n_2 \leqslant 2n$

D если $n_1 + n_2 = n$, то $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Заданы две матрицы A и B одинаковых размеров $m \times n$, причем у матрицы A линейно независимые строки. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Существует такая матрица C, что $AC = B$.

II. Если у матрицы B линейно независимые столбцы, то матрица $B^T A$ невырожденная (здесь B^T — транспонированная к B).

III. Если у матрицы B линейно независимые столбцы, то матрица AB^T невырожденная.

A I, II и III

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только I

11. Пусть A и B — две вещественные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Через $\varphi(\lambda)$ обозначим определитель матрицы $A + \lambda B$. Тогда

A если n нечетное, то график функции $\varphi(\lambda)$ имеет точку перегиба

B график функции $\varphi(\lambda)$ не имеет горизонтальной асимптоты

C существуют матрицы A и B, при которых график функции $\varphi(\lambda)$ имеет наклонную (не вертикальную и не горизонтальную) асимптоту

D при четном n функция $\varphi(\lambda)$ имеет точку локального минимума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Будем трактовать вещественные квадратные матрицы порядка n как линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, а через $\operatorname{Ker} X$ и $\operatorname{Im} X$ будем обозначать, соответственно, ядро и образ матрицы X. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A если существует вектор $x \in (\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Im} A)$, то матрица A вырожденная

B существует матрица A, при которой $\operatorname{Im}(A^2 - A) = \varnothing$

C если сумма размерностей $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ равна семи, то у матрицы A имеется вещественное собственное число

D $\operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker} A$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, трактуемая как линейный оператор из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Если у матрицы A имеются инвариантные подпространства L_1 и L_2, пересечение которых одномерно, то у матрицы A есть вещественное собственное число.

II. Число различных инвариантных подпространств у матрицы A не превосходит $n!$.

III. При $n = 7$ у матрицы A имеется 6-мерное инвариантное подпространство.

A I, I и III

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только I

14. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, I — единичная матрица порядка n и $B = I - 2A$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Если A задает оператор проектирования, то B ортогональная матрица.

II. Если A задает оператор проектирования, то B невырожденная матрица.

III. Если A задает ортогональный проектор, то B ортогональная матрица.

A I, I и III

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только I

15. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, имеющая n различных строго положительных собственных чисел. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Симметризация $\frac{1}{2}(A + A^T)$ матрицы A является положительно определенной матрицей.

II. Не существует матрицы A, для которой симметризация $\frac{1}{2}(A + A^T)$ является отрицательно определенной матрицей.

III. Существуют две линейно независимые системы векторов $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$ в $\mathbf{R}^n$, при которых $y_j^T A x_i = 0$ при $i \neq j$ и $y_i^T A x_i = 1$ при всех i.

A I, I и III

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только III

16. Кривая на плоскости задана уравнением $x^2 + 2xy + 3x + y^3 = 15$. Через точку $(2, 1)$ проведена касательная к этой кривой. Отрезок касательной, заключенный между осями координат, и отрезки на осях координат, отсекаемые касательной, образуют треугольник, площадь которого равна

A 625/126

B 576/119

C 476/129

D 825/226

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

17. Функция $f(x)$ задана на множестве $M \subset \mathbf{R}$, непрерывна на M и дифференцируема в каждой точке $\operatorname{int} M$, где $\operatorname{int} M$ — множество внутренних точек множества M. Тогда

A если множество M не ограничено и производная $f'(x)$ не ограничена на $\operatorname{int} M$, то функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве M

B если множество M ограничено и производная $f'(x)$ не ограничена на $\operatorname{int} M$, то функция $f(x)$ не ограничена на множестве M

C если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M, то производная $f'(x)$ ограничена на $\operatorname{int} M$

D если множество M не ограничено и функция $f(x)$ не ограничена на M, то производная $f'(x)$ не ограничена на $\operatorname{int} M$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. Пусть M — множество двумерной плоскости xOy, где сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(|x|+|y|)^{2n}$. Тогда

A множество M неограниченное

B множество M замкнутое

C внутренность множества M совпадает с внутренностью некоторого квадрата

D граница множества M — пустое множество

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Множество $M \subset \mathbf{R}^2$ имеет граничные точки, не принадлежащие M. Какие из следующих утверждений (I, II, III, IV) истинные?

I. Множество M открыто.

II. Множество изолированных точек множества M не пусто.

III. Множество M бесконечно.

IV. Существует предельная точка множества M, не принадлежащая M

A только I и III

B только II и III

C только III и IV

D только I, III, IV

E I, II, III, IV

20. Пусть $f_n(x) = n\left((x^2+x+1)^{1/n}-1\right)$ и пусть M — множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Множество M совпадает с множеством всех вещественных чисел.

II. $f(x) \geqslant 0$ при любом $x \in M$.

III. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 1$ и $f'(1) = 1$.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E только III

21. Пусть для $x \neq 1$

$$f_n(x) = n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(x+1)/(x-1)} - 1\right)$$

и пусть M — множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Тогда

A $M = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

B график функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту

C функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 2$ и $f'(2) = -4$

D	функция $f(x)$ на множестве M имеет не менее двух локальных минимумов

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

22. Каждая точка множества $M \subset \mathbf{R}$ является изолированной. Тогда

A	множество M замкнуто

B	множество M не ограничено

C	множество M не имеет предельных точек

D	множество M не более чем счетно

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$. Пусть M — множество его сходимости. Тогда

A	$M = \{0\}$

B	$M = (-1, 1)$

C	$M = [0, +\infty)$

D	$M = [-1, 1]$

E	множество M не совпадает ни с одним из множеств в A, B, C, D

24. Функция $f(x)$ определена на $[0, +\infty)$, неотрицательная и строго убывает на всей области определения. Тогда

A	ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$ сходится

B	если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$ сходится

C	функция $f(x)$ положительная на всей области определения

D	если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две монотонные функции, заданные на $\mathbf{R}$, причем $g(x) \neq 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда

A $\quad$ функция $f(x)+g(x)$ монотонная

B $\quad$ функция $f(x)g(x)$ монотонная

C $\quad$ функция $f(x)/g(x)$ монотонная

D $\quad$ функция $(f(x))^2$ монотонная

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. На $\mathbf{R}^2$ задана непрерывная функция $f(x)$. Тогда

A $\quad$ если $(f(x))^2$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$, то $f(x)$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$

B $\quad$ существует такая $f(x)$, что $f(x)$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$, но $(f(x))^2$ не дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$

C $\quad$ функция $\sqrt{|f(x)|}$ непрерывная на $\mathbf{R}^2$

D $\quad$ функция $\sqrt{|f(x)|}$ дифференцируемая на $\mathbf{R}^2$

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Пусть a и b — вещественные числа. Последовательность 1, a, b, a^2, ab, b^2, a^3, a^2b, ab^2, b^3, a^4, a^3b, $\ldots$ сходится тогда и только тогда, когда

A $\quad$ $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$

B $\quad$ $-1 \leqslant a < 1$, $-1 \leqslant b < 1$

C $\quad$ $-1 \leqslant a \leqslant 1$, $-1 \leqslant b \leqslant 1$

D $\quad$ $-1 < a < 1$, $-1 < b < 1$ или $a = b = 1$

E $\quad$ $-1 < ab < 1$

28. Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, и образуем третью последовательность $\{c_n\}$ чередованием: $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда

A $\quad$ если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то $\{c_n\}$ сходится

B $\quad$ если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонные, то $\{c_n\}$ монотонная

C $\quad$ если обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ монотонно убывают, то $\{c_n\}$ монотонно убывает

D $\quad$ если $\{c_n\}$ сходится, то обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся

E $\quad$ все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Дан числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда

A если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ тоже сходится

B если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ тоже сходится

C если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ln n$ тоже сходится

D если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд, полученный из него любой перестановкой его членов, тоже сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$. При этом для всех вещественных x и y выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$. Выберите *ложное* утверждение:

A функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$

B функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbf{R}$

C функция $f(x)$ постоянна на $\mathbf{R}$

D существует строгий локальный максимум функции $f(x)$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

31. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ равен

A $1/\sqrt[3]{e}$

B $1/2$

C $1/e$

D $1/e^3$

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

32. Предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$ равен

A $1/6$

B $1/3$

C 0

D 3

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

33. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)+\sin x}{x^2}$ равен

A 0

B $-1/2$

C -1

D -2

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

34. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(e^{1-\cos(1/n)}-1\right)$ равен

A e

B $1/4$

C $1/2$

D 1

E другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C, D

35. Интеграл $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln x dx$ равен

A $\dfrac{2}{9}e^3$

B $\dfrac{1}{3}e^3$

C $\dfrac{2}{9}e^3+\dfrac{1}{9}$

D $\dfrac{1}{3}e^3+\dfrac{1}{9}$

E $\dfrac{1}{3}e^3+\dfrac{2}{9}$

36. Интеграл $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ равен

A $\ln(1+\sqrt{e})-\ln 2$

B $\ln(1+e)-\ln 2$

C $2\ln(1+\sqrt{e})-\ln 2$

D $2\ln(1+e)-\ln 2$

E $2\ln(1+e)-2\ln 2$

37. Пусть $y(x)$ есть максимальное решение задачи Коши

$$y' = -\frac{x+1/2}{x^2+x+1}y$$

при начальном условии $y(0)=1$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$

A равен -1

B равен 0

C равен 1

D равен e^2+e+1

E не существует

38. Пусть M есть множество пар (x,y) на плоскости $\mathbf{R}^2$:

$$M = \left\{(x,y)\colon |y| \leqslant \sin\frac{1}{x}\right\}.$$

Тогда

A множество M открыто

B множество M замкнуто

C множество M ограничено

D множество M имеет конечную площадь

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Пусть $y(x)$ есть максимальное решение задачи Коши $y' = 2-\dfrac{y}{x}$ при начальном условии $y(1)=2$. Тогда наименьшее значение функции $y(x)$ на ее области определения есть

A 0

B $\dfrac{1}{e^2}$

C 1

D 2

E не существует

40. Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = 0$, $y = \sin x$ и $y = \cos x$ при $x \in [0, \pi/2]$, равна

A $\quad 2 - 1/\sqrt{2}$

B $\quad 1$

C $\quad 2 - \sqrt{2}$

D $\quad 2 - \pi/2$

E $\quad 2$

3.1.2 Вторая часть теста

1. Последовательность функций $f_n(x)$ на множестве *неотрицательных* вещественных чисел x задается формулой:

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^2 - n(n+1)t + n^3},$$

для всех натуральных $n \geqslant 2$. Пусть D_n есть область определения функции $f_n(x)$, а Z_n есть область значений функции $f_n(x)$. Тогда

а) для любого $x \in [0, +\infty)$ найдется $n \geqslant 2$, такое что $x \in D_n$;

Да Нет

б) для любого $y \in (-\infty, +\infty)$ найдется $n \geqslant 2$, такое что $y \in Z_n$;

Да Нет

в) для любого x, такого что $x \in D_N$ для некоторого N, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$;

Да Нет

г) для любого x, такого что $x \in D_N$ для некоторого N, $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = 0$;

Да Нет

д) для любого $n \geqslant 2$ и для любого $x \in D_n$, $f'_n(x) > 0$;

Да Нет

е) для любого $n \geqslant 2$ и для любого $x \in D_n$, $f''_n(x) > 0$;

Да Нет

ж) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n(n-1)$ сходится;

Да Нет

з) ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n'(n-1)$ сходится.

Да Нет

2. Рассмотрим последовательность $b_n = \sqrt[n]{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, а также последовательность a_n, рекуррентно заданную как $a_1 = 1$, $a_n = b_n a_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. Тогда

а) все члены последовательности $\{b_n\}$ различны;

Да Нет

б) последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывает, начиная с некоторого члена;

Да Нет

в) последовательность $\{b_n\}$ сходится;

Да Нет

г) начиная с некоторого n, выполняется неравенство $b_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$;

Да Нет

д) начиная с некоторого n, выполняется неравенство $b_n \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$;

Да Нет

е) последовательность $\{a_n\}$ сходится;

Да Нет

ж) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ расходится при $x = 1/e$;

Да Нет

з) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости, равный 1.

Да Нет

3. Система уравнений $Bx = 0$, где $x \in \mathbf{R}^4$, имеет в качестве множества решений линейную оболочку системы векторов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Известно, что матрица BB^T невырожденная, а у матрицы $A = B^T B$ характеристический многочлени имеет вид $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$ (здесь через B^T обозначена матрица, транспонированная к B). Известно также, что сумма элементов в каждой строке матрицы B равна двум. Тогда

а) матрица A задает проектор в $\mathbf{R}^4$;

Да Нет

б) элементами матрицы A являются только нули и единицы;

Да Нет

в) матрица B не имеет нулевых элементов;

Да Нет

г) у матрицы B первый и последний столбцы ортогональны;

Да Нет

д) характеристический многочлен матрицы BB^T имеет вид $\lambda^2 - 4$;

Да Нет

е) матрица A вырожденная;

Да Нет

ж) имеются ровно два варианта матрицы B;

Да Нет

з) множество решений системы $Az = 0$ имеет размерность два.

Да Нет

4. Дана последовательность функций $f_n(t) = ne^{-n|t|}, t \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \ldots,$ и пусть $g_n(x) = \int_x^{1-x} f_n(t)dt$. Обозначим через M множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$, и для $x \in M$ обозначим $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Тогда а) существует отрезок $[a,b]$, на котором последовательность $f_n(t) = ne^{-n|t|}, n = 1, 2, \ldots$ сходится равномерно;

Да Нет

б) на интервале $(0,1)$ последовательность $f_n(t) = ne^{-n|t|}, n = 1, 2, \ldots$ сходится равномерно;

Да Нет

в) множество M замкнуто и $g(x)$ является неограниченной функцией на M;

Да Нет

г) функциия $g(x)$ не возрастает на M;

Да Нет

д) функция $g_3(x)$ имеет на интервале $(0,1)$ строгий локальный минимум;

Да Нет

е) функция $g(x)$ непрерывна справа на M;

Да Нет

ж) уравнение $g(x) = 1$ имеет решение в M;

Да Нет

з) последовательность $\{g_n(x), n = 1, 2\ldots\}$ сходится равномерно на отрезке $[2,3]$.

Да Нет

5. Даны функция $f(x,y) = x^2(x-3)$ и множество $M = \{(x,y)\colon x^2 + y^2 = x^4 + y^4\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в трех точках;

Да Нет

в) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в трех точках;

Да Нет

д) точка $(-1, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

е) точка $(1, 0)$ является точкой локального миниимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** D. **3.** E. **4.** B. **5.** C. **6.** E. **7.** C. **8.** D. **9.** C. **10.** A. **11.** C. **12.** C. **13.** C. **14.** D. **15.** D. **16.** A. **17.** E. **18.** C. **19.** C. **20.** C. **21.** B. **22.** D. **23.** E. **24.** C. **25.** E. **26.** C. **27.** D. **28.** D. **29.** E. **30.** D. **31.** A. **32.** A. **33.** B. **34.** C. **35.** C. **36.** E. **37.** B. **38.** E. **39.** D. **40.** C.

3.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Корни квадратного трехчлена в знаменателе подынтегрального выражения равны n и n^2. Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов и разложим подынтегральное выражение в сумму простых дробей вида

$$\frac{1}{t^2 - n(n+1)t + n^3} = \frac{A}{t-n} + \frac{B}{t-n^2}.$$

Отсюда получаем соотношения на коэффициенты A и B:

$$\begin{cases} At + Bt = 0, \\ -An^2 - Bn = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A = -\dfrac{1}{n^2-n}$, $B = \dfrac{1}{n^2-n}$.

Заметим, что подынтегральное выражение непрерывно на $[0, n)$ и стремится к $+\infty$ при t, стремящемся к n слева. Следовательно, при $x \geqslant n$ интеграл не существует, и функция $f_n(x)$ определена на множестве $[0, n)$. Значит, ответ на вопрос а) — «да».

Проинтегрировав найденную сумму простых дробей, получим выражение для $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2-n}\left(\ln\left(\frac{n^2-x}{n-x}\right) - \ln n\right) = \frac{1}{n^2-n}\ln\left(\frac{n^2-x}{n^2-nx}\right).$$

Производная (интеграла как функции верхнего предела) равна

$$f_n'(x) = \frac{1}{x^2 - n(n+1)x + n^3}$$

и вторая производная равна

$$f_n''(x) = \frac{n(n+1)-2x}{(x^2-n(n+1)x+n^3)^2}.$$

Как видим, производная $f_n'(x)$ при всех $x \in (0, n)$ положительная. Следовательно, сама функция $f_n(x)$ при всех $x \in [0, n)$ неотрицательная, и ответ на вопрос б) — «нет» и на вопрос д) — «да». Вторая производная тоже положительная при всех $x \in (0, n)$, поэтому ответ на вопрос е) — «да».

Несложно видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = 0$ при всех $x \geqslant 0$ (при этом для каждого неотрицательного x определены все функции $f_n(x)$ и $f_n'(x)$, начиная с некоторого n). Следовательно, ответы на вопросы в) — «да» и г) — «да».

Подставим $n-1$ в качестве аргумента $f_n(x)$. Получим, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n(n-1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n^2-n+1) - \ln n}{n^2-n}.$$

Заметим, что

$$\frac{\ln(n^2-n+1)-\ln n}{n^2-n} < \frac{2\ln n}{n^2},$$

а значит ряд сходится, и ответ на вопрос ж) — «да».

Подставим $n-1$ в качестве аргумента $f_n'(x)$. Получим, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_n'(n-1) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2 - n(n+1)(n-1) + n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{n^2-n+1} < \frac{2}{n^2},$$

а значит ряд сходится, и ответ на вопрос з) — «да».

Задача 2. В пункте а) ответ «нет», потому что $b_2 = \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} = b_4$.

В пункте б) ответ «да». Действительно, $\ln b_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, определённую при всех $x > 0$, и возьмём от неё производную: $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ при $x > e$. Тем самым, функция $f(x)$ убывает при $x > e$ и тем более при $x > 3$. А это означает, что и последовательность $b_n = f(n)$ убывает, начиная с $n = 3$.

В пункте в) ответ «да», потому что последовательность b_n положительная (и значит ограничена снизу нулём) и убывающая, начиная с $n = 3$, по предыдущему пункту. Поэтому последовательность b_n сходится. Более того, этот предел равен единице.

В пункте г) ответ «да». Доказательство: переформулируем условие в виде $n^{1/\sqrt{n}} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ (просто возведя исходное неравенство в степень $\sqrt{n}$). Теперь мы видим, что при больших n правая часть сходится к e, и значит, начиная с некоторого n она становится больше 2 (более того, можно показать, что правая часть больше 2 при $n > 1$). Что касается левой части, то ее предел равен единице, и значит, начиная с некоторого n она становится меньше 2. Следовательно, начиная с некоторого n, неравенство выполняется.

в пункте д) ответ «да»: последовательность $(1+1/n)^n$ сходится к $e < 3$, поэтому, начиная с некоторого $n = n_0$, мы имеем: $3 > (1 + 1/n)^n$, и тогда, начиная с $n = \max\{n_0, 3\}$, будет верно $n > (1 + 1/n)^n \Leftrightarrow b_n \geqslant 1+1/n$, что и требовалось доказать.

В пункте е) ответ «нет». В самом деле, последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\ln a_n = \sum\limits_{m=2}^{n} \dfrac{\ln m}{m}$. Но из этой формулы видно, что при $n > 1$ $\ln a_n$ больше n-го члена гармонического ряда, за вычетом единицы: $\ln a_n > \sum\limits_{m=2}^{n} \dfrac{1}{m}$. Но гармонический ряд расходится, следовательно, последовательность $\ln a_n$, а вместе с ней и последовательность a_n, тоже расходится.

Чтобы опровергнуть (неверное) утверждение в пункте ж), мы докажем верность утверждения в пункте з). Воспользуемся признаком Даламбера: отношение соседних коэффициентов ряда равно b_n, а последовательность b_n сходится к единице. То есть отношение соседних коэффициентов ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ сходится к единице, поэтому его радиус сходимости равен единице, что и требовалось доказать в пункте з). Так как $1/e < 1$, то этот ряд сходится при $x = 1/e$, что и доказывает неверность утверждения ж).

Задача 3. Так как размерность множества решений системы $Bx = 0$ равна двум, то ранг матрицы B тоже равен двум. Ввиду невырожденности матрицы BB^T строки матрицы B линейно независимые, так что матрица B имеет размеры 2×4.

Матрица A симметричная, и поэтому у нее имеется полная система собственных векторов. Заданные в условиях два решения системы $Bx = 0$ являются двумя линейно независимыми собственными векторами матрицы A для собственного числа ноль (тем самым, матрица A вырожденная). В качестве собственных векторов матрицы A, соответствующих собственному числу 2 (кратности тоже 2), можно взять любую линейно независимую пару столбцов, ортогональных решениям системы $Bx = 0$. Например,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{1}$$

Но строки матрицы B, будучи транспонированными в столбцы, тоже годятся. Поэтому каждый из столбцов матрицы B^T является линейной комбинацией столбцов (1). А поскольку сумма элементов по строкам у матрицы B равна двум, то матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha & \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

при некоторых α и β. С другой стороны $AB^T = 2B^T$, то есть $(B^T B)B^T = 2B^T$. Умножив это равенство слева на B и учитывая невырожденность матрицы BB^T, получим $BB^T = 2I$, где I — единичная матрица второго порядка. Таким образом, $\alpha^2(1-\alpha)^2 = 1$, $\beta^2 + (1-\beta)^2 = 1$, $\alpha\beta + (1-\alpha)(1-\beta) = 0$. Первые два равенства дают, что α и β могут равняться лишь нулю или единице. Третье же равенство показывает, что из возможных комбинаций годятся только две: $\alpha = 0$, $\beta = 1$ или $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Для матрицы B это дает два возможных значения:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что оба варианта пригодны. Таким образом, ответы: а) — «нет» (та как у матрицы A есть собственное число 2), б) — «да», в) — «нет», г) — «да», д) — «нет», е) — «да», ж) — «да», з) — «да».

Задача 4. Легко видеть, что каждая функция $f_n(x)$ является четной и $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 2$. Очевидно, что при $t = 0$ последовательность $\{f_n(t)\}$ расходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$ при любом $t \neq 0$. Пусть $[a, b]$ — произвольный отрезок, для которого $a > 0$. Так как функция $f_n(t)$ убывает на $[a, b]$, то $\max_{t\in[a,b]} f_n(t) = ne^{-an}$

и $ne^{-an} \to 0$ при $n \to \infty$. Из критерия равномерной сходимости следует, что $f_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на $[a, b]$.

На интервале $(0, 1)$ последовательность $\{f_n(t)\}$ не является равномерно ограниченной, поэтому равномерная сходимость на $(0, 1)$ отсутствует. Таким образом, на вопрос а) ответ «да», на вопрос б) — «нет».

Непосредственными вычислениями получаем следующие результаты:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = 2 \text{ при всех } a < 0,\ b > 0; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = 0 \text{ при всех } a > 0,\ b > 0; \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^b f_n(t)dt = 1 \text{ при всех } b > 0. \tag{4}$$

Отсюда и из четности функций $f_n(t)$ следует, что $M = \mathbf{R}$, т.е. функция $g(x)$ определена при всех вещественных x.

1. Пусть $x < 0$. Тогда $1 - x > 0$, и в силу (2) $g(x) = 2$.

2. Если $x = 0$, то в силу (4) $g(x) = 1$.

3. Если $0 < x < 1/2$, то $x < 1 - x$, и в силу (3) $g(x) = 0$.

4. При $x = 1/2$, очевидно, $g(x) = 0$.

5. Если $1/2 < x < 1$, то $x > 1 - x$, $x > 0$, $1 - x < 0$ и в силу (3) $g(x) = 0$.

6. При $x = 1$ в силу (4) $g(x) = -1$.

7. Если $x > 1$, то $1 - x < 0$, и в силу (2) $g(x) = -2$.

Окончательно получаем:

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x < 1, \\ -1, & x = 1, \\ -2, & x > 1. \end{cases}$$

Поэтому на вопрос в) ответ «нет», на вопрос г) — «да», на вопрос е) — «нет», на вопрос ж) — «да».

Так как $f_3(x) > 0$ при всех x, нижний предел интегрирования в определении функции $g_3(x)$ возрастает, а верхний убывает, то функция является строго убывающей. Поэтому на вопрос д) ответ «нет».

Прямыми вычислениями получаем, что

$$\max_{x\in[2,3]} |g_n(x) - 2| = e^{-n} + e^{-2n} \to 0, \ n \to \infty.$$

В силу критерия равномерной сходимости отсюда следует, что последовательность $\{g_n(x)\}$ сходится на $[2, 3]$ равномерно. Ответ на вопрос з) — «да».

Задача 5. Заметим, что множество M является компактом (замкнутость следует из того, что M есть множество уровня непрерывной в $\mathbf{R}^2$ функции, кроме того, M содержится в квадрате $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 2$). Следовательно, функция $f(x, y)$ достигает на M своего наименьшего и наибольшего значения, причем в точках, в котороых выполнены условия первого порядка.

Запишем функцию Лагранжа для нашей задачи:

$$L = \lambda_0 x^2(x - 3) + \lambda(x^2 + y^2 - x^4 - y^4).$$

Условия первого порядка следующие (с добавленным к ним уравнением связи):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda_0(3x^2 - 6x) + \lambda(2x - 4x^3) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda(2y - 4y^3) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - x^4 - y^4 = 0.$$

При этом λ_0 и λ одновременно не могут быть равны нулю.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 0$. Тогда $\lambda \neq 0$ и $2x - 4x^3 = 0$, $2y - 4y^3 = 0$, $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$. Единственное решение этой системы $x = 0$, $y = 0$. Это нерегулярная точка, значение функции в которой $f(0, 0) = 0$.

Теперь положим $\lambda_0 = 1$ и рассмотрим несколько случаев.

1) Случай $\lambda = 0$. Условия первого порядка принимают вид $3x^2 - 6x = 0$, $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$, Откуда находим три точки: $x = 0$, $y = 0$ (эта точка уже рассмотрена ранее); $x = 0$, $y = 1$; и наконец $x = 0$, $y = -1$. Значение функции $f(x, y)$ в каждой из этих точек равно нулю.

2) Случай $\lambda \neq 0$. Из второго условия первого порядка получаем, что y может принимать одно из трех значений: $y = 0$, $y = 1/\sqrt{2}$, $y = -1/\sqrt{2}$.

Случай $y = 0$ дает нам две дополнительные точки $x = 1$, $y = 0$ и $x = -1$, $y = 0$. Значения функции $f(x, y)$ в этих точках равны -2 и -4 соответственно.

Подставив $y = \pm 1/\sqrt{2}$ в уравнение связи, получим уравнение, из которого можно найти x: $x^2 + 1/2 - x^4 - 1/4 = 0$. Отсюда $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Таким образом, мы нашли последние четыре особые точки $x = -\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$ и $x = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$,

$y = \pm 1/\sqrt{2}$. Значение функции $f(x, y)$ равно $-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\left(3+\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}\right) < -4$ в двух первых точках и равно $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}-3\right) < 0$ в двух оставшихся точках.

Таким образом, наибольшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M равно 0 и достигается в трех точках $(0,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$. Значит ответ на вопрос а) — «нет», на вопрос б) — «да» и на вопрос ж) — «нет» (так как точка $(0,1)$ является точкой максимума). Наименьшее значение равно $-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\left(3+\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$ и достигается в двух точках $\left(-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Значит ответ на вопрос в) — «да», на вопрос г) — «нет» и на вопрос з) — «да».

Для того, чтобы ответить на вопросы д) и е) потребуется проверить условие второго порядка. Матрица вторых производных функции Лагранжа равна

$$D^2L = \begin{pmatrix} 6(x-1)+\lambda(2-12x^2) & 0 \\ 0 & \lambda(2-12y^2) \end{pmatrix}.$$

Ее необходимо проверить на знакоопределенность в точках $(-1,0)$ и $(1,0)$ на касательных векторах множества M (т. е. ортогональных градиенту уравнения связи). Градиент уравнения связи равен $(2x-4x^3, 2y-4y^3)$, поэтому в обеих точках касательные векторы имеют вид $(0, v)^{\mathrm{T}}$, где $v \in \mathbf{R}$.

В точке $(-1,0)$ значение $\lambda = -9/2$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} D^2L \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -9v^2 < 0 \quad (\text{при } v \neq 0).$$

Следовательно, точка $(-1,0)$ является точкой локального максимума (ответ на вопрос д) — «да»).

В точке $(1,0)$ значение $\lambda = -3/2$, поэтому

$$\begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} D^2L \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -3v^2 < 0 \quad (\text{при } v \neq 0).$$

Следовательно, точка $(1,0)$ является точкой локального максимума (ответ на вопрос е) — «нет»).

4 Вступительный экзамен 2008 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Дана задача Коши $y' = y\cos x$, $y(0) = 1$. Предел максимального (непродолжаемого) решения $y(x)$ при $x \to +\infty$ равен

A 0

B 1

C e

D $+\infty$

E не существует

2. Максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $y' = \dfrac{y^2}{x^2}$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, определено на множестве

A $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

B $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

C $(0, +\infty)$

D $(-1, +\infty)$

E $(-\infty, +\infty)$

3. Значение максимального (непродолжаемого) решения задачи Коши $y' = (y-1)^2$, $y(1) = 0$, в точке $x = -1$ равно

A -1

B 0

C 1

D 2

E не определено

4. Функция $f(x, y) = x^2$ достигает наименьшего значения на множестве $\{(x, y)\colon y^3 - y\cos x + \sin x = 0\}$

A ровно в одной точке

B ровно в двух точках

C ровно в трех точках

D ровно в четырех точках

E не достигает наименьшего значения

5. Функция $f(x, y) = xy$ на множестве $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 1\}$

A достигает наименьшего значения в единственной точке

B достигает наибольшего значения в единственной точке

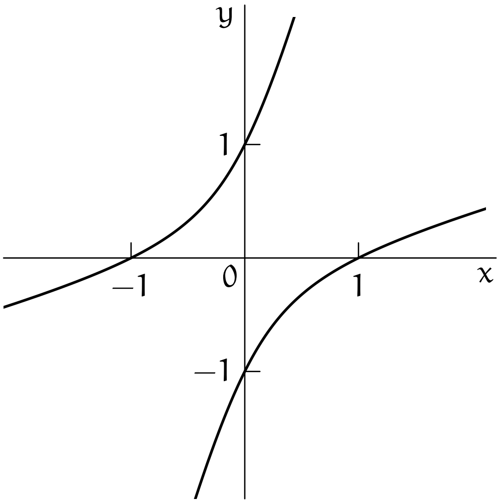
C не достигает наибольшего значения

D не достигает наименьшего значения

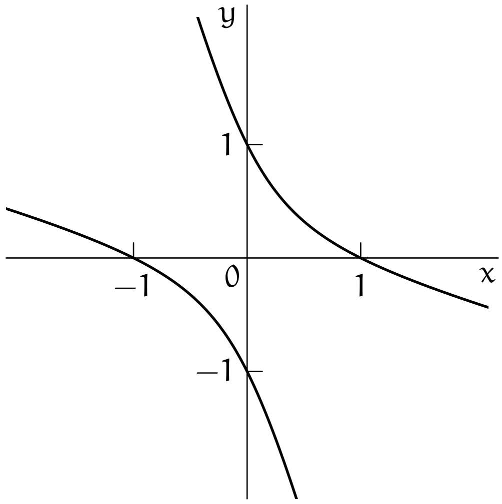
E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Множество $\{(x, y) \colon x^2 + 4xy + y^2 = 1\}$ есть

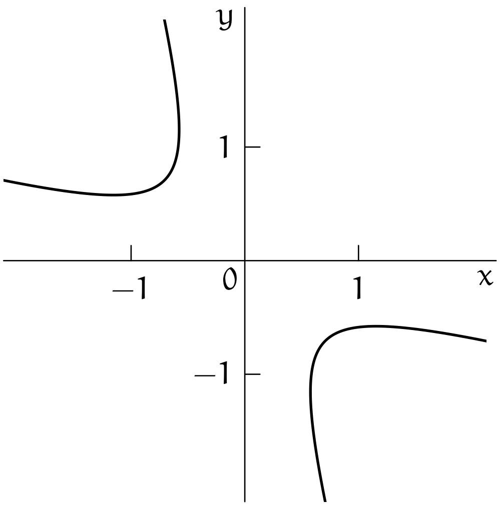
A



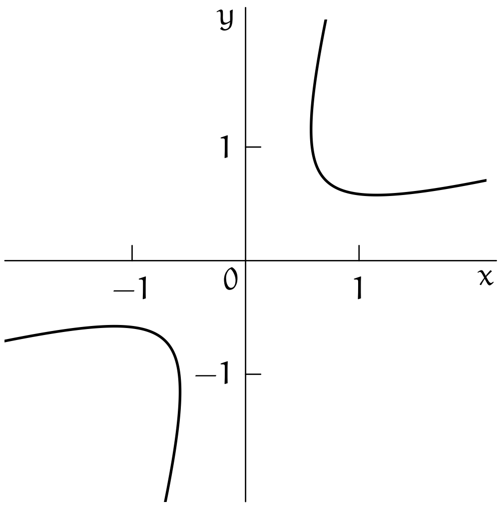
B



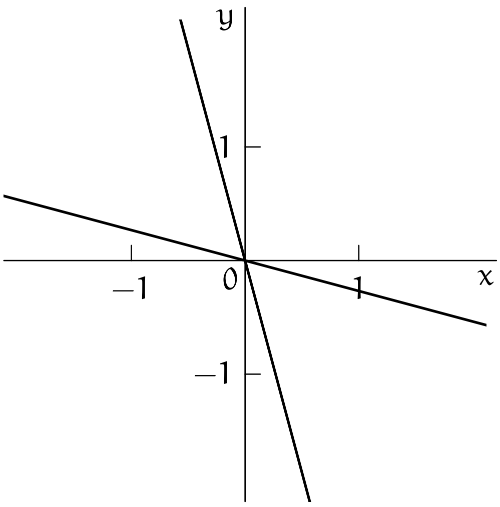
C



D



E



7. Пусть F — подмножество $\mathbf{R}$, и x — предельная точка F. Тогда

A x — изолированная точка F

B x — внешняя точка F

C x — граничная точка F

D x — внутренняя точка F

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть A — непустое подмножество $\mathbf{R}$, у которого множество внутренних точек пустое. Тогда

A множество граничных точек множества A непустое

B множество внешних точек множества A непустое

C множество A не более, чем счетное

D множество A имеет мощность континуума

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть F — замкнутое, G — открытое подмножества $\mathbf{R}$, и x — точка, принадлежащая пересечению $F \cap G$. Найдите ***ложное*** утверждение

A если x — предельная точка G, то x — предельная точка $F \cap G$

B если x — предельная точка F, то x — предельная точка $F \cap G$

C если x — внутренняя точка F, то x — внутренняя точка $F \cap G$

D если x — изолированная точка F, то x — изолированная точка $F \cap G$

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

10. На интервале (a, b) задана последовательность функций $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$. Известно, что при каждом $x \in (a, b)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тогда

A если каждая функция $f_n(x)$ разрывна на (a, b), и последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на (a, b), то функция $f(x)$ разрывна на (a, b)

B если каждая функция $f_n(x)$ непрерывна на (a, b), и последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к $f(x)$ неравномерно на (a, b), то функция $f(x)$ разрывна на (a, b)

C если каждая функция $f_n(x)$ разрывна на (a, b), и последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к $f(x)$ неравномерно на (a, b), то функция $f(x)$ непрерывна на (a, b)

D если каждая функция $f_n(x)$ ограничена на (a, b), а функция $f(x)$ является неограниченной на (a, b), то последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ сходится к $f(x)$ неравномерно на (a, b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. На плоскости xOy дано множество $M = \{(x, y)\colon y^2 - x^2 = 1\}$ и функция $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. Функция $f(x, y)$ достигает на множестве M наименьшего значения.

II. Точка $(0, 1)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

III. Множество значений функции $f(x, y)$ на множестве M ограничено сверху.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

12. На отрезке $[a, b]$ задана функция $f(t)$, интегрируемая по Риману на этом отрезке. Пусть $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тогда

A если функция $f(t)$ неубывающая, то функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке $x \in (a, b)$

B если функция $f(t)$ имеет разрыв в точке $x_0 \in (a, b)$, то функция $F(x)$ не дифференцируема в точке x_0

C если в точке $x_0 \in (a, b)$ функция $f(t)$ имеет разрыв второго рода, то функция $F(x)$ разрывна в точке x_0

D если функция $F(x)$ является возрастающей на $[a, b]$, то $f(t) \geqslant 0$ при всех $t \in (a, b)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Уравнение $x^4 + 1 = kx$, где $k > 0$, имеет единственное решение при

A $k = \sqrt[4]{4}$

B $k = \dfrac{4}{\sqrt[4]{27}}$

C $k = 2\sqrt[4]{9}$

D $k = 3\sqrt[4]{3}$

E $k = 4\sqrt[4]{3}$

14. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$

A равен -1

B равен $-1/2$

C равен $-1/4$

D равен $-1/8$

E не существует

15. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ определяется соотношениями $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n+1}$, $x_1 > 0$. Тогда

A существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является строго возрастающей

B существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является строго убывающей

C существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является неограниченной

D при любом $x_1 > 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является сходящейся

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть для каждого $x \in \mathbf{R}$

$$f_n(x) = n\log_{x^2+x+2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

и пусть M — множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Для всех $x \in M$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) истинные?

I. $M = \mathbf{R}$.

II. График функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

III. График функции $f(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

A только I

B только I и II

C только I и III

D только II и III

E I, II и III

17. Длина ребра куба увеличивается со скоростью, пропорциональной поверхности куба. В момент времени $t = 0$ длина ребра равна 1, а в момент $t = 2$ длина ребра равна 2. Длина ребра в момент времени $t = 3$ равна

A 4

B 5

C 10

D 15

E 18

18. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$ равен

A $1/2$

B $\ln 2$

C 1

D $2\ln 2$

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

19. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$ равен

A $1/2$

B $\ln 2$

C 1

D $2\ln 2$

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

20. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{e^{\sin x}-1}$ равен

A -1

B 0

C $1/e$

D 1

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

21. Предел $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{ctg} x^2$ равен

A -1

B 0

C 1

D $\pi^2/4$

E не равен ни одному из вариантов A, B, C, D

22. Числовая последовательность $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ задана формулами

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2 + 1/n}{a_n}, \quad a_1 = 1.$$

Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ равен

A -2

B -1

C 0

D 1

E 2

23. Пусть $S(a)$ есть площадь фигуры, заключенной между линиями $x + y = 1$ и $x^{1/a} + y^{1/a} = 1$, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $a > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{a\to+\infty} S(a)$ равен

A $1/4$

B $1/2$

C 1

D 3/2

E 2

24. Пусть M есть подмножество $\mathbf{R}$, заданное формулой

$$M = \left\{ x \neq 0 \colon \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 0 \right\}.$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) являются ***ложными***?

I. Точка $x = 0$ является единственной предельной точкой множества M.

II. Замыкание множества M совпадает с множеством M.

III. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка x, не принадлежащая M, такая что $|x| < \varepsilon$.

A только I и II

B только I и III

C только II и III

D только I, II и III

E ни одно из I, II и III

25. Пусть A — матрица размеров $m \times n$ с линейно зависимыми строками. Тогда

A если у системы $Ax = 0$ существует только нулевое решение, то $m > n + 1$

B если у системы $Ax = 0$ существует ненулевое решение, то $m < n + 1$

C если $m > n + 1$, то ранг матрицы A равен n

D если $m < n + 1$, то ранг матрицы A меньше n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$. Известно, что любой вектор $z \in \mathbf{R}^n$ представим в виде $z = x + y$, где $Ax = 0$ и $By = 0$. Тогда

A если n нечетное, то ранги матриц A и B различные

B если существует ненулевой $x \in \mathbf{R}^n$, при котором $Ax = 0$ и $Bx = 0$, то сумма рангов матриц A и B строго больше n

C если объединенная система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = 0$ имеет только нулевое решение, то сумма рангов матриц A и B равна n

D если существует $x \in \mathbf{R}^n$, при котором $Ax = 0$ и $Bx = 0$, то сумма рангов матриц A и B строго меньше n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

27. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, a и b — столбцы длины m, x — искомый столбец длины n. Тогда

A если система $(A+B)x = (a+b)$ не имеет решения, то не имеет решения хотя бы одна из систем $Ax = a$ и $Bx = b$

B если объединенная система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ не имеет решения, то не имеет решения хотя бы одна из систем $Ax = a$ и $Bx = b$

C если система $(A + B)x = (a + b)$ имеет решение, то имеют решения обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$

D если $n = m$ и система $Ax = a$ совместна, а система $(AB)x = a$ несовместна, то существует b, при котором система $Bx = b$ несовместна.

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

28. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$, а через $\det X$ обозначается определитель квадратной матрицы X. Тогда

A если $\det(A - B) \neq 0$, то $\det A \neq \det B$

B если A и B отличаются лишь перестановкой строк, то $\det A = \det B$

C если $\det B \neq 0$, а $\det(AB) = 0$, то $\det A = 0$

D если $\det A \neq 0$ или $\det B \neq 0$, то $\det(AB) \neq 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

29. Пусть A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A линейная оболочка столбцов матрицы A совпадает с линейной оболочкой столбцов матрицы A^2

B линейная оболочка столбцов матрицы A не совпадает с множеством решений системы $Ax = 0$

C существует ненулевое решение системы $Ax = 0$, являющееся линейной комбинацией столбцов матрицы A

D не существует ненулевого решения системы $Ax = 0$, являющегося линейной комбинацией столбцов матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A если $\lambda < 0$ является собственным числом матрицы A^2, то матрица A симметричная

B если у матрицы A нет вещественных собственных чисел, то инвариантными подпространствами для нее являются только все $\mathbf{R}^n$ и нульмерное подпространство

C если у матрицы A нет вещественных собственных чисел, то матрица A невырожденная

D если у матрицы A имеется полная система (вещественных) собственных векторов, то она симметричная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

31. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$, причем A — симметричная матрица. Тогда

A если для некоторого $x \in \mathbf{R}^n$ $Ax \neq 0$, то $x^T Ax \neq 0$

B если матрица B ненулевая, то существует $x \in \mathbf{R}^n$, при котором $x^T Bx \neq 0$

C если матрица $B^T AB$ не является положительно определенной, то и матрица A не является положительно определенной

D если матрица B симметричная и положительно полуопределенная, а квадратичная форма $x^T ABx$ не является положительно полуопределенной, то и матрица A не является положительно полуопределенной

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

32. Пусть A — матрица размеров $m \times n$, $a \in \mathbf{R}^m$, и M — множество решений системы $Ax = a$. Тогда

A если множество M ограничено, то $m = n$

B если множество M неограничено, то $m < n$

C если столбцы матрицы A линейно зависимые, то множество M неограничено

D если столбцы матрицы A линейно независимые, то множество M ограничено

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

33. Последовательность вещественных чисел a_n сходится. Тогда

A $[a_n]$ сходится, где $[x]$ — это целая часть вещественного числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x)

B $\{a_n\}$ сходится, где $\{x\}$ — это дробная часть вещественного числа x (разность x и целой части x)

C $[a_n] + \{a_n\}$ сходится

D $[a_n] - \{a_n\}$ сходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

34. Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$ и является строго возрастающей. Тогда

A Последовательность a_n, заданная рекуррентно как $a_1 = 1$, $a_n = f(a_{n-1})$ при $n \geqslant 2$, сходится

B Для любой сходящейся последовательности a_n последовательность $f(a_n)$ тоже сходится

C Для любой сходящейся строго возрастающей последовательности a_n последовательность $f(a_n)$ тоже сходится

D Для любой расходящейся последовательности a_n последовательность $f(a_n)$ тоже расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

35. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — две монотонные функции, заданные на $\mathbf{R}$, причем $f(x)$ — строго возрастающая, а $g(x)$ — строго убывающая функция. Тогда

A композиция $f(g(x))$ возрастает

B одна из композиций $f(g(x)), g(f(x))$ возрастает

C функция $g(g(x))$ возрастает

D обратная функция $g^{-1}(x)$ возрастает

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

36. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n^2} y^n$ имеет радиус сходимости R

B если $R > 0$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n^2} y^n$ расходится везде, кроме нуля

C ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2} y^n$ либо везде сходится, либо везде, кроме нуля, расходится

D если $R \neq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n^2} y^n$ либо везде сходится, либо везде, кроме нуля, расходится

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

37. Последовательность вещественных чисел $\{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ сходится. Рассмотрим три утверждения: (i) последовательность $\{(-1)^n a_n\}$ расходится; (ii) последовательность $\{|a_n|\}$ сходится; (iii) последовательность $\{a_n - a_{n-1}\}$ сходится к нулю. Тогда

A утверждение (i) истинное

B одно из утверждений (ii) и (iii) ложное

C среди утверждений (i)–(iii) ровно одно истинное

D из утверждения (ii) следует утверждение (i)

E либо верно (i), либо верно (iii), но не одновременно

38. Рассмотрим два сходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда

A ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

B ряд $a_1 + b_2 + a_3 + b_4 + a_5 + \ldots$ сходится

C последовательность $a_n + \ldots + a_{2n}$ сходится к нулю

D существует такое целое число $k > 0$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ сходится абсолютно

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

39. Рассмотрим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность $\{b_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Тогда

A если последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

B если $a_n \geqslant 0$ при всех n, а последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится

C если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, то последовательность $\{b_n\}$ ограничена

D если последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$ имеет такой же радиус сходимости, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

40. Задана функция $f(x, y)$, определенная на $\mathbf{R}^2$. Известно, что она не убывает по x при фиксированном y и не возрастает по y при фиксированном x. Тогда

A не существует функции $f(x, y)$, удовлетворяющей сформулированным условиям

B функция $f^2(x)$ возрастает вдоль любого луча, исходящего из нуля

C последовательность $f(-n, n)$ монотонная

D уравнение $f(x, y) = f(0, 0)$ неявно определяет строго убывающую функцию $y = g(x)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть вещественная матрица A имеет размеры $m \times 4$. Известно, что система $Ax = 0$ имеет в качестве множества решений линейную оболочку системы столбцов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Известно также, что матрица $B = AA^T$ ортогональная, а матрица $P = A^T A$ задает ортогональный проектор (через A^T обозначена матрица, транспонированная к A). Тогда

а) строки матрицы A линейно зависимые;

Да Нет

б) строки матрицы A линейно независимые;

Да Нет

в) строки матрицы A ортонормированные;

Да Нет

г) сумма элементов в каждой строке матрицы A равна нулю;

Да Нет

д) сумма элементов в каждой строке матрицы A отлична от нуля;

Да Нет

е) ранг матрицы P равен трем;

Да Нет

ж) сумма диагональных элементов матрицы P равна 2;

Да Нет

з) сумма диагональных элементов матрицы P равна -2;

Да Нет

2. Пусть

$$f_n(x) = \sqrt[n]{e^{nx} + e^{2nx} + e^{3nx}},\ g_n(x) = \frac{1 + e^{x-1} + e^{2(x-1)} + \ldots + e^{n(x-1)}}{1 + x + x^2 + \ldots + x^n},\ h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

Обозначим

$$M_1 = \left\{x\colon x \leqslant 0 \text{ и существует } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\},$$
$$M_2 = \left\{x\colon 0 < x < 1 \text{ и существует } \lim_{n\to\infty} g_n(x)\right\},$$
$$M_3 = \left\{x\colon x \geqslant 1 \text{ и ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \text{ сходится}\right\}.$$

Функция $F(x)$ определяется соотношениями

$$F(x) = \begin{cases} ax + b \cdot \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), & \text{при } x \in M_1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x), & \text{при } x \in M_2, \\ c + d \cdot h(x), & \text{при } x \in M_3, \end{cases}$$

где a, b, c, d — некоторые числа. Тогда

а) функция $F(x)$ определена при любом вещественном x;

Да Нет

б) на множестве M_2 функция $F(x)$ строго возрастает;

Да Нет

в) существуют такие числа a, b, что функция $F(x)$ дифференцируема на $M_1 \cup M_2$;

Да Нет

г) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to 1-0} F'(x)$;

Да Нет

д) при любых $a \neq 0$, $d \neq 0$ и при любых b, c график функции $F(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

е) при $c = 0$ существует такое число d, что функция $F(x)$ непрерывна на $M_2 \cup M_3$, и точка $x = 1$ есть точка ее локального максимума;

Да Нет

ж) существуют такие числа c, d, что функция $F(x)$ дифференцируема на $M_2 \cup M_3$;

Да Нет

з) существуют такие числа a, b, c, d, что график функции $F(x)$ имеет вертикальную асимптоту.

Да Нет

3. Даны функция $f(x, y) = e^{-(3x^2+2y^2)}$ и множество $M = \{(x, y)\colon (x+y)(x^2+y^2-1) = 0\}$. Тогда

а) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

б) функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

в) функция $f(x, y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

г) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в одной точке;

Да Нет

д) функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M ровно в двух точках;

Да Нет

е) функция $f(x, y)$ не достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

ж) точка $(1, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $(0, 1)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M.

Да Нет

4. Про функцию $f(x)$, заданную на $\mathbf{R}$, известно, что при всех x, y, таких что $x < y < 0$, выполняется неравенство $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^3$. Тогда

а) функция $f(x)$ монотонна при $x < 0$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ строго возрастает при $x < 0$;

Да Нет

в) функция $f(x) = x^3$ удовлетворяет сформулированному в условии требованию;

Да Нет

г) функция $f(x) = x^3$ удовлетворяет неравенству $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^3$ при всех $x < y$.

Да Нет

5. Пусть функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$ и удовлетворяет другому требованию, а именно при всех x, y, таких что $x > y$, выполняется неравенство $f(x) - f(y) \leqslant \leqslant (x - y)^3$. Тогда а) функция $f(x)$ непрерывна на всем $\mathbf{R}$;

Да Нет

б) точка $x = 0$ является точкой строгого локального максимума функции $f(x)$;

Да Нет

в) при всех x, y, таких что $x > y$, выполняется неравенство $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)^2$;

Да Нет

г) не существует ни одной функции, удовлетворяющей требованию $f(x) - f(y) \leqslant \leqslant (x - y)^3$ при всех $x, y \in \mathbf{R}$.

Да Нет

6. Максимальное (непродолжаемое) решение $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = \frac{\cos x}{2y}$$

удовлетворяет условию $y(0) = 1$. Пусть $g(x) = \dfrac{1}{y(x)}$. Тогда

а) областью определения функции $y(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) область определения функции $g(x)$ совпадает с областью определения функции $y(x)$;

Да Нет

в) функция $y(x)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

г) функция $g(x)$ ограничена на своей области определения;

Да Нет

д) функция $y(x)$ периодическая на своей области определения;

Да Нет

е) функция $g(x)$ имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

ж) для всякого натурального числа N найдется $\delta > 0$, такое что число решений уравнения $g(x) = \delta$ больше N;

Да Нет

з) существует $\delta > 0$, такое что число решений уравнения $y(x) = \delta$ и $g(x) = \delta$ одинаковое.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** C. **3.** E. **4.** C. **5.** E. **6.** B. **7.** E. **8.** A. **9.** A. **10.** D. **11.** B. **12.** E. **13.** B. **14.** C. **15.** D. **16.** B. **17.** A. **18.** C. **19.** C. **20.** D. **21.** C. **22.** E. **23.** B. **24.** A. **25.** D. **26.** C. **27.** D. **28.** C. **29.** E. **30.** C. **31.** E. **32.** D. **33.** C. **34.** C. **35.** C. **36.** E. **37.** E. **38.** C. **39.** B. **40.** C.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Заметим, что матрица $B = AA^T$ ортогональная, симметричная и положительно определенная. Существует единственная такая матрица — единичная. Значит $B = I$. Элементы матрицы B есть скалярные произведения строк матрицы A. Поэтому, так как B единичная матрица, то строки матрицы A ортонормированные и, как следствие, линейно независимые (ответы на вопросы а) — «нет», б) — «да», в) — «да»).

Ранг матрицы A равен 2 в силу того, что пространство решений системы $Ax = 0$ имеет размерность 2 (размерность столбца x равна 4).

Так как столбец $(1, 1, 1, 1)^T$ является решением системы $Ax = 0$, а произведение строки матрицы A на этот столбец равно сумме элементов этой строки, то сумма элементов в каждой строке матрицы A равна нулю (ответы на вопросы г) — «да», д) — «нет»).

Ранг матрицы $P = A^TA$ совпадает с рангом матрицы A, который равен 2 (ответ на вопрос е) — «нет»).

Сумма диагональных элементов матрицы P (или след матрицы P) равна сумме ее собственных чисел. Так как P является проектором ранга 2, то у P собственное число 1 имеет кратность 2, и собственное число 0 имеет кратность 2. Следовательно, $\operatorname{tr} P = 2$ (ответы на вопросы ж) — «да», з) — «нет»).

Задача 2. Найдем более явно функцию $F(x)$. Пусть $x < 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{nx} + e^{2nx} + e^{3nx}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^x \sqrt[n]{1 + e^{nx} + e^{2nx}} = e^x$. Если $x = 0$, то $f_n(0) = \sqrt[n]{3}$, и

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Таким образом,

$$M_1 = (-\infty, 1] \text{ и } F(x) = ax + be^x, \; x \in M_1. \tag{1}$$

Пусть $0 < x < 1$. Тогда $0 < e^{x-1} < 1$. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = \dfrac{1-x}{1-e^{x-1}}$. Следовательно,

$$M_2 = (0, 1) \text{ и } F(x) = \frac{1-x}{1-e^{x-1}}, \; x \in M_2. \tag{2}$$

Наконец, $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n-1)!} = x \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{x^m}{m!} = xe^x$ при любом x. Значит,

$$M_3 = [1, +\infty) \text{ и } F(x) = c + dxe^x, \; x \in M_3. \tag{3}$$

Следовательно, на вопрос а) ответ «да».

Из (2) вытекает, что $F(x)$ непрерывна на M_2 и $F(0+) = \dfrac{e}{e-1} > F(1-) = 1$. Значит, на вопрос б) ответ «нет».

В силу (1) $F(0) = F(0-) = b$, $F'(0-) = a + b$, а в силу (2)

$$F(0+) = \frac{e}{e-1}, \; F'(x) = \frac{2e^{x-1} - xe^{x-1} - 1}{(1-e^{x-1})^2}, \; x \in M_2 \tag{4}$$

и

$$\lim_{x\to 0+} F'(x) = \frac{2e - e^2}{(e-1)^2}.$$

Поэтому если числа a, b выбраны так, что выполняются равенства

$$b = \frac{e}{e-1}, \; a + b = \frac{2e - e^2}{(e-1)^2}, \tag{5}$$

то соответствующая функция $F(x)$ дифференцируема в точке 0, а значит и на множестве $M_1 \cup M_2$. Нетрудно проверить, что решение системы (5) есть

$$a = \frac{3e}{(e-1)^2}, \; b = \frac{e}{e-1}.$$

Ответ на вопрос в) — «да».

Применяя, например, правило Лопиталя, в силу (4) получаем $\lim\limits_{x\to 1-} F'(x) = -1/2$. Ответ на вопрос г) — «да».

Из (1) следует, что если $a \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} (F(x) - ax) = 0$ при любых b, c, d, значит у графика есть наклонная асимптота. Ответ на вопрос д) — «да».

При $c = 0$ в силу (3) $F(1) = F(1+) = de$, а из (2) вытекает, что $F(1-) = 1$. Поэтому для непрерывности функции $F(x)$ на множестве $M_2 \cup M_3$ необходимо и достаточно, чтобы $d = 1/e$. Но функция $F(x) = xe^{x-1}$ на множестве M_3 возрастает, и точка $x = 1$ не является точкой ее локального максимума. Ответ на вопрос е) — «нет».

Имеем $F(1-) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1-} F'(x) = -1/2$, $F(1) = F(1+) = c + de$, $F'(1+) = 2de$. Поэтому для дифференцируемости $F(x)$ в точке 1 необходимо и достаточно выполнения

равенств
$$c + de = 1, \;\; 2de = -1/2. \tag{6}$$
Решением системы (6) являются числа $c = 5/4$, $d = -1/4e$. Ответ на вопрос ж) — «да».

Выше было установлено, что при любых a, b, c, d функция $F(x)$ в каждой точке x имеет конечные односторонние пределы. Ответ на вопрос з) — «нет».

Задача 3. Заметим, что множество M является объединением прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 = 1$. Исследуем поведение функции на каждом из этих множеств.

Прямая: выразим y через x как $y = -x$ и подставим в функцию $f(x, y)$. Получим $f(x, y(x)) = e^{-5x^2}$. Эта функция имеет единственную точку локального максимума $x = 0$ и при $x \to \pm\infty$ стремится к 0. Соответственно, функция $f(x, y)$ на прямой $x + y = 0$ имеет единственную точку локального максимума $x = y = 0$ (в которой $f(0, 0) = 1$) и стремится к 0 при $x, y \to \infty$.

Окружность: выразим y^2 через x как $y^2 = 1 - x^2$ и подставим в функцию $f(x, y)$. Получим $f(x, y(x)) = e^{-(3x^2+2y^2)} = e^{-(3x^2+2(1-x^2))} = e^{-(2+x^2)}$. Рассмотрим эту функцию на отрезке $[-1, 1]$. Она имеет единственную точку локального максимума $x = 0$ и две точки локального минимума $x = \pm 1$. Соответственно, функция $f(x, y)$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$ имеет две точки локального максимума $x = 0$, $y = \pm 1$ (в которых значение $f(x, y)$ равно e^{-2}) и две точки локального минимума $x = \pm 1$, $y = 0$ (в которых значение $f(x, y)$ равно e^{-3}).

Заметим, что прямая и окружность пересекаются в точках $\left(1\big/\sqrt{2}, -1\big/\sqrt{2}\right)$ и $\left(-1\big/\sqrt{2}, 1\big/\sqrt{2}\right)$, не являющихся критическими точками ни для одного из множеств, значит все рассмотренные точки локального экстремума являются таковыми и для всего множества M.

Таким образом, ответы на вопросы а) — «нет», б) — «нет», в) — «да» (нижняя грань равна 0 и не достигается), г) — «да», д) — «нет», е) — «нет» (наибольшее значение равно 1 и достигается в точке $x = y = 0$), ж) — «да», з) — «да».

Задача 4. (а–б) Верно: при $x < y < 0$ имеем $(x - y)^3 < 0$, так что $f(x) - f(y) \leqslant \leqslant (x - y)^3 < 0$, и следовательно $f(x) < f(y)$ — строго возрастает, в частности, монотонна;

(в) Верно: следует из цепочки неравенств, справедливой при $x < y < 0$:
$$3xy \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 \geqslant x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) \leqslant (x - y)(x^2 - 2xy + y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - y^3 \leqslant (x-y)^3,$$

что и требовалось доказать (при домножении на отрицательное число $(x-y)$ знак неравенства меняется);

(г) Неверно, например для $x=-1$, $y=1$. В этом случае

$$f(x)-f(y) = x^3-y^3 = (-1)-1 = -2 > -8 = ((-1)-1)^3 = (x-y)^3.$$

Задача 5. Докажем вспомогательное утверждение: функция удовлетворяет соотношению из условия задачи тогда и только тогда, когда она является невозрастающей.

Если $f(x)$ нигде не возрастает, то при любых $x>y$ имеем $f(x)-f(y) \leqslant 0 < (x-y)^3$.

Обратно, предположим, что функция удовлетворяет этому соотношению, и покажем, что для любых x, y таких, что $x>y$, должно быть $f(x) \leqslant f(y)$.

Для этого рассмотрим любое N, и разобьём отрезок $[x,y]$ на N равных частей, обозначив точки деления за $x=x_0, x_1, \ldots, x_N = y$. Выпишем цепочку тождеств и неравенств:

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1})^3 = N\left(\frac{x-y}{N}\right)^3 = \frac{(x-y)^3}{N^2}. \end{aligned}$$

В силу произвольности N, правая часть может быть сделана сколь угодно близкой к нулю, а левая часть от N не зависит. Это означает, что левая часть не может быть положительной.

Теперь по пунктам:

(а) нет, не обязательно. Например, $f(x)=-[x]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа, является разрывной, но невозрастающей, и поэтому удовлетворяет требованию;

(б) не обязательно, например это неверно для $f(x)=-x$;

(в) верно, так как для невозрастающей функции при любых $x>y$ имеем $f(x)-f(y) \leqslant 0 < (x-y)^2$;

(г) верно. В самом деле, по предыдущей задаче, такая функция является строго возрастающей при $x<0$, а по условию этой задачи она нигде не возрастает. Полученное противоречие показывает, что такой функции существовать не может.

Задача 6. Исходное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Решая его стандартным образом, поучаем общее решение $y^2 = \sin x + C$, где C — произвольная постоянная. Учитывая начальное условие, получаем, что в окрестности точки $x = 0$ решение совпадает с функцией $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$. Поскольку $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, то решение не может быть продолжено за интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Таким образом, максимальное решение исходной задачи Коши — это функция

$$y(x) = \sqrt{1+\sin x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Соответственно,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Ясно, что $\lim\limits_{x\to-\pi/2} g(x) = \lim\limits_{x\to 3\pi/2} g(x) = +\infty$.

Отсюда сразу следуют ответы: а) — «нет», б) — «да», в) — «да», г) — «нет», д) — «нет», е) — «да»

Нетрудно проверить, что функция $g(x)$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ убывает от $+\infty$ до $1/\sqrt{2}$, а на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ возрастает от $1/\sqrt{2}$ до $+\infty$. Поэтому при любом $\delta > 0$ число решений уравнения $g(x) = \delta$ не превосходит 2. Ответ на вопрос ж) — «нет».

При $\delta = 1$ каждое из уравнений $y(x) = 1$ и $g(x) = 1$ имеют два решения $x = 0$ и $x = \pi$. На самом деле, элементарный анализ функций $y(x)$, $g(x)$ показывает, что при $\delta \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ каждое уравнение $y(x) = \delta$, $g(x) = \delta$ имеет два решения. Ответ на вопрос з) — «да».

5 Формат вступительного экзамена 2009 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей.

   Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 2 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет». Число вопросов в пределах каждого блока может быть различным.

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 2 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 500 очков, имеют право быть освобожденными от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics, присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12-балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
820 баллов или больше	12
780—819 баллов	11
750—779 баллов	10
720—749 баллов	9
680—719 баллов	8
640—679 баллов	7
600—639 баллов	6
560—599 баллов	5
520—559 баллов	4
480—519 баллов	3

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской Экономической Школе работают платные подготовительные курсы. Программы подготовительных курсов ориентированы на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Полный курс: февраль—июнь 2009 г.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда с 18:30 и суббота с 11:00) — 3 ак. часа лекция, 2 ак. часа семинар. **Начало занятий — 18 февраля 2009 г.**

* **Интенсивный курс: апрель—июнь 2009 г.**
  В интенсивном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы. Занятия: 2 лекции по 3 ак. часа в неделю (вторник и пятница с 18:30). **Начало занятий — 21 апреля 2009 г.**

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. +7 (495) 779-1401, email `okulagin@nes.ru`.

Адрес РЭШ

117418, Москва, Нахимовский проспект, 47 (здание ЦЭМИ РАН), 17 этаж, офис 1721, проезд до ст. метро «Профсоюзная».