РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

NEW ECONOMIC SCHOOL

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В РЭШ В 2007 ГОДУ

Москва 2007

Булавский В. А., Бремзен А. С., Головань С. В., Девятов А. Е., Катышев П. К.

Пособие по математике для поступающих в Российскую Экономическую Школу в 2007 году. — М., 2007 — 92 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ и дополняет Справочник для поступающих в РЭШ в 2007 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене и дополняет Справочник для поступающих в РЭШ.

Содержание экзамена в течение ряда лет оставалось неизменным, хотя формы экзамена менялись.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена. Требования, предъявляемые на вступительных экзаменах, содержатся в Справочнике для поступающих в РЭШ.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2004—2006 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. Элементы теории множеств

Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. Числовая прямая $\mathbb{R}$ и арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$

Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbb{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbb{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbb{R}^n$.

3. Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbb{R}^n$

Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbb{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. **Предел последовательности**

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. **Предел функции. Непрерывность функций (отображений)**

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. **Числовые функции одного (числового) аргумента**

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. **Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$**

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. **Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbb{R}^n$)**

   Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$**

   Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

    Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

    Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

    Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. **Степенные ряды**

    Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**

    Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., Высшая школа, 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., Наука, 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, Высшая школа, 2000.

4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1958—87.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., Наука, 1989.

6. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., Наука, 1981.

7. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., Наука, 1982.

8. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

9. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., Наука, 1964.

10. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. **Определитель матрицы**

   Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

   Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

   Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. **Линейные операторы**

   Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

   Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

   Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. Евклидовы пространства

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М., Наука, 1964.

2. Беклемишев Д. В., *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. М., Физматлит, 2004.

3. Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А., *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. М., Наука, 1987.

4. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1974.

5. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.

6. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., Наука, 1970.

7. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.

8. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., Наука, 1984.

9. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.

10. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., Наука, 1963.

11. Проскуряков И. В., *Сборник задач по линейной алгебре*. М., Лаборатория Базовых Знаний, 2001.

12. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., Наука, 1980.

13. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.

14. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М., Наука, 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2004 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «+1»
* неправильный ответ — «−1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

2.1 Тест

2.1.1 Первая часть теста

1. Наименьшее значение функции x^2 на множестве $\{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 1\}$ достигается только в точке (точках)

A $(0, 0)$

B $(0, 1)$

C $(0, -1)$

D $(1, 0)$, $(-1, 0)$

E $(0,1)$, $(0,-1)$

2. Дано множество $M = (0,1) \cup \{2\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M открытое множество.

II. Граница M не пересекается с M.

III. Дополнение к M открытое множество.

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E ни одно из утверждений I, II, III не является верным

3. Пусть M — множество на вещественной прямой, не имеющее предельных точек. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M открытое множество.

II. M замкнутое множество.

III. M непустое множество.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E только II и III

4. Дана функция $f(x,y) = e^{x-y}$ и множество $M = \{(x,y)\colon x + y^2 = 0\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. f достигает наибольшего значения на M.

II. f достигает наименьщего значения на M.

III. f ограничена на M.

A только I

B только II

C только I и III

D только II и III

E ни одно из утверждений I, II, III не является верным

5. Значение максимального решения задачи Коши $y' = 2xy$ при начальном условии $y(1) = 1$ в точке $x = -1$ равно

A 0

B $1/e$

C 1

D e

E не определено

6. Множество граничных точек множества $M = \{1/3, 1/4, 1/5, \dots\} \cup \{2/3, 3/4, 4/5, \dots\}$ равно

A M

B $\varnothing$

C $M \cup \{0\}$

D $M \cup \{0; 1\}$

E $M \cup \{1\}$

7. Дополнение к незамкнутому подмножеству множества вещественных чисел

A замкнуто

B открыто

C не является замкнутым

D не является открытым

E ни одно из утверждений A, B, C, D не является верным

8. Пусть A — симметричный линейный оператор в пространстве R^{2n}. Известно, что характеристический многочлен этого оператора равен $(\lambda-1)^2 \dots (\lambda-n)^2$. Тогда число инвариантных подпространств оператора A равно

A 2

B $2n$

C 2^n

D 2^{2n}

E бесконечно много

9. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ задана система из четырех векторов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, причем каждый из векторов x_i является линейной комбинацией остальных трех векторов системы X. Тогда

A если среди векторов x_i имеется нулевой, то ранг системы X равен двум

B если среди векторов x_i нет нулевых, то ранг системы X равен трем

C если линейная оболочка системы X имеет размерность два, то среди векторов x_i имеется нулевой

D если линейная оболочка системы X совпадает с $\mathbf{R}^n$, то $n = 3$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ заданы два подпространства L_1 и L_2 с размерностями n_1 и n_2, соответственно, причем $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$. Тогда

A если $n_2 \geqslant n$, то $L_2 \setminus L_1 \neq \varnothing$

B если $n_1 + n_2 \leqslant n$, то $L_1 \cap L_2 = \varnothing$

C если $n > 7$, то $n_1 + n_2 \geqslant n$

D если размерность пересечения $L_1 \cap L_2$ не равна нулю, то $n_1 + n_2 \leqslant n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, $m > 1$, $n > 1$, a и b — столбцы длины m, а x — искомый столбец длины n. Тогда

A если система $Ax = a$ разрешима при любой правой части a, то $n \leqslant m$

B	если обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ разрешимы при любых правых частях a и b, то и объединенная система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ разрешима при любых a и b

C	если $n = m$, и обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ разрешимы при любых правых частях a и b, то система $(A + B)x = c$ разрешима при любой правой части c

D	если $n < m$, и система $Ax = a$ разрешима при любой правой части a, то матрица A нулевая

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$. Через $\det X$ обозначается определитель любой квадратной матрицы X, а через A^{T} и A^{-1} — транспонированная и обратная матрицы к A. Тогда

A	если множество решений системы $(AB)x = 0$ имеет размерность не выше единицы, то $\det A \neq 0$ или $\det B \neq 0$

B	если при всяком $\lambda \in [0, 1]$ оказывается $\det(\lambda A + (1 - \lambda)B) \neq 0$, то $\det A + {} + \det B \neq 0$

C	если $(\det A)^2 \neq \det A$, то $\det A \neq \det A^{T}$

D	при любом $\lambda > 0$ выполняется равенство $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Пусть A и B — два линейных оператора, действующие из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ при $n > 1$. Через AB обозначим их суперпозицию, т. е. $(AB)x = A(Bx)$ при $x \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} B$ и $\operatorname{Im}(AB)$ — образы соответствующих операторов. Тогда

A	$\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im} A$

B	$\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im} B$

C	$\operatorname{Im}(AB) \supset \operatorname{Im} B$

D	$\operatorname{Im}(AB) \supset \operatorname{Im} A$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если определитель матрицы $(A^2 - I)$, где I — единичная матрица, отрицателен, то у матрицы A имеется собственное число в интервале $(-1, 1)$

B если x_1 и x_2 — собственные векторы матрицы A, то они линейно независимые

C если A имеет единственное собственное число, равное единице, то A — единичная матрица

D если у матрицы A есть двумерное инвариантное подпространство, то у этой матрицы имеется собственное число кратности 2

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Вещественные квадратные матрицы A и B порядка $n \geqslant 2$ рассматриваются как операторы в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если матрица (B^TAB), где B^T —транспонированная к B, не задает оператор проектирования, то либо B не является ортогональной, либо A не задает оператор проектирования

B если матрица A не задает оператор проектирования, то ее характеристический многочлен не может иметь вид $p(\lambda) = (-1)^n\lambda^k(\lambda - 1)^{n-k}$, где k — целое, и $0 \leqslant k \leqslant n$

C если матрица A не задает оператор проектирования, то и A^2 не задает оператор проектирования

D если ортогональная матрица A не является единичной, то в $\mathbf{R}^n$ не существует базиса, состоящего из собственных векторов матрицы A

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка n, причем A — симметричная. Тогда

A если B ортогональная матрица, и $AB = B$, то A — единичная матрица

B если для некоторого $x \in \mathbf{R}^n$ оказалось, что $x^TAx = 0$, и A отрицательно полуопределенная матрица, то $x = 0$

C если матрица (B^TAB) отрицательно полуопределена, то и A отрицательно полуопределена

D	если матрица B тоже симметричная, и обе матрицы A и B положительно определены, то матрица $(B^{-1}AB)$ симметрична и положительно определена

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Интеграл $\int_1^e x \ln x dx$ равен

A	$\dfrac{e^2-1}{4}$

B	$\dfrac{e^2+1}{4}$

C	$\dfrac{e^2+2}{4}$

D	$\dfrac{e^2-1}{2}$

E	$\dfrac{e^2+1}{2}$

18. Функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[2, +\infty)$, дифференцируема на интервале $(2, +\infty)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Какие из приведенных ниже утверждений (I, II, III, IV) верны?

I. $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

II. Функция $f(x)$ ограничена на полуинтервале $[2, +\infty)$.

III. Существует такое число $c > 2$, что производная $f'(x)$ ограничена на полуинтервале $[c, +\infty)$.

IV. Функция $f(x)$ имеет по крайней мере один локальный минимум на полуинтервале $[2, +\infty)$.

A	только I

B	только II

C	только III

D	только I и II

E	только II и IV

19. Неявная функция $y = y(x)$ определяется как решение уравнения $x^2 + 3xy - 5x + 3y^3 = 2$. Тогда производная $\dfrac{dy}{dx}(1)$ равна

A $-5/6$

B $-8/3$

C $4/7$

D 0

E $3/5$

20. Пусть a, $b > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ равен

A $\sqrt{ab}$

B $\dfrac{a+b}{2}$

C 1

D ab

E $(\ln a + \ln b)^2$

21. При каких x график функции $y = 10/x^2 - 10/x^3 + 3/x^4$ имеет точки перегиба?

A 1

B -1

C 2

D 3

E точек перегиба график не имеет

22. Кривые $y = x^2$, $x = y^2$ $(x,\ y > 0)$ пересекаются под углом

A $\operatorname{arctg}(3/4)$

B $\pi/4$

C $\pi/3$

D $\operatorname{arctg}(1/2)$

E $\operatorname{arctg}(2/3)$

23. К графику функции $y = 1/\sqrt{x}$ проведена касательная в точке $(x_0, 1/\sqrt{x_0})$. Площадь треугольника, образованного касательной и осями координат, равна 9. Тогда x_0 равно

A $3/2$

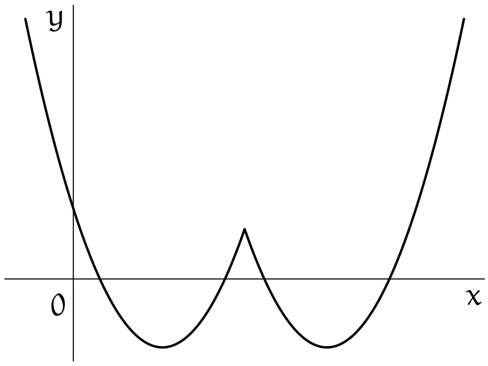
B $9/4$

C 3

D 9

E 16

24. На рисунке приведен график функции $f(x) = a(x+d)^2 + b|x+d| + c$.



Тогда

A $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$

B $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$

C $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d < 0$

D $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d > 0$

E $a > 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d > 0$

25. Радиус шара убывает со скоростью, пропорциональной объему этого шара. В момент $t = 0$ радиус равен 1, в момент $t = 1$ радиус равен $1/2$. В момент $t = 2$ радиус шара равен

A $1/4$

B $1/\sqrt{5}$

C $1/\sqrt[3]{10}$

D $1/\sqrt{7}$

E $1/\sqrt{6}$

26. Предел $\lim\limits_{x\to 0}(1 - x^2)^{1/x}$ равен

A 0

B 1

C -1

D e

E не существует

27. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $\mathbf{R}$, причем существуют пределы $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = y_0$ и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$. Тогда предел $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ равен

A $g(f(0))$

B $g(y_0)$

C $\lim\limits_{y\to f(0)} g(y)$

D $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$

E может не существовать

28. Функция $g(x)$ задана формулой

$$g(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $g(x)$ непрерывна в точке $x = 0$.

II. Функция $g(x)$ имеет непрерывную первую производную в точке $x = 0$.

III. Функция $g(x)$ имеет непрерывную вторую производную в точке $x = 0$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

29. Наименьшее значение функции $f(x, y) = \cos x + \cos y$ при ограничении $|x| + |y| = \pi/2$, равно

A 0

B $1/\sqrt{2}$

C 1

D $\sqrt{2}$

E 2

30. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x}$ равен

A $\ln(1+\cos x)+C$

B $\dfrac{1}{x+\sin x}+C$

C $\operatorname{tg} x + C$

D $\operatorname{tg}(x/2)+C$

E $\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin x}+C$

31. Какова площадь фигуры, заданной неравенствами $x^2+y^2/4 \leqslant 1$ и $|x|+|y|/2 \geqslant 1$ на координатной плоскости?

A $\pi-1$

B $\pi-2$

C $2(\pi-1)$

D $2(\pi-2)$

E π^2-1

32. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$, и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = 0$. Для каких из следующих утверждений (I, II, III) можно подобрать функцию $f(x)$, такую, что соответствующее утверждение верно по отношению к этой функции?

I. Функция $f(x)$ неограничена.

II. Функция $f(x)$ не имеет горизонтальной асимптоты.

III. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ не существует.

A только I

B — только II

C — только I и II

D — только I и III

E — I, II и III

33. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}(x^2)}$ равен

A — 0

B — 1

C — 2

D — 4

E — не существует

34. Наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 5x + 5y - 15$ равно

A — $-5/2$

B — $-25/2$

C — -16

D — -31

E — не существует

35. Множество решений уравнения

$$\frac{\ln(3/2)}{x^2 - 1} = \int_2^3 \frac{ds}{s^2 - 1}$$

есть

A — $\{0\}$

B — $\{-1, 1\}$

C — $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

D — $\left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

E — $\varnothing$

36. Пусть $f(x) = \operatorname{tg}(e^{-x^2})$. Тогда значение производной $f'(0)$ равно

A 1

B $\operatorname{tg} e$

C $1/\cos^2 e$

D 0

E не существует

37. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ имеет первообразную, дифференцируемую на $(0,1)$

II. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[0,1]$.

III. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $(0,1)$.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E I, II и III

38. Интеграл $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$ равен

A π

B $\pi/4$

C 1

D другому значению

E не существует

39. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$ сходится на всей вещественной прямой к функции

A $\cos x$

B $\cos(x^2)$

C $\cos^2 x$

D к другой функции

E расходится при $|x| > 0$

40. Пусть $f(x)$ — непрерывная и ограниченная на $(0, 1)$ функция. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $(0, 1)$.

II. Функция $f(x)$ имеет пределы (конечные или бесконечные) при $x \to 0$ и $x \to 1$.

III. Функция $f(x)$ достигает своего наименьшего и наибольшего значения на $(0, 1)$.

A только I

B только II

C только III

D только II и III

E ни одно из утверждений (I, II, III) не является верным

2.1.2 Вторая часть теста

1. Многочлен $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$ является характеристическим многочленом симметричной матрицы A. Известно, что векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

являются собственными векторами матрицы A. Тогда

а) матрица A задает ортогональный проектор;

Да Нет

б) матрица A является ортогональной матрицей;

Да Нет

в) существует две матрицы A, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

г) существует четыре матрицы A, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

д) существует $4! = 24$ матрицы A, удовлетворяющих поставленным условиям;

Да Нет

е) матрица A имеет 8 нулевых элементов;

Да Нет

ж) для всякого вещественного числа α найдется столбец x, при котором $x^{\mathsf{T}} A x = \alpha$, где через x^{T} обозначается строка, получающаяся транспонированием столбца x;

Да Нет

з) сумма элементов матрицы A равна нулю.

Да Нет

2. Максимальное (непродолжаемое) решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения

$$y' = \frac{2y}{x+1} + 2(x-1)(x+1)^2$$

удовлетворяет условию $\varphi(1) = 0$. Тогда

а) область определения функции $\varphi(x)$ — интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) график функции $\varphi(x)$ имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

в) график функции $\varphi(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $\varphi(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$;

Да Нет

д) функция $\varphi(x)$ имеет единственную точку локального максимума $x = 0$, при этом $\varphi(0) = 2$;

Да Нет

е) функция $\varphi(x)$ достигает наименьшего значения в точках $x = -1$, $x = 1$, при этом $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$;

Да Нет

ж) функция $\varphi(x)$ имеет две точки перегиба $x_1 = -1/\sqrt{3}$, $x_2 = 1/\sqrt{3}$, при этом $\varphi\left(-1/\sqrt{3}\right) = \varphi\left(1/\sqrt{3}\right) = 4/9$;

Да Нет

з) график функции $\varphi(x)$ замкнут в $\mathbf{R}^2$.

Да Нет

3. Дана функция $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ и множество $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon xyz = 1\}$. Тогда

а) функция f достигает на множестве M наибольшего значения;

Да Нет

б) функция f достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

в) функция f имеет на множестве M не менее двух локальных максимумов;

Да Нет

г) функция f имеет на множестве M не менее восьми локальных минимумов;

Да Нет

д) точка $(2, 1, 1/2)$ является точкой локального максимума функции f на множестве M;

Да Нет

е) точка $(4, 1, 1/4)$ является точкой локального минимума функции f на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $\left(-\sqrt{2}, -1, 1/\sqrt{2}\right)$ функция f достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(-\sqrt{2}, -1, -1/\sqrt{2}\right)$ функция f достигает наименьшего значения на множестве M;

Да Нет

4. Функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + 2x^{2n} + 1}, & \text{если } x \geqslant 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}}, & \text{если } -1 < x < 1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{arctg}(nx), & \text{если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Тогда

а) функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ и непрерывна в каждой точке $\mathbf{R}$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ имеет асимптоту;

Да Нет

в) функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-1/2, 1/2)$;

Да Нет

г) функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в области своего определения;

Да Нет

д) $f'(1) = 3$;

Да Нет

е) функция $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty, 0)$;

Да Нет

ж) функция $f(x)$ является выпуклой на множестве $[0, +\infty)$;

Да Нет

з) множество значений функции $f(x)$ является выпуклым подмножеством числовой прямой $\mathbf{R}$.

Да Нет

5. Дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x} e^{-nx}$. Обозначим через M множество его сходимости и через $f(x)$ — сумму этого ряда для $x \in M$.

а) множество M является замкнутым подмножеством числовой прямой;

Да Нет

б) множество M является ограниченным подмножеством числовой прямой;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна на множестве M;

Да Нет

г) функция $f(x)$ ограничена сверху на множестве M;

Да Нет

д) функция $f(x)$ достигает на множестве M наименьшего значения;

Да Нет

е) на множестве M ряд не сходится равномерно;

Да Нет

ж) существует отрезок $[a, b] \subset M$, $a < b$, на котором ряд сходится равномерно;

Да Нет

з) на любом интервале $(a, b) \subset M$ ряд сходится равномерно.

Да Нет

2.2 Ответы и решения теста

2.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. E. **2.** E. **3.** B. **4.** C. **5.** C. **6.** D. **7.** D. **8.** E. **9.** E. **10.** C. **11.** D. **12.** B. **13.** A. **14.** A. **15.** A. **16.** A. **17.** B. **18.** B. **19.** D. **20.** A. **21.** E. **22.** A. **23.** E. **24.** B. **25.** D. **26.** B. **27.** E. **28.** A. **29.** C. **30.** D. **31.** D. **32.** E. **33.** B. **34.** E. **35.** D. **36.** D. **37.** E. **38.** B. **39.** B. **40.** E.

2.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Из характеристического уравнения матрицы A видно, что она имеет два собственных числа 0 и 1, каждое кратности 2. Так как матрица A симметричная, то собственные векторы, соответствующие разным собственным числам, ортогональны. Обозначим через

$$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; z_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; z_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и заметим, что векторы z_1 и z_2 не ортогональны (и соответствуют одному собственному числу), и векторы z_3 и z_4 не ортогональны (и соответствуют одному собственному числу). Значит, существует ровно две матрицы A: такая, что $Az_1 = z_1$, $Az_2 = z_2$, $Az_3 = Az_4 = 0$ и такая, что $Az_1 = Az_2 = 0$, $Az_3 = z_3$, $Az_4 = z_4$ (вопрос в) — Да, вопросы г) и д) — Нет).

Так как матрица A симметричная и имеет собственные числа 0 и 1, то она задает ортопроектор (вопрос а) — Да). Так как собственное число 0 имеет ненулевую кратность, то матрица A не может быть ортогональной (вопрос б) — Нет).

Так как матрица A задает ортопроектор, то любой вектор $x \in \mathbf{R}^4$ представим в виде суммы $x = x_1 + x_2$, где $Ax_1 = x_1$, $Ax_2 = 0$ и $x_1^T x_2 = 0$ (ортогональны). Тогда

$$x^T A x = (x_1 + x_2)^T A (x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^T x_1 = x_1^T x_1 + x_2^T x_1 = x_1^T x_1 >= 0.$$

Значит, если $\alpha < 0$, то не существует такого x, что $x^T A x = \alpha$ (вопрос ж) — Нет).

Для ответа на вопросы е) и з) сосчитаем матрицу A. Для упрощения вычислений ортогонализуем систему собственных векторов матрицы A. А именно, рассмотрим векторы

$$z_1' = z_1 - z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } z_3' = z_3 + z_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (в ней по столбцам стоят собственные векторы z_1', z_2, z_3', z_4) ортогональна.

Для матрицы A возможны два случая. Первый ($Az_1' = z_1'$, $Az_2 = z_2$, $Az_3' = Az_4 = 0$):

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй ($Az_1' = Az_2 = 0$, $Az_3' = z_3'$, $Az_4 = z_4$):

$$A = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видим, в обоих случаях число нулевых элементов равно 8 (вопрос е) — Да) и сумма элементов матрицы A больше нуля (вопрос з) — Нет).

Задача 2. Правая часть дифференциального уравнения определена на всей плоскости (x, y) за исключением точек вида $(-1, y)$. В то же время, любое максимальное решение имеет областью определения некоторый отрезок J, содержащий точку 1, так что $J \subset (-1, +\infty)$ (пункт а) — Нет).

Заданное дифференциальное уравнение является линейным неоднородным. Решая однородное уравнение $y' = \dfrac{2y}{x+1}$, получим общее решение:

$$y = C(x+1)^2, \quad C \in (-\infty, +\infty).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянной. Имеем

$$C'(x+1)^2 + C \cdot 2(x+1) = \frac{2C(x+1)^2}{x+1} + 2(x-1)(x+1),$$

откуда $C = (x-1)^2$ и $y = (x-1)^2(x+1)^2$. Таким образом, общее решение таково:

$$y = (x-1)^2(x+1)^2 + C(x+1)^2.$$

Подставив начальное условие $\varphi(1) = 0$, получим интегральную кривую $\varphi(x) = (x-1)^2(x+1)^2 = (x^2-1)^2$. Область определения $J = (-1, +\infty)$.

Функция $\varphi(x)$ — многочлен четвертой степени, значит асимптот у интегральной кривой не может быть (пункты б), в) — Нет).

Так как коэффициент при x^4 положительный, то $\varphi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (пункт г) — Нет).

Для поиска экстремумов вычислим производную:

$$\varphi'(x) = 2(x-1)(x+1)^2 + 2(x-1)^2(x+1) = 4(x-1)(x+1)x.$$

Из положительности коэффициента при x^4 следует, что точки $x = -1$ и $x = 1$ являются локальными (на самом деле глобальными) минимумами многочлена $(x-1)^2(x+1)^2$, а точка $x = 0$ является точкой локального максимума. Однако $\varphi(0) = 1 \neq 2$ (пункт д) — Нет). И также $\varphi(x)$ не определена в точке $x = -1$ (пункт е) — Нет).

Для поиска точек перегиба найдем вторую производную

$$\varphi''(x) = 4(x+1)x + 4(x-1)x + 4(x+1)(x-1) = 4(3x^2-1).$$

Значит, точки $x = -1/\sqrt{3}$ и $x = 1/\sqrt{3}$ (принадлежащие области определения решения) действительно являются точками перегиба. $\varphi\left(-1/\sqrt{3}\right) = \varphi\left(1/\sqrt{3}\right) = 4/9$, следовательно, ответ на вопрос ж) — Да.

При $x \to -1+0$ функция $\varphi(x)$ стремится к нулю. Так как $x = -1$ не принадлежит области определения $\varphi(x)$, то ее график не замкнут в $\mathbf{R}^2$ (пункт з) — Нет).

Задача 3. Множество M замкнуто, но не ограничено. Для последовательности точек $x_n = n$, $y_n = 1/n$, $z_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ выполнены соотношения: $(x_n, y_n, z_n) \in M$ и $f(x_n, y_n, z_n) > n^2$. Значит, функция f не ограничена сверху на множестве M и, следовательно, наибольшего значения у функции f на M не существует. Таким образом, на вопрос а) ответ — Нет.

Множество значений функции f ограничено снизу, поскольку $f(x,y,z) \geqslant 0$ для любой точки (x,y,z). Следовательно, существует $m = \inf\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in M\}$. Так как $(1,1,1) \in M$ и $f(1,1,1) = 7$, то $m \leqslant 7$. Ясно, что если $|x| > 3$ или $|y| > 3$ или $|z| > 3$, то $f(x,y,z) > 7$, поэтому $m = \inf\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in C\}$, где $C = M \bigcap \{(x,y,z) : |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3, |z| \leqslant 3\}$. Но множество C компактно, и в силу теоремы Вейерштрасса существует такая точка $(x_0, y_0, z_0) \in C$, что $f(x_0, y_0, z_0) = m$. Таким образом, ответ на вопрос б) — Да.

Для нахождения локальных экстремумов функции f воспользуемся методом множителей Лагранжа. Для облегчения выкладок сделаем замену переменных: $u = x, v = \sqrt{2}y, w = 2z$. Тогда $uvw = 2\sqrt{2}$, и функция Лагранжа имеет вид $L(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2 + \lambda\left(2\sqrt{2} - uvw\right)$. Рассмотрим следующую систему уравнений (условия первого порядка):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial w} = 0, \\ uvw = 2\sqrt{2}, \end{cases} \iff \begin{cases} 2u = \lambda vw, \\ 2v = \lambda uw, \\ 2w = \lambda uv, \\ uvw = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Решим эту систему. Перемножив первые три уравнения, получим: $8uvw = = \lambda^3(uvw)^2$, откуда (с учетом того, что $uvw = 2\sqrt{2}$) находим $\lambda = \sqrt{2}$. Умножив правую и левую части первого уравнения на u, получим, что $2u^2 = \lambda uvw = = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$, откуда $u = \pm\sqrt{2}$. Аналогично $v = \pm\sqrt{2}$ и $w = \pm\sqrt{2}$. Следовательно, получаем 4 критические точки: $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ и $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Или в координатах (x, y, z): $\left(\sqrt{2}, 1, 1/\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}, -1, -1/\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, 1, -1/\sqrt{2}\right)$ и $\left(-\sqrt{2}, -1, 1/\sqrt{2}\right)$.

Для ответа на вопрос, являются ли эти точки локальными максимумами или минимумами, можно было бы пойти по стандартному пути и исследовать матрицу вторых производных функции L. Однако можно заметить, что значение функции f во всех критических точках одинаково. В то же время, в точке минимума функции f, существование которой доказано выше, должны выполняться необходимые условия экстремума. Отсюда следует, что все критические точки являются точками наименьшего значения функции f на множестве M. Таким образом, получаем ответы: на вопрос в) — Да, на вопрос г) — Нет, на вопрос д) — Нет, на вопрос е) — Нет, на вопрос ж) — Да, на вопрос з) — Нет.

Задача 4. Найдем явный вид функции $f(x)$.

Если $x > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + 2x^{2n} + 1} = \lim_{n\to\infty} x^3 \sqrt[n]{1 + 2/(x^n) + 1/(x^{3n})} = x^3.$$

Если $x = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + 2 + 1} = 1.$$

Поэтому $f(x) = x^3$ при $x \geqslant 1$.

Если $-1 < x < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{3n} + x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} x^2 \sqrt[n]{x^n + 1} = x^2.$$

Если $x \leqslant -1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = -\pi/2,$$

и следовательно, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}x$.

Окончательно получаем (см. также рис. 1):

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \geqslant 1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x < 1, \\ -\dfrac{\pi}{2}x, & \text{если } x \leqslant -1. \end{cases}$$

Эта функция определена на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ и непрерывна во всех точках, кроме $x = -1$. Заметим, что на множестве $[0, +\infty)$ функция $f(x)$ есть

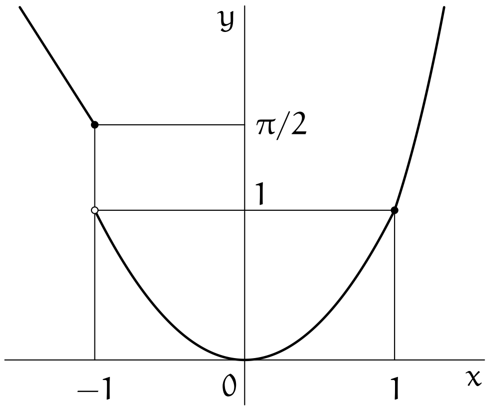


Рис. 1. График функции $f(x)$

максимум двух выпуклых функций x^2 и x^3 и следовательно, является выпуклой на этом множестве. Ответы: на вопрос а) — Нет, на вопрос е) — Да, на вопрос ж) — Да.

Функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = -\dfrac{\pi}{2}x$ при $x \to -\infty$. Ответ на вопрос б) — Да.

Областью значений функции $f(x)$ является, очевидно, множество $[0, +\infty)$, и $f(0) = 0$. Ответы: на вопрос г) — Да, на вопрос з) — Да.

Очевидно, что производная $f'(x)$ существует при $x \neq -1$ и $x \neq 1$. Поскольку левая производная функции $f(x)$ в точке $x = 1$ равна 2, а правая равна 3, то $f(x)$ в точке $x = 1$ недифференцируема. Ответы: на вопрос в) — Да, на вопрос д) — Нет.

Задача 5. Точка $0 \in M$ и $f(0) = 0$ (все члены ряда равны нулю).

Если $x < 0$, то $x \notin M$ (четные члены ряда не определены).

Пусть $x > 0$, тогда $\sqrt[n]{x} \leqslant \max\{1, x\} \equiv C(x)$, и исходный ряд (с положительными слагаемыми) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x} e^{-nx}$ сходится, так как мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $C(x) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$.

Следовательно, $M = [0, +\infty)$, и так как все члены ряда положительные, то $f(x) > 0$ для любого $x > 0$.

Таким образом, получаем ответы: на вопрос а) — Да, на вопрос б) — Нет, на вопрос д) — Да.

Пусть $0 < x < 1$. Тогда $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt{x}$ при $n \geqslant 2$. Следовательно, $f(x) \geqslant xe^{-x} + \sqrt{x} \sum_{n=2}^{\infty} e^{-nx} = xe^{-x} + \dfrac{\sqrt{x}e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to 0+$. Это означает, что функция $f(x)$ не ограничена на любом отрезке $[0, a]$, $a > 0$. В частности, функция $f(x)$ не является непрерывной на M. Отсюда вытекает, что ряд не сходится равномерно на любом отрезке $[0, a]$, $a > 0$, а значит, и на множестве M.

Таким образом, получаем ответы: на вопрос в) — Нет, на вопрос г) — Нет, на вопрос е) — Да.

Если $x \in [a, b]$, $a > 0$, то $\sqrt[n]{x}e^{-nx} \leqslant C(b)e^{-na}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x}e^{-nx}$ сходится равномерно на $[a, b]$ в силу признака Вейрштрасса, поскольку мажорируется сходящимся числовым рядом.

Таким образом, ответ на вопрос ж) — Да.

Рассмотрим остаток ряда $R_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \sqrt[n]{x}e^{-nx}$. Если $x \in (0, 1)$, то $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt[m]{x}$ при $n \geqslant m$, поэтому $R_m(x) \geqslant \dfrac{\sqrt[m]{x}e^{-mx}}{1 - e^{-x}} \sim \dfrac{\sqrt[m]{x}e^{-mx}}{x}$. Значит, для любого m существует число $x > 0$, такое, что $R_m(x) \geqslant 1$. Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{x}e^{-nx}$ на интервале $(0, 1)$ не сходится равномерно.

Таким образом, ответ на вопрос з) — Нет.

3 Вступительный экзамен 2005 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая часть теста

1. Предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln^2 x}{x^3 - 3x + 2}$ равен

A 1

B -1

C $1/3$

D 0

E не существует

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$ равен

A $\sin 1$

B 0

C $1/\sqrt{2}$

D 1

E не существует

3. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ равен

A $98/48$

B $99/49$

C $100/50$

D $101/51$

E $102/52$

4. Определенный интеграл $\int_0^1 \arccos x\, dx$ равен

A 0

B -1

C 1

D $1/2$

E $-1/2$

5. Определенный интеграл $\int_{\sqrt{2}}^{2}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ равен

A 0

B $\pi/12$

C $\pi/4$

D $\pi/3$

E не существует

6. Неопределенный интеграл $\int\dfrac{x^3dx}{x^8+2}$ равен

A $\frac{1}{8}\ln(x^8+2)+C$

B $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$

C $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$

D $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}+C$

E $\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}+C$

7. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящаяся последовательность ненулевых чисел. Тогда

A если у $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть наименьший элемент, то $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неубывающая

B последовательность $\{a_{n+1}/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

C последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

D если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 0$, то последовательность $\{a_{n+1}/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда

A существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$

B функция $f(x)$ имеет разрывы только первого рода

C множество точек разрыва $f(x)$ конечное (или пустое)

D функция $\frac{1}{1+f^2(x)}$ интегрируема по Риману на $[a,b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть x — изолированная точка подмножества M вещественной прямой $\mathbf{R}$. Тогда

A x — предельная точка множества M

B x — внутренняя точка множества M

C x — внешняя точка множества M

D x — граничная точка множества M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. В пространстве $\mathbf{R}^N$, $N \geqslant 2$, задана система векторов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, которая разбита на две подсистемы $X_1 = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и $X_2 = \{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$, где $1 \leqslant k < n$. Известно, что линейные оболочки систем X_1 и X_2 совпадают. Тогда

A если система X линейно независимая, то она линейно зависимая

B если система X линейно зависимая, то она линейно независимая

C если $n = 2k$, то системы X_1 и X_2 обе линейно независимые

D если $n = 2k$, то система X линейно независимая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. В пространстве $\mathbf{R}^n$ заданы три подпространства L_1, L_2 и L_3, размерности которых равны n_1, n_2 и n_3, соответственно. При этом $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Тогда

A если $(L_1 + L_2) \cap L_3 = \{0\}$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

B если $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{0\}$, то $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$

C если $L_1 + L_2 + L_3 = \mathbf{R}^n$, то сумма $L_1 + L_2$ прямая

D $(L_1 + L_2) \cap L_3 = (L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3)$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Две вещественные матрицы A и B имеют размеры $m \times n$ и $n \times m$, соответственно, где $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$. Тогда

A если матрица AB невырожденная, то системы $Ax = a$ и $By = b$ имеют решения при любых правых частях a и b подходящих размерностей

B если системы $Ax = a$ и $By = b$ имеют решения при любых $a \in \mathbf{R}^m$ и $b \in \mathbf{R}^n$, то матрица AB невырожденная

C если система $(AB)y = 0$ имеет только нулевое решение, то матрицы A и B обе имеют линейно независимые столбцы

D если матрица AB невырожденная, то размерности подпространств решений систем $Ax = 0$ и $By = 0$ совпадают

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Вещественная прямоугольная матрица A имеет размеры $m \times n$. Тогда

A если $\det(AA^T) \neq 0$, то $\det(A^TA) \neq 0$

B	если $\det(AA^T) = \det(A^TA)$, то $m = n$

C	$\det(I + 2AA^T) \neq 0$

D	если столбцы матрицы A линейно независимые, то $\det(AA^T) \neq 0$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть A — линейный оператор, действующий из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A	$\mathbf{R}^n = \operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A$

B	если $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$, то $\operatorname{Im} A \neq \mathbf{R}^n$

C	$\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$

D	$\mathbf{R}^n \neq \operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Задана вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A	если матрица $(A^3 - I)$ вырожденная, то единица является собственным числом матрицы A

B	если у матрицы A^2 имеется собственное число 1, то у нее имеется и собственное число -1

C	если матрица A вырожденная, то у матрицы $(I + A)^2$ имеется собственное число 1

D	если единственным собственным числом матрицы A является 0, то матрица A нулевая

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Задана вещественная квадратная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A	если $A^2 = A$, то матрица A задает оператор ортогонального проектирования

B	если A ортогональная симметричная матрица, то матрица A^2 задает оператор проектирования

C	если характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p(\lambda) = \lambda^k(1 - \lambda)^{n-k}$, то матрица A задает оператор проектирования

D	если матрица A ортогональная и λ — вещественное собственное число матрицы A^2, то $\lambda = 1$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Задана квадратная вещественная матрица A порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A матрица (AA^{T}) положительно определенная

B если матрица A симметричная, то матрица A^2 положительно определенная

C если у матрицы A все собственные числа строго положительные, то $\det(A + A^{\mathrm{T}}) > 0$

D если матрица A симметричная, невырожденная и не является ни отрицательно, ни положительно определенной, то $\det A < 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

18. На непустом подмножестве M вещественной прямой $\mathbf{R}$ задана функция $f\colon M \to \mathbf{R}$. Пусть множество $G \subset \mathbf{R}^2$ является графиком функции f, т. е. $G = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$. Тогда

A если функция f непрерывна на M, то множество G замкнутое

B если множество G замкнутое, то функция f непрерывна на M

C замыкание $\overline{G}$ множества G является графиком некоторой функции, заданной на замыкании множества M

D если множество G не является замкнутым, то функция f не является непрерывной на M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

19. Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана формулами: $x_0 = 3/2$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

B $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

C точки 1 и 2 являются предельными для последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

E $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

20. Функция $u(x)$ определена на полупрямой $[0, +\infty)$ и непрерывна на ней, а ее первые две производные существуют и непрерывны на $(0, +\infty)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Если $u'(x) > 0$ и $u''(x) < 0$, то $u(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

II. Если $u'(x) < 0$ и $u''(x) > 0$, то $u(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

III. Если $u'(x) < 0$ и $u''(x) < 0$, то $u(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

A только I

B только II

C только I и II

D I, II и III

E все утверждения I, II, III ложные

21. Коэффициент при x^6 в разложении в ряд Тейлора функции $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ в точке $x = 0$ равен

A 720

B 120

C $1/720$

D 1

E 0

22. Наибольшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ на множестве точек, удовлетворяющих уравнению $x^2 + 2y^2 = 3$, достигается:

A только в точке $\left(0, \sqrt{3/2}\right)$

B только в точке $\left(\sqrt{3}, 0\right)$

C только в точках $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ и $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

D только в точках $\left(0, \sqrt{3/2}\right)$ и $\left(0, -\sqrt{3/2}\right)$

E только в точках $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3/2}\right)$ и $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3/2}\right)$

23. Неявная функция $y = y(x)$ определяется как решение уравнения $3xy - 5x^2 + 5y^3 - 2x^2y = 1$. Тогда производная $\dfrac{dy}{dx}(1)$ равна

A $\quad 1$

B $\quad 11/16$

C $\quad 18/11$

D $\quad 11/18$

E $\quad -11/18$

24. Наибольшее значение функции $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x$ на отрезке $[-2, 10/3]$ равно

A $\quad 1210/27$

B $\quad 30$

C $\quad -6$

D $\quad 1694/27$

E $\quad$ другому числу

25. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4, & x \leqslant 1, \\ 5x - 5, & x > 1. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

II. Функция $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ имеет непрерывную первую производную на $\mathbf{R}$.

III. Функция $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ имеет непрерывную вторую производную на $\mathbf{R}$.

A $\quad$ только I

B $\quad$ только II

C $\quad$ только III

D $\quad$ только I и II

E $\quad$ I, II и III

26. Пусть $f(x) = \max\{6x^2 + 5x - 3,\ 8 - 5x - x^2\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

II. Функция $f(x)$ выпукла на $\mathbf{R}$.

III. Функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную в любой точке $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

27. Пусть $K \subset \mathbf{R}$ – непустое компактное множество, $a = \inf K$, $b = \sup K$, и $f(x)$ – непрерывная на K функция. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на K.

II. Если функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на K во внутренней точке $x_0 \in K$, то существует производная $f'(x_0)$ и $f'(x_0) = 0$.

III. Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке K, то она достигает наибольшего значения на K либо в точке, в которой производная $f'(x)$ обращается в ноль, либо в одной из точек a и b.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E только I и III

28. К графику функции $f(x) = 9x - x^3$ в точке с абсциссой $x = 2$ проведена касательная. Площадь треугольника, образованного касательной и отрезками, отсекаемыми ею на осях координат, равна

A 128/3

B 256/3

C 36

D $240/7$

E $136/3$

29. Пусть $f(x) = \int_x^{x+1} y g(y)dy$, где $g(y) = -1$, если $y < 0$, и $g(y) = 1$, если $y \geqslant 0$. Тогда

A $f'(0) = 0$

B $f'(0) = 1$

C производная $f'(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода

D $f'(0)$ не существует

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

30. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.

II. Существует $\delta > 0$, такое что $f(x) \leqslant x^4$ для любого $x \in (-\delta, \delta)$.

III. Функция $f(x)$ является выпуклой на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E I, II и III

31. Функция $f(x)$ задана и непрерывна на всей числовой прямой, a и b — вещественные числа. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+3}^{b+3} f(x)dx$

II. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^3 f(x)dx - \int_b^3 f(x)dx$

III. $\int_{3a}^{3b} f(x)dx = 3\int_{a}^{b} f(x)dx$

A только I

B только II

C только I и II

D только II и III

E I, II и III

32. Пусть M — подмножество плоскости xOy, где сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!(4x-5y)^n$. Тогда

A M — ограниченное множество

B M совпадает со всей плоскостью xOy

C внутренность множества M — открытый круг положительного радиуса

D внутренность множества M — открытая полуплоскость

E внутренность множества M — пустое множество

33. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, для которой существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Тогда

A $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

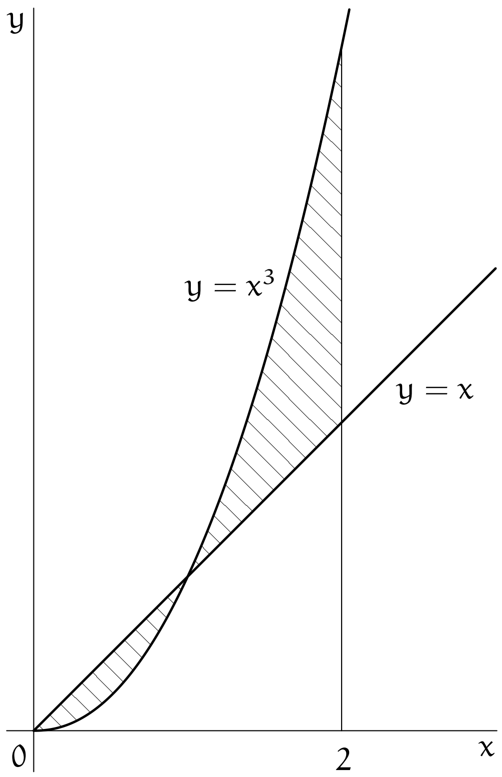
B $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = 0$

C $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

D $f(x)$ — постоянная функция

E $f'(x)$ — постоянная функция

34. На рисунке изображены графики функций $y = x$ и $y = x^3$.



Площадь заштрихованной фигуры равна

A 5/2

B 2

C 7/4

D 9/4

E 3

35. Вода вытекает из бака со скоростью, пропорциональной объему воды, остающейся в баке. Через 30 сек. после начала вытекания в баке оставалась половина первоначального объема воды. Через какое время в баке останется треть начального объема?

A 45 сек.

B $30 \ln 2$ сек.

C $30 \ln 3$ сек.

D $30 \log_2 3$ сек.

E 60 сек.

36. Выберите *неверное* утверждение.

A Существует бесконечное множество в $\mathbf{R}^n$, не имеющее предельных точек

B Дополнение любого незамкнутого множества в $\mathbf{R}^n$ не является открытым

C Существует открытое множество в $\mathbf{R}^n$, содержащее хотя бы одну свою граничную точку

D Если некоторая граничная точка множества M в $\mathbf{R}^n$ не принадлежит M, то множество M бесконечно

E Существует замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, дополнение к которому замкнуто

37. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана равенствами

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{x_n}, \ n = 1, 2, \dots .$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ ограничена.

II. Существует такое число $x_1 > 0$, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не ограничена.

III. Существует такое число $x_1 > 0$, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II и III

38. Функция $f(x, y) = x^3 + y^3$ достигает наименьшего значения на множестве $M = \{(x, y)\colon x^2 - xy + y^2 = 5\}$ в точке (точках)

A $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

B $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

C $\left(0,-\sqrt{5}\right)$, $\left(-\sqrt{5},0\right)$

D $\left(-\sqrt{5},-\sqrt{5}\right)$

E ни один из вариантов ответов A, B, C, D не является верным

39. Функция $f(x,y) = x^2 + y^3$ достигает наименьшего значения на множестве $M = \{(x,y)\colon x + y = 4/3\}$ в точке (точках)

A $\left(\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$

B $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

C $\left(\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

D $f(x,y)$ не достигает наименьшего значения на множестве M

E ни один из вариантов ответов A, B, C, D не является верным

40. Значение максимального решения задачи Коши $y' = -y/x + 2$ при начальном условии $y(1) = 1$ в точке $x = 2$ равно

A $1/2$

B 1

C $3/2$

D 2

E не определено

3.1.2 Вторая часть теста

1. Функция $f(x)$ задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t^3\,dt}{\sqrt{t^4+9}}, & \text{если } x \leqslant -2, \\ \displaystyle\int_{x-1}^x \frac{6\,dt}{t^2}, & \text{если } -2 < x < 1, \\ \displaystyle\int_1^x \left(1 - e^{-t^2}\right)dt, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Обозначим через M множество, на котором определена функция $f(x)$ (соответствующий интеграл существует). Тогда

а) множество M открыто;

Да Нет

б) множество M замкнуто;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна на M;

Да Нет

г) функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M;

Да Нет

д) функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке множества M;

Да Нет

е) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на M;

Да Нет

ж) функция $f(x)$ достигает наименьшего значения на M;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

2. Вещественная квадратная матрица A третьего порядка имеет три различных собственных числа λ_1, λ_2, λ_3, которым соответствует система собственных векторов $\{x_1, x_2, x_3\}$, где

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\{y_1, y_2, y_3\}$ систему собственных векторов транспонированной матрицы A^T, соответствующих собственным числам λ_1, λ_2, λ_3 (в том же порядке). Пусть L_1 — линейная оболочка системы $\{x_1\}$, L_2 — линейная оболочка системы $\{x_2, x_3\}$, L_3 — линейная оболочка системы $\{y_2, y_3\}$. Через P обозначим проектор на L_1 параллельно L_2, а через Q — проектор на L_1 параллельно L_3. Тогда

а) матрица A не симметричная;

Да Нет

б) проектор P ортогональный;

Да Нет

в) проектор Q ортогональный;

Да Нет

г) $PQ = Q$;

Да Нет

д) $QP = P$;

Да Нет

е) число нулевых элементов матрицы P равно двум;

Да Нет

ж) число нулевых элементов матрицы Q равно двум;

Да Нет

з) сумма элементов матрицы Q равна $1/\sqrt{3}$.

Да Нет

3. Пусть a, b, α, x — положительные числа. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ определяется следующим образом:

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = a x_n^{\alpha} + b, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Тогда

а) если $\alpha < 1$ и $x < b$, то при любом $a > 0$ последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей;

Да Нет

б) если $\alpha > 1$, то существуют такие числа $a > 0$, $b > 0$, что при любом $x > 0$ последовательность $\{x_n\}$ расходится;

Да Нет

в) если $\alpha < 1$, то для любых $a > 0$, $b > 0$ существует такое число $x > 0$, что последовательность $\{x_n\}$ расходится;

Да Нет

г) если $a = 3/16$, $b = 1$, $\alpha = 2$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$.

Да Нет

4. Для каждого числа a определим функцию $g(x, a)$ следующим образом:

$$g(x,a) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < a, \\ x - a, & \text{если } x \geqslant a. \end{cases}$$

Пусть $f(x, a) = \displaystyle\int_x^{x^2+1} g(y, a)dy$. Тогда

а) для любого интервала (c, d) существует такое число a, что функция $f(x, a)$ дифференцируема по x при любом $x \in (c, d)$;

Да Нет

б) функция $f(x, 1)$ равномерно непрерывна по x на множестве $(-\infty, 0]$;

Да Нет

в) $\min\limits_{x\in[0,2]} f(x, 2) = -1$, $\max\limits_{x\in[0,2]} f(x, 2) = 9/2$;

Да Нет

г) существует такое число a, что график функции $f(x, a)$ имеет наклонную асимптоту.

Да Нет

5. Функции $y_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определяются как максимальные (непродолжаемые) решения дифференциального уравнения

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x},$$

удовлетворяющие условию $y(1) = n$. Пусть $z_n(x) = x \cdot y_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда а) Каждая функция $y_n(x)$ определена при всех положительных x;

Да Нет

б) Каждая функция $z_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $z'+2z = e^{-x^2}$ и условию $z(1) = n$;

Да Нет

в) Каждая функция $z_n(x)$ равномерно непрерывна на своей области определения;

Да Нет

г) Каждая функция $z_n(x)$ имеет конечный предел при $x \to 0$;

Да Нет

д) Последовательность $y_n(x)$ расходится в любой точке $x \in (0, 1)$;

Да Нет

е) Существует отрезок $[a, b]$, на котором определены все функции $z_n(x)$, и на котором последовательность $z_n(x)$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) Существует такое n, что функция $y_n(x)$ сохраняет знак на своей области определения;

Да Нет

з) Существует n такое, что функция $x \cdot z_n(x)$ ограничена на своей области определения.

Да Нет

6. Дана функция $f(x, y, z) = xy^2 - z$ и множество $M = \left\{(x, y, z) \colon x^2 + 4y^2 + z^2 = 7\right\}$. Тогда

а) функция $f(x, y, z)$ достигает наибольшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

б) функция $f(x, y, z)$ достигает наименьшего значения на множестве M в единственной точке;

Да Нет

в) наибольшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $5/2$;

Да Нет

г) наибольшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $2\sqrt{\frac{7}{3}}$;

Да Нет

д) наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $-\sqrt{7}$;

Да Нет

е) наименьшее значение функции $f(x, y, z)$ на множестве M равно $-\frac{4}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}$;

Да Нет

ж) точка $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2\right)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M;

Да Нет

з) точка $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{3}\right)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y, z)$ на множестве M.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. C. **2.** B. **3.** A. **4.** C. **5.** B. **6.** E. **7.** E. **8.** D. **9.** D. **10.** A. **11.** C. **12.** B. **13.** C. **14.** B. **15.** C. **16.** B. **17.** E. **18.** E. **19.** A. **20.** C. **21.** E. **22.** C. **23.** B. **24.** A. **25.** E. **26.** A. **27.** A. **28.** A. **29.** B. **30.** D. **31.** B. **32.** E. **33.** A. **34.** A. **35.** D. **36.** C. **37.** B. **38.** D. **39.** D. **40.** D.

3.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Сначала найдем явный вид функции $f(x)$ (где это возможно) и множество M, на котором она определена.

Если $x \leqslant -2$, то подынтегральная функция непрерывна и ограничена на отрезке $[x, 0]$. Следовательно, функция $f(x)$ определена при этих x. Произведя замену переменной $z = \sqrt{t^4 + 9}$, $dz = \frac{2t^3 dt}{\sqrt{t^4 + 9}}$, получим:

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^3 dt}{\sqrt{t^4 + 9}} = \int_3^{\sqrt{x^4+9}} \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4 + 9} - 3\right).$$

Если $-2 < x < 1$, то подынтегральная функция не при всех x ограничена на отрезке $[x-1, x]$. А именно, если $0 \leqslant x < 1$, то $0 \in [x-1, x]$, и $f(x)$ не определена. При $-2 < x < 0$ имеем:

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{6dt}{t^2} = \left(-\frac{6}{t}\right)\bigg|_{x-1}^{x} = 6\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{6}{(x-1)x}.$$

Если $x \geqslant 1$, то соответствующий интеграл не выражается в элементарных функциях (при $x = 1$ функция $f(x) = 0$), но он существует при всех $x \geqslant 1$, так как подынтегральная функция непрерывна и ограничена на отрезке $[1, x]$.

Таким образом, функция $f(x)$ определена на множестве $M = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ и равна

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^4+9} - 3\right), & \text{если } x \leqslant -2, \\ \dfrac{6}{(x-1)x}, & \text{если } -2 < x < 0, \\ (x-1) - \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Множество M не является ни открытым, ни замкнутым (вопрос а) — «Нет», вопрос б) — «Нет»).

Функция $f(x)$ непрерывна на каждом из трех отрезков. Поэтому единственная точка, в которой $f(x)$ могла бы иметь разрыв, это точка $x = -2$. Предел слева равен

$$\lim_{x\to -2-0} f(x) = f(-2-0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(-2)^4+9} - 3\right) = 1.$$

Предел справа равен

$$\lim_{x\to -2+0} f(x) = \lim_{x\to -2+0} \frac{6}{(x-1)x} = \frac{6}{(-2-1)(-2)} = 1.$$

Значит функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = -2$, а значит и на всем множестве M (вопрос в) — «Да»).

Предел

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{6}{(x-1)x} = +\infty.$$

То есть функция $f(x)$ неограничена на M в окрестности точки $x = 0$. Следовательно, она не может быть равномерно непрерывной на M (вопрос г) — «Нет»). Кроме того, функция $f(x)$ не достигает наибольшего значения на M (вопрос е) — «Нет»).

Аналогично пункту в) единственная точка, в которой функция $f(x)$ может быть недифференцируемой, это точка $x = -2$. Так как $f(x)$ в этой точке непрерывна, и каждая из функций $\left(\sqrt{x^4+9} - 3\right)/2$ и $6/((x-1)x)$ дифференцируема в точке $x = -2$, то достаточно проверить, совпадают ли левая и правая производные функции $f(x)$. Левая производная:

$$f'(-2-0) = \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^4+9}-3\right)\right)'\Bigg|_{x=-2} = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\Bigg|_{x=-2} = -\frac{8}{5}.$$

Правая производная:

$$f'(-2+0) = \left(\frac{6}{(x-1)x}\right)'\Bigg|_{x=-2} = \left(\frac{6}{x^2} - \frac{6}{(x-1)^2}\right)\Bigg|_{x=-2} = \frac{5}{6}.$$

Так как левая и правая производные не совпадают, то функция $f(x)$ не является дифференцируемой в точке $x = -2$ (вопрос д) — «Нет»).

Заметим, что на интервале $(-\infty, -2)$ функция $f(x)$ убывает (производная отрицательная), а на интервале $(-2, 0)$ функция $f(x)$ возрастает. Следовательно, функция $f(x)$ в точке $x = -2$ достигает наименьшего значения на интервале $(-\infty, 0)$, причем $f(-2) = 1$. На множестве $[1, +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(1) = 0$. Следовательно, наименьшее значение функции $f(x)$ достигается в точке $x = 1$ (вопрос ж) — «Да»).

Проверим теперь наличие наклонной асимптоты. При $x \to -\infty$ функция $f(x)$ ведет себя как $f(x) \sim \sqrt{x^4} = x^2$. Следовательно асимптоты нет.

Рассмотрим поведение $f(x)$ при $x \to +\infty$. Для этого заметим, что функция e^{-x^2} убывает очень быстро ($e^{-x^2} < 1/x^2$), и

$$\int_1^x e^{-t^2} dt < \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} < 1.$$

Так как функция $\int_1^x e^{-t^2} dt$ возрастающая, то существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^{-t^2} dt = A, \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \int_1^x e^{-t^2} dt < A \quad \text{при всех } x \geqslant 1.$$

Рассмотрим отношение $f(x)/x$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x-1}{x} - \frac{\int_1^x e^{-t^2} dt}{x}.$$

Нетрудно видеть, что предел этого отношения при $x \to +\infty$ равен 1.

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = -1 - \lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^{-t^2} dt = -1 - A.$$

Следовательно, у функции $f(x)$ существует наклонная асимптота $x-1-A$ (вопрос з) — «Да»).

График функции $f(x)$ изображен на рис. 2.

Задача 2. Матрица A не может быть симметричной, так как ее собственные векторы x_1 и x_2, соответствующие различным собственным числам, не ортого-

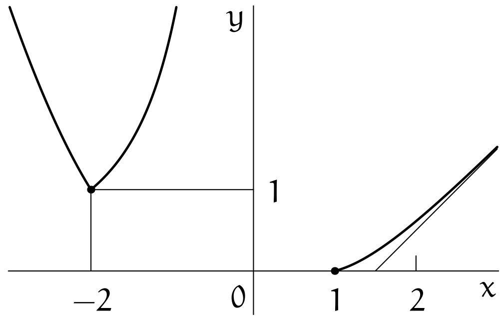


Рис. 2. График функции $f(x)$

нальны друг другу. Ответ на первый вопрос: а) «Да». Так как вектор $x_2 \in L_2$ не ортогонален вектору $x_1 \in L_1$, то подпространство L_2 не служит ортогональным дополнением к L_1, и проектор P не является ортогональным. В то же время векторы y_2 и y_3 ортогональны вектору x_1. Действительно, по условию задачи $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $A^T y_2 = \lambda_2 y_2$ и $A^T y_3 = \lambda_3 y_3$. Поэтому

$$\lambda_2(y_2^T x_1) = (\lambda_2 y_2)^T x_1 = (y_2^T A)x_1 = y_2^T(Ax_1) = \lambda_1(y_2^T x_1),$$

а так как $\lambda_2 \neq \lambda_1$, то $y_2^T x_1 = 0$. Аналогично устанавливается равенство $y_3^T x_1 = 0$. Поэтому подпространства L_1 и L_3, натянутые, соответственно, на системы векторов $\{x_1\}$ и $\{y_2, y_3\}$, ортогональны друг другу. Кроме того, система $\{y_2, y_3\}$ линейно независимая, так как y_2 и y_3 — собственные векторы A^T, соответствующие различным собственным числам (λ_2 и λ_3). Так что $\dim L_3 = 2$, а $\dim L_1 = 1$. Таким образом, L_3 служит ортогональным дополнением к L_1, и проектор Q ортогональный. Ответы на второй и третий вопросы: б) «Нет», в) «Да».

Оба проектора в качестве своего образа имеют подпространство L_1, причем $Px = Qx = x$ для всех $x \in L_1$. Поэтому при любом $z \in \mathbf{R}^3$ имеем $Pz \in L_1$ и $Qz \in L_1$, так что $(PQ)z = P(Qz) = Qz$ и $(QP)z = Q(Pz) = Pz$, то есть $PQ = Q$ и $QP = P$. Ответы на четвертый и пятый вопросы: г) «Да», д) «Да».

Ранги проекторов P и Q равны размерности подпространства L_1, то есть 1, а любая матрица ранга 1 имеет вид uv^T, где u и v — ненулевые столбцы. При этом $Px_1 = x_1$ и $Qx_1 = x_1$, то есть для обеих матриц $(v^T x_1)u = x_1$. Можно положить $u = x_1$, а нормировку v выбрать из условия $v^T x_1 = 1$. Для проектора P имеем еще два условия: $Px_2 = Px_3 = 0$, то есть $v^T x_2 = v^T x_3 = 0$. Этими тремя условиями столбец v определяется однозначно: $v^T = (-1, 1, -1)$. Для проектора Q, ввиду его ортогональности, должно выполняться равенство $Q^T = Q$, то есть $v = \alpha x_1$, где

$\alpha = 1/(x_1^T x_1) = 1/3$. Таким образом,

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответы на последние три вопроса: е) «Нет», ж) «Нет», з) «Нет».

Задача 3. Приведенное ниже решение не является абсолютно строгим, поскольку частично оно основано на графиках, но для получения правильных ответов его можно использовать.

а) Из графика (см. рис. 3) видно, что если $x < c$, где c — абсцисса точки пересече-

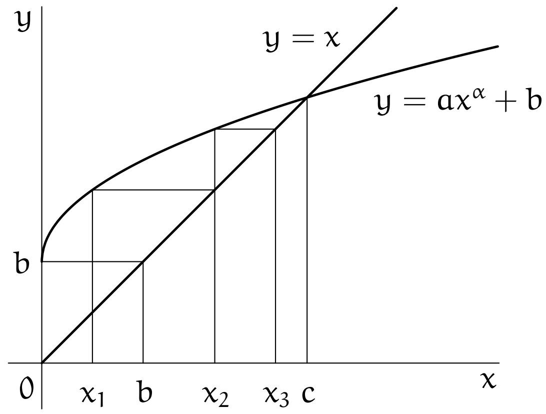


Рис. 3

ния графиков функций $y = x$ и $y = ax^{\alpha}+b$ (такая точка существует и единственна, поскольку $\alpha < 1$, $a > 0$, $b > 0$), то последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является возрастающей. Ясно, что $b < c$, поэтому правильный ответ «Да».

б) Из графика (см. рис. 4) видно, что достаточно выбрать числа $a > 0$, $b > 0$ таким образом, чтобы при всех $x \geqslant 0$ выполнялось неравенство $x < ax^{\alpha} + b$. Это можно сделать, поскольку $\alpha > 1$. Тогда при любом $x > 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ будет расходящейся, точнее, последовательность будет стремиться к $+\infty$. Ответ «Да».

в) Из графика (см. рис. 5) видно, что если $\alpha < 1$, то при любых $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ является сходящейся. Ответ «Нет».

г) Графики функций $y = x$ и $y = \dfrac{3}{16}x^2 + 1$ пересекаются в точках $(4/3, 4/3)$ и $(4, 4)$ (см. рис. 6). Из рисунка видно, что если $x \neq 4$, то либо последовательность

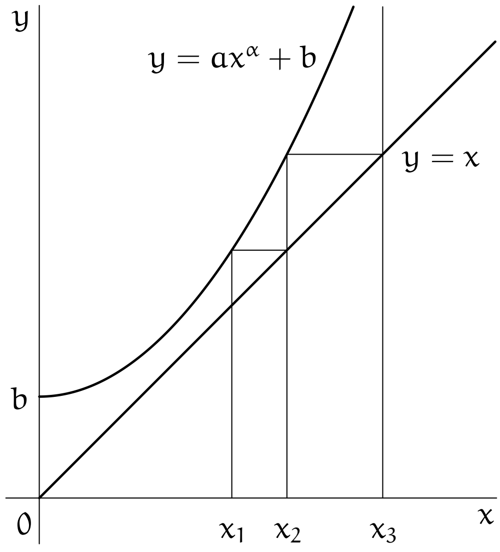


Рис. 4

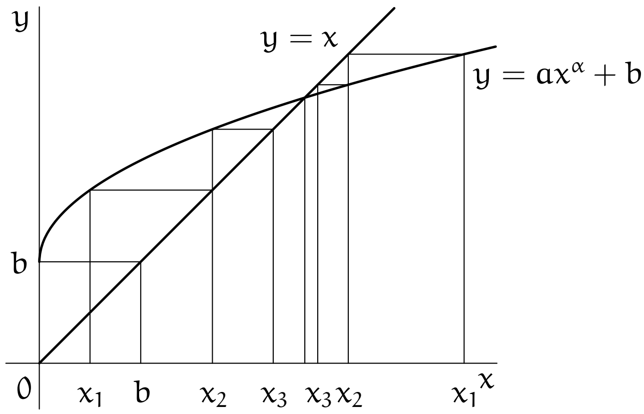


Рис. 5

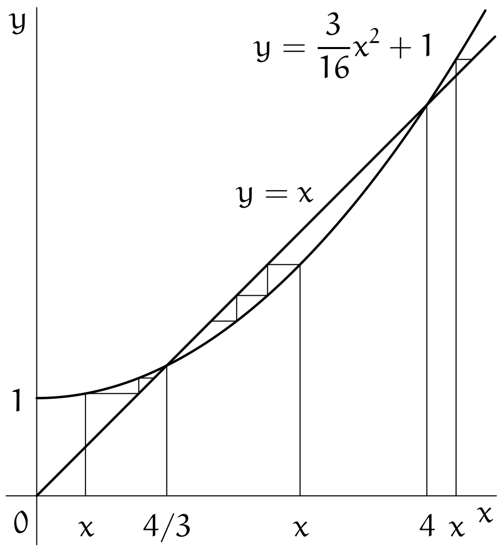


Рис. 6

$\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ расходится (если $x > 4$), либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4/3$ (если $0 < x < 4$). Ответ «Нет».

Задача 4. Функция $g(x, a)$ разрывна в точке $x = a$, непрерывна во всех остальных точках x (см. рис. 7).

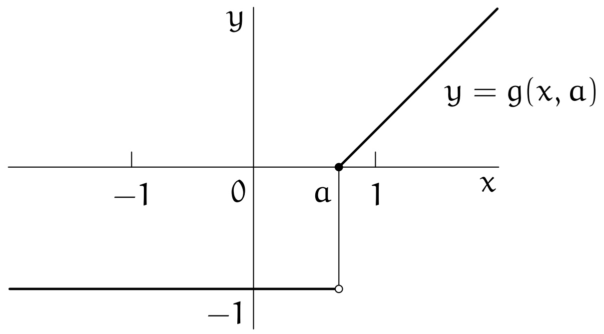


Рис. 7

а) При любом x выполняется неравенство $x < x^2 + 1$. Поэтому если $a < c$, то на отрезке $[x, x^2 + 1]$ функция $g(y, a)$ есть $y - a$ при любом $x \in (c, d)$. Так как эта функция непрерывна в точках x, $x^2 + 1$, то $f(x, a)$ дифференцируема в каждой точке интервала (c, d). Ответ «Да».

б) Нетрудно видеть, что если $x \to -\infty$, то $f(x, 1)$ имеет порядок роста Cx^4, где $C > 0$ и поэтому не может быть равномерно непрерывной. Ответ «Нет».

в) Прямыми вычислениями получаем явное выражение для функции $f(x, 2)$:

$$f(x, 2) = \begin{cases} f_1(x) = -x^2 + x - 1, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ f_2(x) = x - 2 + \dfrac{(x^2 - 1)^2}{2}, & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

Функция $f_1(x)$ отрицательна при всех x, и на отрезке $[0, 1]$ принимает наименьшее значение в точках $x = 0$, $x = 1$, при этом $f_1(0) = f(1) = -1$. Функция $f_2(x)$ на отрезке $[1, 2]$ возрастает и, следовательно, принимает наибольшее значение при $x = 2$, при этом $f_2(2) = 9/2$. Ответ «Да».

г) Для любого a при $x \to \pm\infty$ функция $f(x, a)$ растет как Cx^4, где $C > 0$, поэтому наклонной асимптоты иметь не может. Ответ «Нет».

Задача 5. Соответствующее однородное уравнение $y' + \dfrac{2y}{x} = 0$ имеет общее решение $y = \dfrac{c}{x^2}$. Будем искать решение исходного неоднородного уравнения в виде $y = \dfrac{c(x)}{x^2}$. Подставляя, получим $c'(x) = xe^{-x^2}$, так что $c(x) = \dfrac{K - e^{-x^2}}{2}$ и

$y(x) = \dfrac{K - e^{-x^2}}{2x^2}$. Константа K находится из начального условия $y_n(1) = n$. Окончательно, $y_n(x) = \dfrac{2n + e^{-1} - e^{-x^2}}{2x^2}$ и $z_n(x) = \dfrac{2n + e^{-1} - e^{-x^2}}{2x}$.

Видно, что все функции $y_n(x)$ определены для всех положительных x. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $z_n(x)$ не удовлетворяют уравнению $z' + 2z = e^{-x^2}$. Далее, $z_n(x)$ в окрестности точки $x = 0$ ведет себя как $1/x$, так что не является равномерно непрерывной и не имеет конечного предела.

Последовательность $y_n(x)$ расходится при каждом $x > 0$. То же можно сказать и про последовательность $z_n(x)$, так что сходиться равномерно она ни на каком отрезке не может. Числитель выражения для $y_n(x)$ ограничен снизу числом $2n + e^{-1} - 1$ и положителен при любом n, так что значение $y_n(x)$ положительно при любых n и x. Наконец, функция $x{\cdot}z_n(x) = \dfrac{2n + e^{-1} - e^{-x^2}}{2}$ ограничена на множестве $x > 0$ в силу ограниченности на этом множестве функции e^{-x^2}.

Таким образом, получаем ответы: на вопрос а) — «Да», на вопрос б) — «Нет», на вопрос в) — «Нет», на вопрос г) — «Нет», на вопрос д) — «Да», на вопрос е) — «Нет», на вопрос ж) — «Да», на вопрос з) — «Да».

Задача 6. Так как множество допустимых точек является непустым компактом, а целевая функция непрерывна, то ее наибольшее и наименьшее значения достигаются, а соответствующие точки находятся среди стационарных точек (так как все допустимые точки регулярные).

Функция Лагранжа для этой задачи следующая:

$$L = xy^2 - z - \lambda(x^2 + 4y^2 + z^2 - 7).$$

Дифференцируя по x, y и z, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^2 - 2x\lambda = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2xy - 8y\lambda = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -1 - 2z\lambda = 0. \tag{3}$$

Из последнего уравнения следует, что в стационарной точке $z \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Таким образом, $\lambda = -\dfrac{1}{2z}$. Отсюда и из уравнения (2) следует, что $2y\left(x + \dfrac{2}{z}\right) = 0$.

Если при этом $y = 0$, то из (1) следует, что $x = 0$. Тогда $z = \pm\sqrt{7}$, и значения целевой функции $f = \mp\sqrt{7}$.

Если $y \neq 0$, то $x = -\dfrac{2}{z}$ и из (1) получим $y^2 = \dfrac{2}{z^2}$. Подставив эти соотношения в ограничение $x^2 + 4y^2 + z^2 = 7$, получим уравнене:

$$\frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^2} + z^2 - 7 = 0.$$

Отсюда находим решения: $z^2 = 3$ или $z^2 = 4$. Соответственно, $z = \pm\sqrt{3}$ или $z = \pm 2$.

Следовательно, все стационарные точек следующие:

$$\begin{aligned}
&A_1 = \left(0, 0, \sqrt{7}\right), && \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{7}}, && f(A_1) = -\sqrt{7},\\
&A_2 = \left(0, 0, -\sqrt{7}\right), && \lambda = \frac{1}{2\sqrt{7}}, && f(A_2) = \sqrt{7},\\
&A_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{3}\right), && \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_3) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3},\\
&A_4 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{3}\right), && \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_4) = -\frac{4}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3},\\
&A_5 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{3}\right), && \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_5) = \frac{4}{3\sqrt{3}} + \sqrt{3},\\
&A_6 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{3}\right), && \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}, && f(A_6) = \frac{4}{3\sqrt{3}} + \sqrt{3},\\
&A_7 = \left(-1, \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right), && \lambda = -\frac{1}{4}, && f(A_7) = -\frac{5}{2},\\
&A_8 = \left(-1, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 2\right), && \lambda = -\frac{1}{4}, && f(A_8) = -\frac{5}{2},\\
&A_9 = \left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right), && \lambda = \frac{1}{4}, && f(A_9) = \frac{5}{2},\\
&A_{10} = \left(1, -\sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right), && \lambda = \frac{1}{4}, && f(A_{10}) = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, можно ответить на первые 6 вопросов: а) — «Да», б) — «Да», в) — «Нет», г) — «Нет», д) — «Да», е) — «Нет».

Чтобы ответить на оставшиеся вопросы, вычислим вторую производную функции Лагранжа.

$$D^2L = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2y & 0 \\ 2y & 2x - 8\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

Эта производная в точке $\left(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\right)$ равна:

$$D^2L = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Допустимые значения вариаций (векторы, ортогональные градиенту уравнения связи $(2x, 8y, 2z)$) определяются уравнением $dx + 2\sqrt{2}dy - 2dz = 0$. Выразим dx и найдем значения квадратичной формы D^2L на этих векторах. Получим:

$$\begin{pmatrix}2dz-2\sqrt{2}dy & dy & dz\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2dz-2\sqrt{2}dy\\ dy\\ dz\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}dy & dz\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-12 & 4\sqrt{2}\\ 4\sqrt{2} & -5/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dy\\ dz\end{pmatrix}.$$

Эта квадратичная форма не является положительно полуопределенной, поэтому данная стационарная точка не является точкой локального минимума (вопрос ж) — «Нет»).

Вычислим вторую производную функции Лагранжа в точке $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{3}\right)$:

$$D^2L=-\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 2\sqrt{2} & 0\\ 2\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Допустимые значения вариаций в этой точке определяются уравнением $2dx-4\sqrt{2}dy-3dz=0$. Выразим dx и найдем значения квадратичной формы D^2L на этих векторах. Получим:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3/2dz+2\sqrt{2}dy & dy & dz\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\sqrt{2} & 0\\ 2\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/2dz+2\sqrt{2}dy\\ dy\\ dz\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}dy & dz\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24 & 6\sqrt{2}\\ 6\sqrt{2} & 13/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dy\\ dz\end{pmatrix}.$$

Эта квадратичная форма является отрицально определенной, поэтому данная стационарная точка является точкой локального максимума (вопрос з) — «Да»).

4 Вступительный экзамен 2006 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Пусть A и B — две вещественные прямоугольные матрицы, имеющие размеры, соответственно, $m \times n$ и $s \times n$. Обозначим через L_1 множество решений системы $Ax = 0$, а через L_2 — множество решений системы $Bx = 0$. Тогда

A если $m + s > n$, то существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$

B если $m + s > n$, то $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

C если $m + s < n$, то $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$

D если $m + s < n$, то существует ненулевой $x \in L_1 \cap L_2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

2. Пусть A — вещественная кососимметрическая матрица, то есть для ее транспонированной выполняется равенство $A^T = -A$. Тогда

A если $A^2 = I$, то A — ортогональная матрица

B если $A^2 = -I$, то матрица A задает проектор

C если матрица A задает проектор, то $A = 0$

D если A ортогональная матрица, то у нее есть вещественное собственное число

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

3. Пусть L_1 и L_2 — подпространства в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim(L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$

B если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim L_1 + \dim L_2 \leqslant n$

C если $L_1 \cup L_2$ является подпространством, то $\dim(L_1 + L_2) > 0$

D если $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^n$, то подпространства L_1 и L_2 образуют прямую сумму

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

4. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 6$, а I — единичная матрица того же порядка. Определим многочлен $p(\lambda)$ формулой $p(\lambda) = \det(I + \lambda A)$. Тогда

A многочлен $p(\lambda)$ имеет степень n

B если матрица A невырожденная, то многочлен $p(\lambda)$ имеет степень n^2

C многочлен $p(\lambda)$ имеет строго положительный корень

D если n нечетное, то многочлен $p(\lambda)$ имеет строго отрицательный корень

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

5. Пусть A и B — вещественные симметричные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Тогда

A если A и B положительно определенные матрицы, то матрица AB имеет только вещественные положительные собственные числа

B	если A и B отрицательно определенные матрицы, то матрица AB имеет только вещественные отрицательные собственные числа

C	если матрица AB имеет только вещественные положительные собственные числа, то матрицы A и B положительно определенные

D	если матрица AB имеет только вещественные отрицательные собственные числа, то матрицы A и B отрицательно определенные

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

6. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка $n \geqslant 6$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ стандартное скалярное произведение и предположим, что при любом вещественном α матрица $A + \alpha B$ задает оператор проектирования. Тогда

A	если n четное, то $B \neq 0$

B	если $B = 0$, то матрица A симметричная

C	если матрица A задает оператор ортогонального проектирования, то $A \neq B$

D	если матрица A не задает оператор проектирования, то $AB \neq BA$

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

7. Пусть A и B — вещественные матрицы, размеры которых равны, соответственно, $m \times n$ и $n \times m$. Тогда

A	если ранги матриц AB и A совпадают, то $m = n$ и матрица B невырожденная

B	если система $(AB)y = a$ имеет решение при любом $a \in \mathbf{R}^m$, то ранг матрицы A равен m

C	если матрица AB невырожденная, то и матрица BA невырожденная

D	если система $(BA)x = b$ имеет не более одного решения при каждом $b \in \mathbf{R}^n$, то ранг матрицы B равен m

E	все четыре утверждения A, B, C, D ложные

8. Определим функцию двух векторных аргументов $f(x, y)$, $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, положив $f(x, y) = x^T A y$, где A — вещественная квадратная матрица порядка n. Тогда

A если матрица A симметричная, то $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

B если функция $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, то матрица A симметричная

C если матрица A невырожденная, то $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

D если $x^{\mathsf{T}}Ax > 0$ при любом ненулевом $x \in \mathbf{R}^n$, то $f(x, y)$ задает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

9. Пусть A — замкнутое подмножество $\mathbf{R}$, $a \in A$, $b \notin A$, $a < b$. Тогда

A найдется точка границы множества A, принадлежащая (a, b)

B найдется точка границы множества A, принадлежащая $[a, b)$

C найдется точка границы множества A, принадлежащая $(a, b]$

D не существует точки границы множества A, принадлежащей $[a, b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. Пусть M — компактное подмножество $\mathbf{R}$. Тогда

A если M не имеет предельных точек, то M имеет мощность континуума

B если M не имеет предельных точек, то M счетное

C если M не имеет предельных точек, то M конечное

D если M не имеет предельных точек, то M пустое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Значение максимального решения задачи Коши $y' = -y^2$, $y(1) = 1$, в точке $x = -1$ равно

A 1

B 0

C -1

D e

E не определено

12. Решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$, $y(0) = y_0$, имеет предел $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 1$. Тогда y_0 равно

A 0

B 1

C $e^{\pi/2}$

D $e^{-\pi/2}$

E не существует

13. Множество значений последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет ровно одну предельную точку. Тогда

A последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится

B последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ расходится

C последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченная

D последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограниченная

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Наибольшее значение функции $f(x,y) = xy$ на множестве $M = \{(x,y)\colon -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}, y = \sqrt{2-x^2}\}$ достигается в точке (точках)

A $(1,1)$, $(-1,-1)$

B $(1,1)$

C $(-1,-1)$

D $(-1,1)$, $(1,-1)$

E не достигается ни в одной точке

15. Функция $f(x)$ определена на интервале (a,b). Тогда

A если $f(x)$ непрерывна на (a,b), то $f(x)$ ограничена на (a,b)

B если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то $f(x)$ ограничена на (a,b)

C если $f(x)$ непрерывна на (a,b), то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a,b)

D если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a,b)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Кривая на плоскости (x, y) задана уравнением $6x^2-7xy-2y^3+3=0$. Уравнение касательной к этой кривой, проведенной через точку $(1,1)$, есть

A $8x-13y+5=0$

B $12x-5y-7=0$

C $5x-13y+8=0$

D $9x-11y+2=0$

E другое уравнение, не совпадающее ни с одном из перечисленных в A, B, C, D

17. Функция $f(x)$ задана и непрерывна в каждой точке числовой прямой, и $f(x) = \dfrac{x-\sin x}{2x^3}$ для $x \neq 0$. Тогда

A $f(0)=0$

B $f(0)=1/2$

C $f(0)=1/6$

D $f(0)=1/12$

E функция с указанными свойствами не существует

18. Последовательность $\{x_n, n=1,2,\ldots\}$ задана равенствами $x_1=1$, $x_2=6$, $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Тогда

A $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

B $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 4$

C $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$

D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ равен другому числу, отличному от перечисленных в A, B, C

E $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует

19. Дана функция двух переменных $f(x,y) = x^2-6xy+2y^2+6x+10y+5$. Тогда

A функция $f(x,y)$ на плоскости (x,y) имеет наибольшее значение и не имеет наименьшего значения

B функция $f(x,y)$ на плоскости (x,y) имеет наименьшее значение и не имеет наибольшего значения

C точка $(3, 2)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на плоскости (x, y)

D точка $(2, 4)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на плоскости (x, y)

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

20. Дана функция двух переменных $f(x, y) = e^{x^2+y}$ и множество $M = \{(x, y) : x + y \leqslant 2\}$. Тогда

A функция $f(x, y)$ на множестве M ограничена сверху и не ограничена снизу

B функция $f(x, y)$ на множестве M достигает наименьшего значения

C точка $(1/2, 3/2)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

D точка $(0, 0)$ является точкой локального минимума функции $f(x, y)$ на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

21. Радиус сферы уменьшается со скоростью, пропорциональной площади поверхности сферы. В начальный момент времени ($t = 0$) радиус сферы равен 4, через две секунды радиус уменьшился в 2 раза. В какой момент времени радиус уменьшится в 4 раза?

A 4 сек.

B 6 сек.

C 8 сек.

D в другой момент времени, отличный от перечисленных в A, B, C

E такого момента времени не существует

22. Последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ задана равенствами $x_1 = a$, $x_{n+1} = e^{-x_n} + 2$, $n \geqslant 1$. Тогда

A при любом a последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ монотонно возрастает

B существует такое a, что последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ не ограничена сверху

C для любого $a \in [1, 2]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ имеет предел

D для любого $a \in [4, 6]$ последовательность $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ имеет предел, и $\lim\limits_{t\to\infty} x_n < 2$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

23. Выберите ***ложное*** утверждение.

A пересечение счетного множества выпуклых подмножеств $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

B замыкание выпуклого подмножества $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

C внутренность выпуклого подмножества $\mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством

D выпуклая функция, определенная на выпуклом замкнутом множестве $M \subset \mathbf{R}^n$, непрерывна на M

E среди утверждений A, B, C, D есть ложное

24. Дана функциональная последовательность $\{f_n(x) = x\sqrt{n}e^{-\sqrt{nx}}, n = 1, 2, \dots\}$. Обозначим через M множество таких $x \in \mathbf{R}$, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на M. Тогда

A множество M открыто

B функция $f(x)$ имеет разрыв на M

C существует такой интервал $(a, b) \subset M$, что последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ не сходится равномерно на (a, b)

D для любого отрезка $[a, b] \subset M$ последовательность $\{f_n(x), n = 1, 2, \dots\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на $[a, b]$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

25. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n .$$

Пусть M — множество точек на числовой прямой $\mathbf{R}$, в которых ряд сходится. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

A множество M открыто

B $S(x) \geqslant 0$ при любом $x \in M$

C на интервале $(1/4, 1/3)$ ряд сходится к функции $S(x)$ равномерно

D функция $S(x)$ непрерывна на множестве M

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

26. Неопределенный интеграл
$$\int \frac{dx}{x^2 + x}$$
равен

A $\dfrac{6}{2x^3 + 3x^2} + C$

B $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + C$

C $\ln|x^2 + x| + C$

D $\ln\left|\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right| + C$

E $\ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right| + C$

27. Неопределенный интеграл
$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1}$$
равен

A $\dfrac{1}{2}x^2 \ln|x^2 + 1| + C$

B $\dfrac{1}{x^2/2 + \ln|x|} + C$

C $\ln|\operatorname{arctg} x| + C$

D $\operatorname{arctg} x + C$

E $\dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C$

28. Определенный интеграл
$$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{2 - x^2}}$$
равен

A $-\pi/4$

B $\pi/4$

C $-1/\sqrt{2}$

D $1/\sqrt{2}$

E $\pi/2$

29. Определенный интеграл

$$\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{1}{x}\right)\right) dx$$

равен

A $\operatorname{tg}(7/2) - \operatorname{tg} 2$

B $\operatorname{tg}(5/2) - \operatorname{tg} 2$

C $1/2$

D $(\operatorname{tg}(7/2))^2 - (\operatorname{tg} 2)^2$

E $(\operatorname{tg}(5/2))^2 - (\operatorname{tg} 2)^2$

30. Площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, равна

A $1/6$

B $1/3$

C $1/2$

D $2/3$

E 1

31. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}}{\sin \sqrt[3]{x}}$ равен

A $-2/3$

B $2/3$

C $3/2$

D 2

E не существует

32. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)^{(1-x)/x^2}$ равен

A $2 \ln \dfrac{1}{2}$

B $e^{-1/2}$

C $e^{1/2}$

D e^{-2}

E e^{2}

33. При каком наибольшем значении целого положительного числа k максимальное (непродолжаемое) решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt} = x^k$, $x(0) = 1$ определено в точке $t = \pi/12$?

A 1

B 2

C 3

D 4

E другом

34. Пусть функция $f(x)$ определена, ограничена и непрерывна вместе со своей производной на $\mathbf{R}$, и пусть

$$g(x) = \begin{cases} [f^2(x)]^{f^2(x)}, & \text{если } f(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны:

I. Функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$.

II. Функция $g(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$.

III. Функция $g(x)$ дифференцируема $\mathbf{R}$.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E ни одно из I, II и III

35. Сумма ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

равна

A 2

B 4

C 6

D 1

E другому числу

36. Значение максимального (непродолжаемого) решения задачи Коши $\frac{dy}{dx} = y \sin x$, $y(\pi/2) = -\pi^3/48$ в точке $x = -\pi/2$

A равно $-\pi^3/16$

B равно $-\pi^3/48e$

C равно $-\pi^3/48$

D равно другому числу

E не существует

37. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $4x^2y - \sin xy + 3y^2 = 12$. Производная $\frac{dy}{dx}$ в точке $(0, 2)$

A равна $1/6$

B равна $-1/6$

C равна $-1/12$

D равна $1/12$

E равна другому числу или не существует.

38. Множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^{2n} x$ есть

A $\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$

B открытое множество, отличное от $\mathbf{R}$

C замкнутое множество, отличное от $\{\pi k, k \in \mathbf{Z}\}$ и от $\mathbf{R}$

D $\mathbf{R}$

E Ни одно из A, B, C, D.

39. Неявная функция $y(x)$ определяется уравнением $3x^5y^2 - 4xy^3 + 2x^2y^3 + 3x^4y^3 = 2$. Производная $\frac{dy}{dx}$ в точке $(1, -1)$ равна

A $\quad 0$

B $\quad -3$

C $\quad -1$

D $\quad 1$

E $\quad$ другому числу

40. Сумма ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

равна

A $\quad \ln\frac{3}{2} - 1$

B $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - 1$

C $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}$

D $\quad \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}$

E $\quad$ другому числу

4.1.2 Вторая часть теста

1. Пусть положительные числа a_n, $n = 1, 2, \ldots$, таковы, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Функции $f_n(x)$ заданы формулами

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{nx^n}, & \text{если } x \leqslant -1, \\ a_n \cdot \left(3x^2/2 + x\right), & \text{если } -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^n}{(n-1)!}, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда

а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится для любой точки $x \in \mathbf{R}$;

Да $\qquad$ Нет

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на своей области сходимости;

Да $\qquad$ Нет

в) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что $f_n(x)$ непрерывна для любого n;

Да Нет

г) существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что каждая $f_n(x)$ имеет ровно одну точку разрыва;

Да Нет

д) функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на своей области определения;

Да Нет

е) функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ положительна на своей области определения;

Да Нет

ж) для любой последовательности $\{a_n\}$ функции $f_n(x)$ дифференцируемы во всех точках, в которых непрерывны;

Да Нет

з) последовательность $g_N(x) = \dfrac{1}{1+\left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\right)^2}$ сходится к $g(x) = \dfrac{1}{1+\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)^2}$ равномерно на своей области сходимости.

Да Нет

2. В пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$, введено стандартное скалярное произведение, при котором матрица A порядка n задает ортогональный проектор. Столбцы $u \in \mathbf{R}^n$ и $v \in \mathbf{R}^n$ выбраны так, что матрица $A + uu^\mathsf{T}$ является невырожденной, а матрица $A + vv^\mathsf{T}$ — вырожденной (индекс T обозначает транспонирование). Тогда

а) матрица $A + uu^\mathsf{T}$ положительно определенная;

Да Нет

б) матрица $A + vu^\mathsf{T}$ вырожденная;

Да Нет

в) матрица $A + 2vv^\mathsf{T}$ положительно определенная;

Да Нет

г) ранг матрицы A не меньше, чем $n-1$;

Да Нет

д) ранг матрицы A не больше, чем $n-2$;

Да Нет

е) матрица $A + Auu^T A$ положительно определенная;

Да Нет

ж) у матрицы $A - uu^T$ есть строго отрицательное собственное число;

Да Нет

з) число 1 является собственным числом матрицы $A - uu^T$.

Да Нет

3. Дана функция $f(x,y) = 2x^2 - 7y^2$ и множество $M = \{(x,y)\colon 4x^4 + y^4 = 4x^2 - 2y^2\}$. Тогда

а) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в четырех точках;

Да Нет

б) функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения на множестве M в трех точках;

Да Нет

в) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в четырех точках;

Да Нет

г) функция $f(x,y)$ достигает наименьшего значения на множестве M в трех точках;

Да Нет

д) наибольшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M равно 2;

Да Нет

е) наименьшее значение функции $f(x,y)$ на множестве M равно 0;

Да Нет

ж) существует точка, принадлежащая M и являющаяся точкой локального минимума функции $f(x, y)$, в которой не достигается наименьшее значение функции $f(x, y)$ на M;

Да Нет

з) существует точка, принадлежащая M и являющаяся точкой локального максимума функции $f(x, y)$, в которой не достигается наибольшее значение функции $f(x, y)$ на M.

Да Нет

4. Дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{n^{\alpha}},$$

где α — некоторый параметр. Пусть M — множество его сходимости. Для $x \in M$ обозначим через $S(x)$ сумму этого ряда. Тогда

а) при любом $\alpha \in (0, 1)$ множество M непусто и замкнуто;

Да Нет

б) при любом $\alpha \in (0, 1)$ множество M не ограничено;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ непрерывна на множестве M;

Да Нет

г) при любом $\alpha \in [1, +\infty)$ функция $S(x)$ ограничена на любом ограниченном подмножестве множества M;

Да Нет

д) при $\alpha = 2$ существует такая точка $x_0 \in M$, что $S(x_0) = 2$;

Да Нет

е) при любом $\alpha \in [0, +\infty)$ ряд сходится к функции $S(x)$ равномерно на любом компактном подмножестве множества M;

Да Нет

ж) при $\alpha = 1$ ряд сходится равномерно на интервале $(0, 1)$;

Да Нет

з) существует $\alpha > 0$, такое что график функции $S(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

5. Пусть для всех $x \in \mathbf{R}$ функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \int_{2+x}^{1+e^x} \frac{t}{1+t^4}\,dt.$$

Тогда

а) функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{R}$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ дифференцируема на $\mathbf{R}$;

Да Нет

в) $f(x) \geqslant 0$ для всех x, в которых она определена;

Да Нет

г) $f'(x) \neq 0$ для всех x, в которых $f(x)$ дифференцируема;

Да Нет

д) $f(0) = 0$;

Да Нет

е) $f'(0) = 1$;

Да Нет

ж) предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;

Да Нет

з) предел $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** C. **3.** E. **4.** E. **5.** A. **6.** D. **7.** B. **8.** B. **9.** B. **10.** C. **11.** E. **12.** D. **13.** E. **14.** B. **15.** E. **16.** C. **17.** D. **18.** C. **19.** E. **20.** E. **21.** B. **22.** C. **23.** D. **24.** D. **25.** D. **26.** B. **27.** E. **28.** E. **29.** B. **30.** B. **31.** D. **32.** C. **33.** D. **34.** B. **35.** C. **36.** C. **37.** A. **38.** B. **39.** D. **40.** D.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Легко видеть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится для всех $x \in (-1, 0)$, и его сумма равна $3x^2/2 + x$. Для $x \geqslant 1$ ряд сходится (но не равномерно, поскольку функции $f_n(x)$ неограничены) к xe^x, а для $x \leqslant -1$ ряд сходится к $-\ln(1 - 1/x)$. Ответ на вопрос а) да, на вопрос б) нет. Кроме того, видно, что предел функции $f(x)$ справа в точке $x = -1$ равен $1/2$, а значение в этой точке равно $-\ln 2$. Ответы на вопросы д) и е) нет.

Далее видно, что независимо от a_n, все функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $x = 0$ (и равны нулю). Так что если выбрать a_n, позаботившись лишь о том, чтобы $\frac{a_n}{2} \neq \frac{(-1)^n}{n}$, то все функции $f_n(x)$ будут иметь разрыв в единственной точке $x = -1$. Вообще не иметь разрыва все функции $f_n(x)$ не могут. Например, для нечетных n значение в точке $x = -1$ отрицательно, а предел справа положителен. Ответ на вопрос в) нет, на вопрос г) да. Далее, правая производная функции $f_n(x)$ в точке $x = 0$ равна нулю для всех $n > 1$, а левая производная в той же точке равна a_n, что не обязательно то же самое. Ответ на вопрос ж) нет.

Исследуем теперь равномерную сходимость последовательности $g_N(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\right)^2}$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на всем $\mathbf{R}$, то и $g_N(x)$ сходится к $g(x)$ на всем $\mathbf{R}$. Рассмотрим сходимость этой последовательности отдельно на трех множествах: $(-1, 0)$, $(-\infty, -1]$, $[0, +\infty)$.

Нетрудно видеть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на интервале $(-1, 0)$ равномерно (это следует из ограниченности функции $3x^2/2 + x$). Так как функция $\dfrac{1}{1 + x^2}$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, то последовательность $g_N(x)$ суперпозиций этой функции с частичными суммами ряда тоже сходится равномерно.

На множестве $(-\infty, -1]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ является рядом Лейбница. Так как $f_n(x)$ равномерно стремится к нулю на $(-\infty, -1]$, то и сам ряд сходится равномерно. Равномерная сходимость последовательности $g_N(x)$ следует из равномерной непрерывности функции $\dfrac{1}{1 + x^2}$.

При $x \in (0, +\infty)$ все функции $f_n(x)$ неотрицательные и монотонно возрастающие. Следовательно, все частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ тоже неотрицательные и монотонно возрастающие. А значит функции $g_N(x)$ все монотонно убывающие. Кроме того, $g_N(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, и сходимость $g_N(x)$ к $g(x)$ монотонная при всех $x \in \mathbf{R}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $g_N(x)$ убывают по N и стремятся к нулю при $x \to +\infty$, то найдется такое $M > 0$, что при всех N и при всех $x > M$ выполнено неравенство $0 < g(x) < g_N(x) < \varepsilon$.

На отрезке $[0, M]$ последовательность непрерывных функций $g_N(x)$ монотонно сходится к непрерывной функции $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2e^{2x}}$. Следовательно, сходимость равномерная, и найдется такое $N_0 \in \mathbf{N}$, что для всех $N > N_0$ и $x \in [0, M]$ выполняется неравенство $|g_N(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Таким образом, получили, что при всех $N > N_0$ и $x \in [0, +\infty)$ справедливо неравенство $|g_N(x) - g(x)| < \varepsilon$. Это и значит, что последовательность $g_N(x)$ равномерно сходится к $g(x)$ на $[0, +\infty)$.

Следовательно, $g_N(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на объединении всех трех множеств, т. е. на $\mathbf{R}$. Ответ на вопрос з) да.

Задача 2. Как ортогональный проектор матрица A симетричная и положительно полуопределенная, т. е. $z^T A z \geqslant 0$ при всех $z \in \mathbf{R}^n$. Тогда $z^T(A + uu^T)z = z^T A z + (u^T z)^2 \geqslant 0$ при всех $z \in \mathbf{R}^n$, так что матрица $A + uu^T$ тоже положительно полуопределенная. Так как эта матрица невырожденная по условию задачи, то она и положительно определена. По аналогичным причинам матрица $A + vv^T$ тоже полуопределенная, но так как она вырожденная, то существует $z \in \mathbf{R}^n$, $z \neq 0$, при котором $z^T A + (z^T v)v^T = 0$. Тогда $z^T A z + (z^T v)^2 = 0$, и так как $z^T A z \geqslant 0$, то $z^T A z = 0$ и $z^T v = 0$. Первое равенство для полуопределенной симметричной матрицы A означает, что $z^T A = 0$. Поэтому $z^T(A + vu^T) = 0$, $z^T(A + 2vv^T) = 0$ и $z^T(A + Auu^T A) = 0$. Таким образом, ответы на пункты а) и б) да, на пункты в) и е) нет. Кроме того, матрица A вырожденная. В то же время ввиду невырожденности матрицы $A+uu^T$ система $z^T A = 0$, $z^T u = 0$ имеет только нулевое решение, т. е. расширенная матрица $[A, u]$ имеет ранг n. Поэтому матрица A имеет ранг ровно $n - 1$. Ответы на пункт г) да, на пункт д) нет.

Воспользовавшись вырожденностью матрицы A, выберем $z \in \mathbf{R}^n$, $z \neq 0$, $z^A = 0$. При этом, как было отмечено выше, $z^T u \neq 0$, так что $z^T(A - uu^T)z = -(z^T u)^2 < 0$. То есть симметричная матрица $A - uu^T$ не является положительно полуопределенной, и у нее должно быть строго отрицательное собственное число. Ответ на пункт ж) да. Если $n = 2$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то все условия задачи выполнены, но матрица $A - uu^T$ не имеет 1 в качестве собственного числа. Этот контрпример показывает, что ответ на пункт з) нет.

Задача 3. Так как множество M компактное, а целевая функция непрерывна, то ее наибольшее и наименьшее значения на M достигаются, а соответствующие точки находятся либо среди стационарных точек, либо среди нерегулярных точек.

Нерегулярная точка (в которой производные функции, задающей множество M, равны нулю) в данной задаче одна: $x = 0$, $y = 0$.

Функция Лагранжа для этой задачи следующая:

$$L = 2x^2 - 7y^2 + \lambda(4x^4 + y^4 - 4x^2 + 2y^2).$$

Дифференцируя по x и y, получим систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + \lambda(16x^3 - 8x) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -14y + \lambda(4y^3 + 4y) = 0.$$

Добавив к этой системе уравнение

$$4x^4 + y^4 = 4x^2 = 2y^2, \tag{1}$$

и решив полученную систему из трех уравнений, получим 7 стационарных точек:

$$
\begin{array}{llll}
x = 0, & y = 0, & \lambda \text{ не определено}, & f(0,0) = 0, \\
x = -1, & y = 0, & \lambda = -\dfrac{1}{2}, & f(-1,0) = 2, \\
x = 1, & y = 0, & \lambda = -\dfrac{1}{2}, & f(1,0) = 2, \\
x = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}, & y = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}, & \lambda = \dfrac{5}{2}, & f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}, -\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right) = -2, \\
x = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}, & y = \sqrt{\dfrac{2}{5}}, & \lambda = \dfrac{5}{2}, & f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}, \sqrt{\dfrac{2}{5}}\right) = -2, \\
x = \sqrt{\dfrac{2}{5}}, & y = -\sqrt{\dfrac{2}{5}}, & \lambda = \dfrac{5}{2}, & f\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}, -\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right) = -2, \\
x = \sqrt{\dfrac{2}{5}}, & y = \sqrt{\dfrac{2}{5}}, & \lambda = \dfrac{5}{2}, & f\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}, \sqrt{\dfrac{2}{5}}\right) = -2.
\end{array}
$$

(Заметим, что нерегулярная точка оказалась среди стационарных.)

Сравнивая значения функции $f(x, y)$ в стационарных точках, нетрудно заметить, что наибольшее значение функции на M равно 2 (достигается в двух точках), наименьшее значение функции на M равно -2 (достигается в четырех точках). Таким образом, ответы на вопросы а), б), г), е) нет, на вопрос в), д) да.

Единственная стационарная точка, в которой не достигается наибольшее или наименьшее значение функции $f(x, y)$ на множестве M, это точка $x = 0$, $y = 0$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки.

Выразив y^2 из соотношения (1), получим: $y^2 = 2x^2 - 2x^4 - y^4/2$ на множестве M. Подставив это выражение в $f(x, y)$, получим:

$$f(x, y) = 2x^2 - 7y^2 = 2x^2 - 7(2x^2 - 2x^4 - y^4/2) = -12x^2 + 14x^4 + 7/2y^4.$$

Заметим, что так как $4x^4 + y^4 \geqslant 0$, то при всех $(x, y) \in M$ выполняется неравенство $y^2 \leqslant 2x^2$ (и $y^4 \leqslant 4x^4$). Следовательно, при всех $(x, y) \in M$

$$f(x, y) = -12x^2 + 14x^4 + 7/2y^4 \leqslant -12x^2 + 28x^4.$$

Осталось заметить, что при $x \neq 0$, достаточно малых по абсолютной величине, величина в правой части неравенства отрицательная. Значит, точка $(0, 0)$ является точкой локального максимума функции $f(x, y)$ на множестве M. Ответ на вопрос ж) нет, на вопрос з) да.

Задача 4. Заметим, во-первых, что если $x \in M$, то $x \geqslant 0$, а, во-вторых, что указанный ряд при $x = 1$ сходится для любого α. Из формулы Тейлора легко следует, что

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{n^\alpha} = \frac{\ln x}{n^{\alpha+1}} + \frac{g(n, x)}{n^{\alpha+1}}, \tag{2}$$

где функции $g(n, x)$ обладают следующим свойством:

для любого отрезка $[a, b] \subset (0, +\infty)$ существует последовательность $\{c_n, n = 1, 2, \ldots\}$, такая что $|g(n, x)| \leqslant c_n$ при любом $x \in [a, b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. (3)

Таким образом, применяя интегральный признак Коши, получаем, что если $\alpha > 0$, то ряд сходится в любой точке $x > 0$; если $\alpha \leqslant 0$, то ряд расходится в любой точке $x > 0$, $x \neq 1$. В точке $x = 0$ ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Окончательно получаем:

$M = \{1\}$ при $\alpha \leqslant 0$,

$M = (0, +\infty)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$,

$M = [0, +\infty)$ при $1 < \alpha$.

Таким образом, на вопрос а) ответ нет, на вопрос б) — да.

Если $\alpha > 0$, то из (2), (3) и признака Вейерштрасса следует, что на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$ ряд сходится равномерно. Следовательно, при $\alpha > 0$ функция $S(x)$ непрерывна на $(0, +\infty)$. Поэтому на вопросы в) и е) ответы да. (Напомним, что при $\alpha = 0$ множество M состоит из одной точки.)

При любом α каждое слагаемое ряда является возрастающей по x функцией, поэтому функция $S(x)$ также является возрастающей. При этом, если $x < 1$, то $S(x) < 0$, а при $x \to +\infty$ функция $S(x)$ стремится к $+\infty$. Поэтому на вопрос д) ответ да.

Покажем, что при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ не ограничена на интервале $(0,1)$. Действительно, так как функция $S(x)$ возрастает на интервале $(0,1)$, то существует конечный или равный $-\infty$ предел $A = \lim\limits_{x\to 0+} S(x)$. Пусть $S^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[k]{x}-1}{k}$ — n-я частичная сумма ряда. Поскольку при $x < 1$ все слагаемые ряда отрицательны, то $S(x) < S^{(n)}(x)$ при каждом n. Переходя к пределу при $x \to 0+$, получаем $A < -\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, и из расходимости гармонического ряда следует, что $A = -\infty$. Значит, на вопрос г) ответ нет, а на вопрос з) — да.

Поскольку при $\alpha = 1$ функция $S(x)$ не ограничена на интервале $(0,1)$, а каждая частичная сумма $S^{(n)}(x)$, очевидно, ограничена на этом интервале, то на $(0,1)$ сходимость ряда не может быть равномерной. Ответ на вопрос ж) нет.

Задача 5. Неопределенный интеграл

$$\int \frac{t}{1+t^4} dt = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(t^2) + C.$$

Соответственно,

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left((1+e^x)^2\right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left((2+x)^2\right).$$

Эта функция определена на $\mathbf{R}$, непрерывна на $\mathbf{R}$, поскольку является композицией непрерывных на $\mathbf{R}$ функций и дифференцируема на $\mathbf{R}$, поскольку является композицией дифференцируемых на $\mathbf{R}$ функций.

Заметим, что $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left((1+e^x)^2\right) = \pi/4$, а $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left((2+x)^2\right) = \pi/2$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/8 < 0$. Поэтому найдется $x \in \mathbf{R}$, в котором $f(x) < 0$.

Кроме того, прямой подстановкой можно убедиться в том, что $f(0) = 0$.

Производная функции $f(x)$ равна

$$f'(x) = \frac{(1+e^x)e^x}{1+(1+e^x)^4} - \frac{(2+x)}{1+(2+x)^4}.$$

Соответственно,

$$f'(0) = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0 \neq 1.$$

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{e^{3x}} + \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{1}{e^{4x}} + \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^4} - \frac{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \left(1+\frac{2}{x}\right)^4} \right) = 0$$

и

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{(1+e^x)e^x}{1+(1+e^x)^4} - \frac{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^4} + \left(1+\frac{2}{x}\right)^4} \right) = 0.$$

Таким образом, ответы на вопросы: а) — да, б) — да, в) — нет, г) — нет, д) — да, е) — нет, ж) — да, з) — да.

5 Формат вступительного экзамена 2007 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей.

   Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 2 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет». Число вопросов в пределах каждого блока может быть различным.

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 2 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

8. Абитуриенты, имеющие официальный сертификат о сдаче GRE Subject Test in Mathematics, полученный не более двух лет назад с результатом не менее 720 очков, освобождаются от вступительного экзамена по математике. РЭШ рассматривает сертификаты GRE Subject Test in Mathematics только присланные ETS по почте в адрес РЭШ. В этом случае оценка за вступительный экзамен выставляется путем пересчета количества очков, указанных в сертификате, в 12 балльную систему по следующей шкале:

Балл, набранный на экзамене GRE	Оценка, выставляемая в качестве вступительной оценки по математике
850 баллов или больше	12
810—849 баллов	11
780—809 баллов	10
750—779 баллов	9
720—749 баллов	8

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской Экономической Школе работают платные подготовительные курсы. Программы подготовительных курсов ориентированы на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Полный курс: февраль—июнь 2007 г.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда с 18:30 и суббота с 11:00) — 3 ак. часа лекция, 2 ак. часа семинар. **Начало занятий — 14 февраля 2007 г.**
* **Интенсивный курс: апрель—июнь 2007 г.**
  В интенсивном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы. Занятия: 2 лекции по 3 ак. часа в неделю (вторник и пятница с 18:30). **Начало занятий в апреле 2007 г.**

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна, тел. 332-4423, email okulagin@nes.ru.

Адрес РЭШ

117418, Москва, Нахимовский проспект, 47 (здание ЦЭМИ РАН), 17 этаж, офис 1721, проезд до ст. метро «Профсоюзная».