РОССИЙСКАЯ ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

NEW ECONOMIC SCHOOL

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В РЭШ В 2004 ГОДУ

Москва 2004

Булавский В. А., Головань С. В., Катышев П. К.

Пособие по математике для поступающих в Российскую Экономическую Школу в 2004 году. — М., 2004 — 62 с.

Данное пособие содержит информацию о вступительном экзамене по математике в РЭШ и дополняет Справочник для поступающих в РЭШ в 2004 году.

Содержание

Пособие по математике для поступающих в РЭШ содержит информацию о вступительном экзамене и дополняет Справочник для поступающих в РЭШ.

Содержание экзамена в течение ряда лет оставалось неизменным, хотя формы экзамена менялись.

В пособии описывается содержание и структура вступительного экзамена. Требования, предъявляемые на вступительных экзаменах, содержатся в Справочнике для поступающих в РЭШ.

Пособие содержит подробную программу вступительного экзамена и варианты вступительных экзаменов 2001—2003 годов с решениями.

Приводя решения задач, мы стремились показать как правильно решать задачи. Мы не всегда приводим самые лучшие, самые изящные, самые короткие решения, которые может придумать опытный математик. Мы стараемся привести самое естественное решение задачи и доводим его до конца логически строго, описывая основные этапы процесса решения, соответствующие аргументы для приводимых утверждений и логические переходы.

1 Программа вступительного экзамена

1.1 Математический анализ

1. **Элементы теории множеств**

   Понятие о множествах и их элементах. Подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Декартово произведение двух и более множеств; проекции элемента декартова произведения.

   Отображение одного множества в другое; область определения, область значений, график отображения. Тождественное отображение множества в себя. Образ элемента или множества из области определения; (полный) прообраз элемента или множества из области значений. Композиция (суперпозиция) отображений.

   Взаимно однозначные отображения (вложения) и отображения «на» (накрытия). Обратное отображение. Равномощные (эквивалентные по мощности) множества. Конечные и счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Мощность подмножества счетного множества. Мощность конечного или счетного объединения счетных множеств.

2. **Числовая прямая $\mathbf{R}$ и арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**

   Вещественные (действительные) числа. Открытый, замкнутый, полуоткрытый отрезки. Понятие мажоранты (верхней границы) и миноранты (нижней границы) подмножества вещественных чисел, ограниченного (сверху, снизу) множества, наибольшего и наименьшего элемента множества, (точной) верхней и нижней граней.

   Свойство полноты числовой прямой: теорема о существовании верхней (нижней) грани и теорема о непустоте пересечения вложенных отрезков. Плотность множества рациональных чисел как подмножества числовой прямой. Несчетность отрезка числовой прямой; мощность континуума.

   Арифметическое (числовое, координатное) пространство $\mathbf{R}^n$. Операции сложения элементов (векторов, точек) $\mathbf{R}^n$ и умножения их на число. Понятие ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

3. **Свойства множеств на числовой прямой и в $\mathbf{R}^n$**

   Понятие ε-окрестности точки на числовой прямой. Открытый параллелепипед в $\mathbf{R}^n$ как декартово произведение открытых числовых отрезков. Общее понятие окрестности точки числовой прямой и точки пространства $\mathbf{R}^n$. Системы кубических и шаровых ε-окрестностей.

Внутренние, внешние и граничные точки множества. Внутренность, внешность и граница множества. Изолированные и предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Теоремы об объединении и пересечении открытых и замкнутых множеств. Замыкание множества. Дополнения к открытым и замкнутым множествам.

Теорема о непустоте пересечения вложенных замкнутых параллелепипедов (полнота $\mathbf{R}^n$). Понятие компактного (т. е. ограниченного и замкнутого) множества в $\mathbf{R}^n$ и на числовой прямой. Непустота пересечения вложенных непустых компактных множеств. Теорема о выделении конечного открытого покрытия компактного множества в $\mathbf{R}^n$ (на числовой прямой $\mathbf{R}$).

4. Предел последовательности

Понятие последовательности точек $\mathbf{R}^n$ (или точек числовой прямой $\mathbf{R}$) и ее предела. Подпоследовательности и предельные точки (частичные пределы). Предел подпоследовательности сходящейся последовательности. Теорема Больцано—Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности точек $\mathbf{R}^n$. Понятие фундаментальной последовательности (последовательности Коши). Эквивалентность понятий сходящейся и фундаментальной последовательности в $\mathbf{R}^n$.

Числовые последовательности: существование предела у монотонной ограниченной последовательности; предельный переход в неравенствах; понятие верхнего и нижнего предела. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей.

5. Предел функции. Непрерывность функций (отображений)

Числовые (скалярные) функции как отображения подмножеств $\mathbf{R}^n$ или числовой прямой в числовую прямую. Определение предела функции в точке на языке «ε–δ»; понятие предела на бесконечности. Арифметические операции над функциями с общей областью определения. Теоремы о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций. Предельный переход в неравенствах.

Определение непрерывности функции на языке «ε–δ», в терминах предела функции и на языке последовательностей; их эквивалентность. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций.

Ограниченность непрерывной числовой функции и достижение ею своего наибольшего и наименьшего значений на компактном множестве в $\mathbf{R}^n$ (теоремы Вейерштрасса).

Понятие равномерной непрерывности числовой функции на некотором множестве в $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{R}^1$. Равномерная непрерывность непрерывной функции на компактном множестве.

Функциональные последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Непрерывность функции, являющейся поточечным пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

6. Числовые функции одного (числового) аргумента

Односторонние пределы и классификация точек разрыва. Понятие предела на $-\infty$ и $+\infty$. Монотонные функции; виды разрывов монотонной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}.$$

Непрерывность элементарных функций.

Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке (теорема Коши).

7. Дифференцирование функций в $\mathbf{R}^1$

Производная, ее геометрический и физический смысл; односторонние производные, бесконечные производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Производная сложной функции. Производные элементарных функций. Первый дифференциал и его геометрический смысл.

Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Производные высших порядков. Формула Тейлора (Маклорена). Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции. Признаки возрастания и убывания функции. Понятие локального и глобального экстремума. Стационарные точки. Достаточные условия экстремума. Случай отсутствия производных в отдельных точках. Выпуклые и вогнутые функции, их графики. Точки перегиба. Решение простейших экстремальных задач.

8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных (в $\mathbf{R}^n$)

Частные производные. Дифференцируемость. Первый дифференциал. Связь дифференцируемости и непрерывности. Необходимое условие дифференцируемости, достаточное условие дифференцируемости (в терминах существования и свойств частных производных). Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент. Ортогональность градиента множеству уровня. Дифференцирование сложной функции. Частные производные высших порядков. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора. Теорема о неявной функции.

9. **Методы оптимизации в $\mathbb{R}^n$**

   Понятие экстремума (локального максимума или локального минимума). Экстремум при отсутствии ограничений; необходимые и достаточные условия локального экстремума. Экстремум при наличии ограничений в форме уравнений (условный экстремум); метод множителей Лагранжа; достаточные условия экстремума при наличии ограничений. Применение метода множителей Лагранжа для поиска наибольшего (наименьшего) значения функции на ограниченном замкнутом множестве, заданном системой уравнений.

10. **Неопределенный интеграл**

    Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла, таблица интегралов элементарных функций. Приемы интегрирования. Интегрирование рациональных дробей, простейших иррациональных функций, простейших трансцендентных функций.

11. **Определенный интеграл**

    Задача отыскания площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных ограниченных функций, функций с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем. Существование первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона—Лейбница. Замена переменной под знаком интеграла. Интегрирование по частям.

12. **Числовые и функциональные ряды**

    Понятие числового ряда и его суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные и знакопеременные ряды. Признаки сравнения рядов. Признаки сходимости Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Теорема о перестановке членов условно сходящегося ряда (теорема

Римана).

Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости. Теоремы о равномерно сходящихся функциональных рядах.

13. **Степенные ряды**

Радиус и промежуток сходимости степенного ряда. Формулы для определения радиуса сходимости. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов, неизменность радиуса сходимости. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами.

14. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка**

Определение дифференциального уравнения первого порядка. Понятие общего и частного решения. Теорема существования и единственности решения. Уравнения с разделяющимися переменными и сводящиеся к ним. Линейные однородные и неоднородные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

1.2 Литература

1. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н., *Лекции по математическому анализу*. М., «Высшая школа», 1999.

2. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Дифференциальное и интегральное исчисление*. М., «Наука», 1980.

3. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А., *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 2 кн., М, «Высшая школа», 2000.

4. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х., *Математический анализ*. Т. 1, 2, М., Изд-во МГУ, 1958—87.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*. М., «Наука», 1989.

6. Кудрявцев Л. Д., *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М., «Наука», 1981.

7. Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М., «Наука», 1982.

8. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 1, 2, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

9. Фихтенгольц Г. М., *Основы математического анализа*. Т. 1, 2, М., «Наука», 1964.

10. Эльсгольц Л. Э., *Дифференциальные уравнения*. М., Гостехиздат, 1957.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

1.3 Линейная алгебра

1. **Матрицы и операции с ними**

   Понятие прямоугольной матрицы; операции сложения матриц, умножения матрицы на число, умножения матриц. Единичная и нулевая матрицы. Трактовка пространства $\mathbf{R}^n$ как пространства векторов-столбцов или пространства векторов-строк. Умножение матрицы на столбец и строки на матрицу как частный случай умножения матриц. Свойства ассоциативности и дистрибутивности операций с матрицами. Операция транспонирования; транспонирование суммы и произведения матриц. Понятие симметричной матрицы.

2. **Векторные пространства**

   Общее определение (вещественного) линейного пространства; примеры. Понятие системы векторов. Линейные комбинации системы векторов; понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Условие сохранения линейной независимости при расширении системы векторов. Теорема о линейной зависимости системы векторов, линейно выражающихся через систему с меньшим числом векторов. Понятие ранга системы векторов.

   Понятие базиса векторного пространства. Конечномерные пространства. Примеры базисов. Равномощность базисов (в конечномерном пространстве) и понятие размерности. Линейная зависимость системы из $n+1$ вектора в n-мерном пространстве. Возможность дополнения до базиса любой линейно независимой системы векторов. Базис как максимальная линейно независимая система векторов. Однозначность разложения вектора по данному базису; координаты. Соответствие между векторами и их координатами. Трактовка координат как элементов (координатного) пространства $\mathbf{R}^n$. Сохранение линейной зависимости и независимости при переходе от системы векторов к системе их координат.

Понятие подпространства, собственного подпространства. Конечномерность подпространства конечномерного пространства; неравенство между их размерностями. Линейная оболочка системы векторов как подпространство. Ранг системы векторов и размерность его линейной оболочки. Линейные (аффинные) многообразия как сдвиги подпространств; аналогия с прямыми и плоскостями в трехмерном геометрическом пространстве.

Операции с подпространствами: пересечение и векторная сумма. Понятие прямой суммы двух (и более) подпространств. Связь размерностей суммы и пересечения с размерностями исходных (двух) подпространств; случай прямой суммы.

3. **Системы линейных (алгебраических) уравнений**

Представление совокупности неизвестных системы линейных уравнений и правых частей как векторов в $\mathbf{R}^n$ (в форме векторов-столбцов или векторов-строк). Матрица системы и матрично-векторная ее запись. Представление прямоугольной матрицы в виде семейства ее столбцов или семейства строк; теорема о совпадении рангов этих семейств (теорема о ранге матрицы); ранг матрицы, ранг системы уравнений. Понятие о матрицах полного ранга. Вырожденные и невырожденные квадратные матрицы. Трактовка системы линейных уравнений как задачи о разложении правой части по столбцам матрицы системы. Условие существования решения при любой правой части (для данной матрицы системы) и условие единственности или отсутствия решения в терминах ранга матрицы. Теорема Кронекера—Капелли.

Множество решений однородной системы линейных уравнений как подпространство в $\mathbf{R}^n$, его размерность; базис подпространства решений (фундаментальная система решений) и запись общего решения в форме линейной комбинации с неопределенными коэффициентами. Возможность задания любого подпространства в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных однородных уравнений.

Связь множества решений совместной неоднородной системы и соответствующей ей однородной системы; запись общего решения. Прямая и гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$. Возможность задания любого линейного (аффинного) многообразия в $\mathbf{R}^n$ как множества решений некоторой системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей; существование и единственность решения. Понятие обратной матрицы; ее существование и единственность для любой невырожденной матрицы и отсутствие для вырожденной матрицы. Невырожденность обратной матрицы; повторное обращение. Умножение системы линейных уравнений на невырожденную квадратную матрицу как эквивалентное преобразование системы. Использование эквивалентных преобразований для вычисления ранга матрицы и поиска общего решения системы линейных уравнений.

4. **Определитель матрицы**

   Определитель квадратной матрицы. Неизменность определителя при транспонировании матрицы. Смена знака определителя при перестановке двух строк или двух столбцов матрицы. Линейность определителя по каждой строке и каждому столбцу. Равенство нулю определителя как необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы. Определитель произведения матриц, определитель обратной матрицы.

   Понятие минора произвольного порядка; определение ранга матрицы в терминах миноров. Алгебраические дополнения элементов матрицы и формулы разложения определителя по строке или столбцу. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей. Присоединенная матрица и ее связь с обратной.

   Вычисление определителя путем преобразования матрицы.

5. **Линейные операторы**

   Линейный оператор как линейное отображение векторного пространства X в векторное пространство Y; примеры. Совокупность $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y как векторное пространство. Образ и ядро линейного оператора. Суперпозиция линейных операторов.

   Матрица линейного оператора из X в Y для фиксированных базисов этих пространств. Соответствие между действиями над операторами и над их матрицами; матрица суперпозиции операторов. Матрицы перехода при смене базисов в X и Y, их невырожденность; преобразование матрицы линейного оператора при смене базисов.

6. **Линейные преобразования векторных пространств**

   Линейные операторы, действующие из векторного пространства X в себя; тождественный оператор; преобразование подобия для их матриц при смене базиса в X. Обратный оператор и его матрица; условие обратимости оператора в терминах его ядра и образа.

   Инвариантные подпространства оператора. Инвариантность образа и ядра оператора.

Собственные векторы и собственные числа линейного оператора и его матрицы. Характеристический многочлен матрицы оператора, его неизменность при преобразовании подобия. Спектр оператора и матрицы, его совпадение с множеством нулей характеристического многочлена. Собственное подпространство, соответствующее данному собственному числу.

Линейная независимость системы собственных векторов, соответствующих разным собственным числам. Матрицы (линейные операторы) простой структуры; диагональный вид матрицы в базисе из собственных векторов (приведение матрицы простой структуры к диагональному виду преобразованием подобия). Собственные числа и собственные векторы оператора проектирования.

7. **Евклидовы пространства**

Понятие билинейной формы. Скалярное произведение; евклидово пространство. Стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$; примеры другого выбора скалярного произведения. Длина вектора и угол между векторами (при данном выборе скалярного произведения). Неравенство Коши—Буняковского (неравенство Шварца).

Понятие ортогональности векторов; линейная независимость системы ненулевых попарно ортогональных векторов. Процесс ортогонализации и существование ортонормированного базиса. Выражение скалярного произведения двух векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Ортогональное дополнение подпространства; ортогональный проектор.

Линейные операторы, сохраняющие скалярное произведение (изометрия евклидовых пространств); их матрицы в ортонормированном базисе (ортогональные матрицы). Невырожденность ортогональных матриц, совпадение обратной и транспонированной, произведение ортогональных матриц. Определитель и собственные числа ортогональной матрицы. Матрицы перестановки, матрицы вращения, матрицы отражения.

Самосопряженные (симметричные) операторы, симметричность их матриц в ортонормированном базисе. Ортогональность собственных векторов, соответствующих различным собственным числам. Существование ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов симметричного оператора. Приведение симметричной матрицы к диагональной форме преобразованием подобия с ортогональной матрицей перехода. Самосопряженность ортогонального проектора. Классификация симметричных матриц по их спектру: положительно (отрицательно) определенные; неотрицательно (неположительно) определенные или полуопределенные; неопределенные.

8. **Квадратичные формы**

   Квадратичная форма. Задание квадратичной формы при помощи симметричной матрицы. Преобразование матрицы квадратичной формы при замене переменных. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (с диагональной матрицей) преобразованием переменных с ортогональной матрицей перехода.

1.4 Литература

1. Бугров Я. С., Никольский С. М., *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. М., «Наука», 1964.
2. Воеводин В. В., *Линейная алгебра*. М., «Наука», 1974.
3. Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*. М., 2000.
4. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., *Линейная алгебра и многомерная геометрия*. М., «Наука», 1970.
5. Ильин В. А., Ким Б. Г., *Линейная алгебра*. М., Изд-во МГУ, 1998.
6. Ильин В. А., Позняк Э. Г., *Линейная алгебра*. М., «Наука», 1984.
7. Кострикин И. А., Сенченко Д. В. и др., *Пособие по линейной алгебре для студентов-экономистов*. М., Изд-во МГУ, 1987.
8. Курош А. Г., *Курс высшей алгебры*. М., «Наука», 1963.
9. Скорняков Л. А., *Элементы линейной алгебры*. М., «Наука», 1980.
10. *Сборник задач по математике для ВТУЗов. Линейная алгебра и основы математического анализа*. (под ред. Ефимова Н. В., Демидовича Б. П.) М., 1981.
11. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства*. М., «Наука», 1963.

Разумеется, можно пользоваться и более поздними изданиями указанных в программе книг, а также другими источниками.

2 Вступительный экзамен 2001 г.

Письменный экзамен в 2001 г. состоял из решения трех задач по математическому анализу и линейной алгебре и ответов на тестовые вопросы, требующие ответа «да» или «нет». Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 12 баллов.

Правила оценивания экзамена были следующие: Для каждой задачи указывалось максимальное число очков, которое можно получить за ее решение. Правильные ответы на тестовые вопросы оценивались в одно очко, неправильные — в минус одно очко, отсутствие ответа — ноль очков.

Число баллов за экзамен определялось суммой очков, набранных при решении задач и ответах на тестовые вопросы.

2.1 Задачи

Задача 1. *(10 очков)* На плоскости xOy задана фигура F, состоящая из двух полукругов радиуса 1 с центрами в точках $(2, 1)$ и $(5, 1)$ (см. рисунок 1).

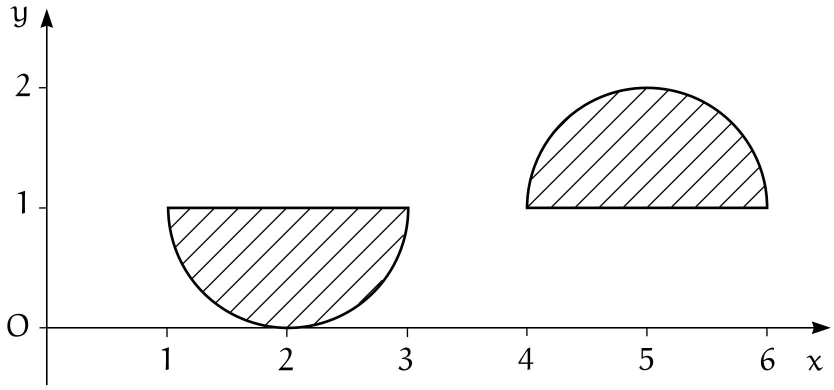


Рис. 1. Фигура F

Функция $f(t)$ определена следующим образом:

$$f(t) = \{\text{площадь пересечения фигуры } F \text{ с полуплоскостью } x \leqslant t\}.$$

Исследовать функцию $f(t)$, построить ее график и график ее производной.

Задача 2. *(15 очков)* Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n})$. Исследовать равномерную сходимость этого ряда на отрезке $[0, 1]$.

Задача 3. *(20 очков)* Пусть A — ортогональная, а I — единичная матрицы нечетного порядка n, причем матрица $I + A$ невырождена. Найти собственные числа блочной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix}$$

порядка $2n$.

2.2 Тестовые вопросы

1. Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Из этого следует, что

а) при любом натуральном k последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n = \dfrac{1}{k+1}\sum\limits_{i=n}^{n+k} a_i$, сходится;

Да Нет

б) последовательность $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $b_k = a_{2k}^* + a_{2k+1}^*$ и $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ получена из $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ некоторой перестановкой членов, сходится;

Да Нет

в) последовательность $\{\sqrt[2n+1]{|a_n|}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится;

Да Нет

г) если последовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна, то и последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

Да Нет

д) последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n = (-1)^n a_n a_{2n} a_{3n}$, сходится.

Да Нет

2. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Из этого следует, что

а) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая кусочно-линейная функция $\varphi(x)$, что $f(x) < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon$ для всех $x \in [a, b]$;

Да Нет

б) каковы бы ни были пять точек $x_1, \ldots, x_5 \in [a, b]$, найдется такое $y \in [a, b]$, что $f(y) = \dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{5} f(x_i)$;

Да Нет

в) если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $f(a) \cdot f(b) = 0$, то найдется такое $\xi \in [a, b]$, что $f'(\xi) = 0$;

Да Нет

г) множество всех точек x из $[a, b]$, таких что $f(x) \geqslant \dfrac{f(a) + f(b)}{2}$, есть отрезок;

Да Нет

д) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что если $x_1, x_2 \in [a, b]$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$;

Да Нет

3. Пусть M — непустое множество в $\mathbf{R}^k$, не совпадающее с $\mathbf{R}^k$. Из этого следует, что

а) множество M имеет хотя бы одну предельную точку;

Да Нет

б) множество граничных точек M непусто;

Да Нет

в) множество внутренних то чек M непусто;

Да Нет

г) любая предельная точка множества M является его граничной точкой;

Да Нет

д) любая граничная точка множества M является его предельной точкой.

Да Нет

4. Числовая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Из этого следует, что

а) функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна в каждой внутренней точке отрезка $[a, b]$;

Да Нет

г) если у функции $f(x)$ существуют односторонние производные в точках a и b, то $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

Да Нет

д) если у функции $f(x)$ существуют односторонние производные в точках a и b, то $f(x)$ достигает максимума на отрезке $[a, b]$, и производная в точках максимума равна нулю.

Да Нет

5. Известно, что точка a является предельной для каждого из множеств A и B в $\mathbf{R}^2$. Из этого следует, что

а) точка a является граничной для A и для B;

Да Нет

б) точка a принадлежит пересечению замыканий A и B;

Да Нет

в) точка a является предельной для пересечения множеств A и B;

Да Нет

г) точка a является предельной для объединения множеств A и B.

Да Нет

6. В векторном пространстве V заданы две системы векторов $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$. Обозначим через $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$ линейные оболочки систем векторов. Пусть система $\{x_1, \ldots, x_n\}$ линейно независимая. Из этого следует, что

а) если $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$, то $m \geqslant n$;

Да Нет

б) если $n > m$, то $\mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m) \subset \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n)$;

Да Нет

в) если $n = m$ и система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ линейно зависимая, то $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) \subset \subset \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$;

Да Нет

г) если $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$ и система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ линейно зависимая, то $m \neq n$;

Да Нет

д) если $\mathscr{L}(x_1, \ldots, x_n) = \mathscr{L}(y_1, \ldots, y_m)$ и $m \neq n$, то система $\{y_1, \ldots, y_m\}$ линейно зависимая.

Да Нет

7. Известно, что произведение двух матриц BC является квадратной невырожденной матрицей. Из этого следует, что

а) обе матрицы B и C квадратные и невырожденные;

Да Нет

б) матрица CB является квадратной и невырожденной;

Да Нет

в) строки матрицы B линейно независимы;

Да Нет

г) столбцы матрицы B линейно независимы;

Да Нет

д) система $Cx = b$ имеет решение при любой правой части b;

Да Нет

е) система $Cx = b$ при любой правой части b имеет не более одного решения.

Да Нет

8. Пусть A и B — матрицы размера $m \times n$ и матрица $A^T B$ — симметричная положительно определенная (A^T — транспонированная к A матрица). Из этого следует, что

а) $n \geqslant m$;

Да Нет

б) A и B имеют одинаковый ранг;

Да Нет

в) матрица BA^T имеет ранг m;

Да Нет

г) матрица BA^T имеет m линейно независимых собственных векторов;

Да Нет

д) матрица BA^T невырождена.

Да Нет

9. Известно, что $A + A^2 = 0$, где A — квадратная матрица порядка $n \geqslant 1$. Из этого следует, что

а) A — проектор;

Да Нет

б) пространство $\mathbf{R}^n$ разлагается в прямую сумму ядра и образа матрицы A;

Да Нет

в) $A = 0$ или $A = -I$;

Да Нет

г) число 0 и число 1 оба являются собственными числами матрицы A;

Да Нет

д) если $\lambda = 0$ не является собственным числом матрицы A, то существует $z \neq 0$, такой что $Az + z = 0$.

Да Нет

2.3 Решения задач

Решение задачи 1. Рассмотрим функцию $g(t)$, определенную следующим образом:

$$g(t) = \{\text{длина отрезка пересечения фигуры } F \text{ и прямой } x = t\} =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{1-(t-2)^2}, & \text{при } 1 \leqslant t \leqslant 3, \\ \sqrt{1-(t-5)^2}, & \text{при } 4 \leqslant t \leqslant 6, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

График функции $g(t)$ имеет вид (см. рис. 2)

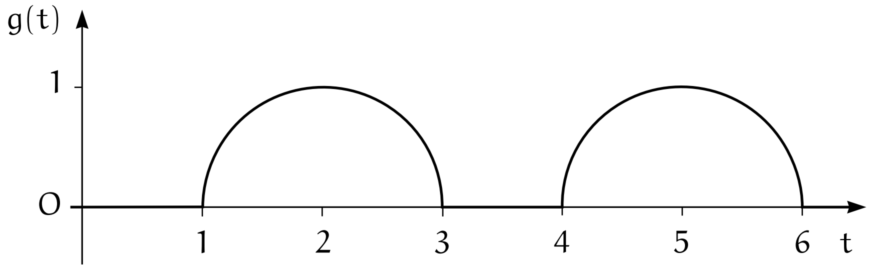


Рис. 2. График функции $g(t)$

При таком выборе $g(t)$ функция $f(t)$ равна

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx.$$

Функция $g(t)$ непрерывна на $\mathbf{R}$, следовательно, $f(t)$ всюду *дифференцируема* на $\mathbf{R}$, и $f'(t) = g(t)$ при всех t. Таким образом, приведенный на рисунке 2 график является и графиком функции $f'(t)$.

Исследуем функцию $f(t)$.

Так как $g(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbf{R}$, то $f(t)$ — *неубывающая* на всем $\mathbf{R}$ функция (следовательно, не имеет строгих экстремумов).

Заметим, что так как $g(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 1] \cup [3, 4] \cup [6, +\infty)$, то на каждом из множеств $(-\infty, 1]$, $[3, 4]$ и $[6, +\infty)$ функция $f(t)$ *постоянна*. При этом на $(-\infty, 1]$ она равна 0, на $[3, 4]$ — площади одного полукруга, то есть $\pi/2$, на $[6, +\infty)$ функция $f(t)$ равна π.

Проанализируем поведение функции $f(t)$ при $t \in (1, 3)$ и $t \in (4, 6)$. Так как $g(t) > 0$ при $t \in (1, 3)$ и $t \in (4, 6)$, то на этих двух интервалах $f(t)$ строго возрастает.

Исследуем $f(t)$ на выпуклость и вогнутость при $t \in [1, 3]$ и $t \in [4, 6]$. Промежутки неубывания и невозрастания $f'(t) = g(t)$:

1. $t \in (1, 2)$ — $f'(t)$ строго возрастающая;
2. $t \in (2, 3)$ — $f'(t)$ строго убывающая;
3. $t \in (4, 5)$ — $f'(t)$ строго возрастающая;
4. $t \in (5, 6)$ — $f'(t)$ строго убывающая.

Следовательно, при $t \in (1, 2)$ и $t \in (4, 5)$ функция $f(t)$ является строго выпуклой, при $t \in (2, 3)$ и $t \in (5, 6)$ $f(t)$ является строго вогнутой. Точки 2 и 5 являются точками перегиба.

График функции $f(t)$ изображен на рисунке 3.

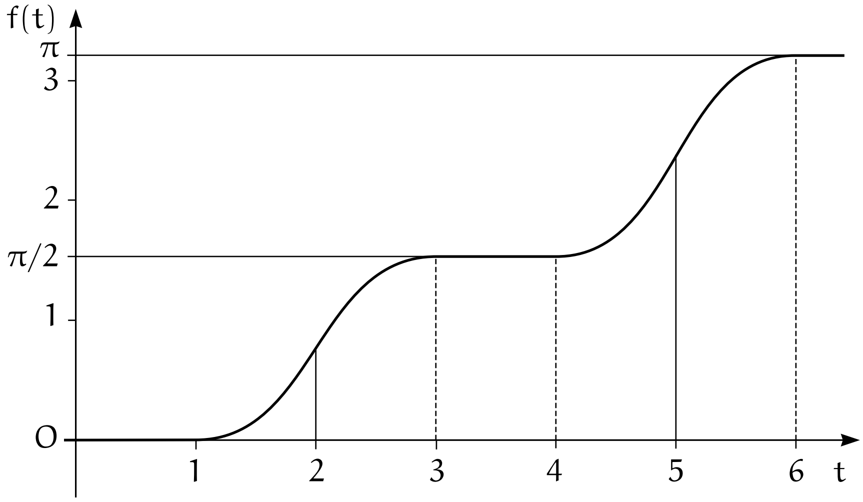


Рис. 3. График функции $f(t)$

Замечание. Для построения графика $g(t)$, вообще говоря, необязательно вводить аналитическое выражение (1). Можно использовать геометрические свойства фигуры F и определение $g(t)$.

Замечание. Точки интервалов постоянства функции формально подходят под определение как локального максимума, так и локального минимума. Точки 1 и 4 являются точками локального минимума, а точки 3 и 6 — точками локального максимума. Впрочем, при некоторых формах определения перегиба точки 1, 3, 4 и 6 могут трактоваться и как точки перегиба.

Решение задачи 2. Если $|x| < 1$, то ряд сходится как сумма двух бесконечно убывающих геометрических прогрессий. Если $|x| > 1$, то $|x^n - x^{2n}| = |x|^n |1 - x|^n \to \infty$ при $n \to \infty$, и ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю. При $x = -1$ ряд расходится, так как $x^n - x^{2n}$ при нечетных n равны -2, и значит не выполнено необходимое условие сходимости — стремление к нулю общего члена ряда. При $x = 1$ ряд сходится, так как все члены ряда равны нулю. Итак область сходимости данного ряда — полуинтервал $(-1, 1]$.

На отрезке $[0, 1]$ ряд не сходится равномерно. Действительно, исследовав поведение функции $u_n(x) = x^n - x^{2n}$ на отрезке $[0, 1]$, можно показать, что она достигает максимума в точке $x_n = 1/\sqrt[n]{2}$ и при этом $u_n(x_n) = 1/4$. Таким образом, общий член ряда не стремится к нулю *равномерно* на $[0, 1]$, то есть не выполнено необходимое условие равномерной сходимости ряда.

Отсутствие равномерной сходимости можно доказать другим способом.

Обозначим $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n})$, $x \in [0, 1]$. Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем, что $S(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ при

$0 \leqslant x < 1$, и $S(1) = 0$. Таким образом, сумма ряда *разрывна* в точке $x = 1$, что в силу теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных слагаемых, означает отсутствие равномерной сходимости.

Ответ. Ряд сходится на полуинтервале $(-1, 1]$. На отрезке $[0, 1]$ ряд не сходится равномерно.

Решение задачи 3. Так как матрица $I + A$ невырожденная, то число -1 не является собственным для матрицы A. В то же время матрица A имеет вещественное собственное число, поскольку ее порядок нечетный. Но ортогональная матрица может иметь в качестве собственных чисел только $+1$ и -1. Таким образом, у матрицы A имеется, и притом *единственное* собственное число 1. Обозначим через z соответствующий собственный вектор, то есть $Az = z$ и $z \neq 0$.

Пусть λ — собственное число матрицы B, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — соответствующий ему собственный вектор, то есть $Ax_1 + x_2 = \lambda x_1$ и $x_1 + Ax_2 = \lambda x_2$. Тогда $x_1 = \lambda x_2 - Ax_2$ и $(A^2 - 2\lambda A + (\lambda^2 - 1)I)x_2 = 0$. Но $x_2 \neq 0$ (иначе $x_1 = 0$ и $x = 0$). Поэтому матрица

$$A^2 - 2\lambda A + (\lambda^2 - 1)I = (A - (\lambda + 1)I)(A - (\lambda - 1)I)$$

вырожденная. Следовательно, по крайней мере один из сомножителей является вырожденным.

Если $A - (\lambda + 1)I$ — вырожденная матрица, то $\lambda + 1$ является собственным числом матрицы A, то есть $\lambda + 1 = 1$ и $\lambda = 0$. Если положить $x_2 = z$ и $x_1 = 0 \cdot z - Az = -z$, то $Bx = 0$, так что число $\lambda = 0$ действительно собственное число матрицы B.

Если $A - (\lambda - 1)I$ — вырожденная матрица, то аналогично имеем $\lambda - 1 = 1$ и $\lambda = 2$. Положив $x_2 = z$ и $x_1 = 2z - Az = z$, получим $Bx = 2x$, то есть $\lambda = 2$ — собственное число матрицы B.

Ответ. Собственными числами матрицы B являются числа 0 и 2.

2.4 Ответы на тестовые вопросы

1. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Нет.

2. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Да.

3. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Нет.

4. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Да, д) Нет.

5. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Да.

6. а) Да, б) Нет, в) Нет, г) Да, д) Да.

7. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Нет, д) Нет, е) Да.

8. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Да, д) Нет.

9. а) Нет, б) Да, в) Нет, г) Нет, д) Да.

3 Вступительный экзамен 2002 г.

Экзамен по математике проводился в форме теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка 12 баллов.

Тест состоял из трех разделов (частей), различающихся уровнем сложности. В пределах каждого уровня вопросы объединялись в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «да» или «нет».

Правила оценивания теста были следующие:

Для вопросов 1-го уровня сложности

* за правильный ответ абитуриент получал «+1» очко,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−1» очко.

Для вопросов 2-го уровня сложности

* за правильный ответ абитуриент получал «+2» очка,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−2» очка.

Для вопросов 3-го уровня сложности

* за правильный ответ абитуриент получал «+3» очка,
* за отсутствие ответа — «0» очков,
* за неправильный ответ — «−3» очка.

Число баллов за тест определялось суммой очков, набранных при ответах на вопросы теста.

3.1 Тест

3.1.1 Первая группа

1. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a, b]$, и $g(x) = \sup\limits_{z\in[x,b]} f(z)$. Из этого следует, что

a) функция $g(x)$ является монотонной на $[a, b]$;

Да Нет

б) если $f(x)$ является непрерывной на $[a, b]$, то $g(x)$ является непрерывной на $[a, b]$;

Да Нет

в) если $f(x)$ является дифференцируемой на $[a, b]$, то $g(x)$ является дифференцируемой на $[a, b]$;

Да Нет

г) если $g(x)$ является строго вогнутой на $[a, b]$, то $f(x)$ тоже является строго вогнутой на $[a, b]$.

Да Нет

2. Числовая функция $f(x)$ задана на интервале (a, b) и дифференцируема на нем. Из этого следует, что

а) если $f(x)$ является равномерно непрерывной на (a, b), то $f'(x)$ является ограниченной на (a, b);

Да Нет

б) если $f'(x)$ является непрерывной на (a, b), то $f(x)$ является ограниченной на (a, b);

Да Нет

в) если $f'(x)$ является ограниченной на (a, b), то $f(x)$ является равномерно непрерывной на (a, b);

Да Нет

г) если $f(x)$ является ограниченной на (a, b), то $f(x)$ является равномерно непрерывной на (a, b).

Да Нет

3. Пусть G — открытое, F — замкнутое множества в $\mathbf{R}$ и некоторая точка x принадлежит границам обоих множеств. Из этого следует, что

а) множество F не является открытым;

Да Нет

б) точка $x \in F \setminus G$;

Да Нет

в) точка x является предельной для G;

Да Нет

г) точка x является предельной для F.

Да Нет

4. Пусть A — квадратная матрица порядка n и A^T — транспонированная к ней. Обозначим через L_1 и L_2 подпространства решений систем $Ax = 0$ и $A^T x = 0$, соответственно. Тогда

а) подпространства L_1 и L_2 имеют одинаковую размерность;

Да Нет

б) если L_1 является ортогональным дополнением к L_2 (при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$), то n является четным;

Да Нет

в) если $L_1 = L_2$, то матрица A является симметричной;

Да Нет

г) если при некоторой правой части b система $Ax = b$ не имеет решения, то в L_2 имеется ненулевой вектор.

Да Нет

5. Дан линейный оператор A в евклидовом пространстве E размерности n. Тогда

а) если $A^2 = A$, то $E = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A$ (прямая сумма), где $\operatorname{Im} A$ — образ оператора A, $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A;

Да Нет

б) если $A^2 = A$ и оператор A самосопряженный (симметричный), то $\operatorname{Im} A$ является ортогональным дополнением $\operatorname{Ker} A$;

Да Нет

в) если оператор A самосопряженный (симметричный) и $n = 3$, то многочлен $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2$ может быть его характеристическим многочленом;

Да Нет

г) если оператор A самосопряженный (симметричный) и $n = 3$, то многочлен $p(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda - 2$ может быть его характеристическим многочленом;

Да Нет

3.1.2 Вторая группа

6. Числовая функция $f(x)$ задана на непустом компактном множестве $K \subset \mathbf{R}$ и непрерывна на нем. Из этого следует, что

а) существует такая точка $x_0 \in K$, что для любой точки $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$;

Да Нет

б) если x_1, $x_2 \in K$, $f(x_1) < f(x_2)$ и $c \in (f(x_1), f(x_2))$, то существует точка $x \in K$, такая что $f(x) = c$;

Да Нет

в) множество $f(K)$ замкнуто;

Да Нет

г) функция $f(x)$ равномерно непрерывна на K;

Да Нет

д) если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке множества K и в каждой точке производная равна нулю, то $f(x)$ постоянна.

Да Нет

7. Известно, что $f(x)$ строго убывает и непрерывна на $M = [a, b]$. Из этого следует, что

а) существует обратная к $f(x)$ функция $f^{-1}(y)$, определенная на $N = [f(b), f(a)]$;

Да Нет

б) функция $f^{-1}(y)$ — обратная к $f(x)$ — равномерно непрерывна на N;

Да Нет

в) существует такая $f(x)$, не являющаяся всюду дифференцируемой на (a, b), что $f^{-1}(y)$ — дифференцируемая на $(f(b), f(a))$;

Да Нет

г) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая монотонная кусочно-линейная $\varphi(y)$, что для всех $y \in N$ выполняется неравенство $0 < \varphi(y) - f^{-1}(y) < \varepsilon$;

Да Нет

д) существует такая строго выпуклая $f(x)$, что и обратная к ней $f^{-1}(y)$ тоже будет строго выпуклой.

Да Нет

8. Квадратная матрица A представлена в виде $A = BC$, где B и C — прямоугольные матрицы. Тогда

а) если матрица B имеет линейно независимые строки, а матрица C имеет линейно независимые столбцы, то матрица A невырожденная;

Да Нет

б) если матрица B имеет линейно независимые столбцы, а матрица C имеет линейно независимые строки, то матрица A невырожденная;

Да Нет

в) если у матрицы B строки линейно независимые, то матрицы A и C имеют одинаковый ранг;

Да Нет

г) если у матрицы C строки линейно независимые, то матрицы A и B имеют одинаковый ранг;

Да Нет

д) если у матрицы A линейно зависимые строки, то у матрицы B или у матрицы C линейно зависимые столбцы.

Да Нет

9. Пусть A — произвольная квадратная вещественная матрица порядка n. Тогда

а) если $x^T A x = 0$ только при $x = 0$, то матрица $(A + A^T)$ положительно или отрицательно определенная;

Да Нет

б) если $\varphi(\lambda) = \det(\lambda A + (1 - \lambda)A^T)$, то у функции φ внутри интервала $(0, 1)$ есть точка экстремума;

Да Нет

в) если (при стандартном скалярном произведении в $\mathbf{R}^n$) матрица $\frac{1}{2}(A - A^T)$ является ортогональным проектором, то матрица A симметричная;

Да Нет

г) существует такая ортогональная матрица Q, что для матрицы $B = Q^TAQ$ с элементами b_{ij} выполняются равенства $b_{ij} = -b_{ji}$ при $i \neq j$;

Да Нет

д) если матрица $(A + A^T)$ положительно определенная, то у матрицы A все (вещественные) собственные числа положительные.

Да Нет

3.1.3 Третья группа

10. Дана функция

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}$$

и множество

$$M = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1 \right\},$$

где $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ — заданные числа. Отсюда следует что

а) функция $f(x)$ достигает минимума на множестве M;

Да Нет

б) функция $f(x)$ достигает максимума на множестве M;

Да Нет

в) если у функции $f(x)$ есть точки максимума или минимума на множестве M, то хотя бы в одной такой точке все частные производные $f(x)$ равны нулю;

Да Нет

г) точка $x_i = \frac{a_i^2/b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$, $i = 1, \dots, n$, является точкой локального максимума функции $f(x)$ на множестве M;

Да Нет

д) точка $x_i = \frac{\sqrt{a_i/b_i}}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}}$, $i = 1, \dots, n$, является точкой минимума функции $f(x)$ на множестве M.

Да Нет

11. Интегральная кривая $x = \varphi(t)$ для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 7tx + 12t^2}{t^2}$$

проходит через точку $(t_0, x_0) = (1, 4)$ и служит графиком его максимального (непродолжаемого) решения. Из этого следует, что

а) областью определения функции $\varphi(t)$ служит вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$, за исключением точки $t = 0$;

Да Нет

б) интегральная кривая имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

в) интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

г) максимальное решение $\varphi(t)$ имеет одну точку локального максимума $t = 2$; при этом $\varphi(2) = 8$;

Да Нет

д) максимальное решение $\varphi(t)$ имеет две точки локального минимума $t = 0$ и $t = \sqrt[4]{3}$; при этом $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(\sqrt[4]{3}) = 3\sqrt[4]{3}$;

Да Нет

е) интегральная кривая имеет две точки перегиба;

Да Нет

ж) множество значений решения $\varphi(t)$ замкнуто.

Да Нет

12. Квадратная матрица третьего порядка $A(\alpha)$, зависящая от вещественного параметра α, трактуется как линейный оператор из $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}^3$. Пусть

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z(\alpha) = \begin{pmatrix} 4 + 7\alpha \\ 2 + 3\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix}, \qquad X(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что столбцы матрицы $X(\alpha)$ являются собственными векторами оператора $A(\alpha)$. Кроме того, при всех α, для которых определен оператор $A(\alpha)$, выполняется равенство $A(\alpha)y = z(\alpha)$. Из приведенных условий следует, что а) при $\alpha = 1$ существует единственный оператор $A(\alpha)$;

Да Нет

б) при $\alpha = 1$ существует бесконечно много операторов $A(\alpha)$;

Да Нет

в) при $\alpha = 1$ не существует оператора $A(\alpha)$;

Да Нет

г) существует α, при котором оператор $A(\alpha)$ является тождественным оператором;

Да Нет

д) при $\alpha = 0$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

е) при $\alpha = 0$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на одномерное подпространство;

Да Нет

ж) при $\alpha = -1$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на двумерное подпространство;

Да Нет

з) при $\alpha = -1$ оператор $A(\alpha)$ является оператором проектирования на одномерное подпространство.

Да Нет

3.2 Ответы и решения теста

3.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Нет.

2. а) Нет, б) Нет, в) Да, г) Нет.

3. а) Да, б) Да, в) Да, г) Нет.

4. а) Да, б) Да, в) Нет, г) Да.

5. а) Да, б) Да, в) Да, г) Нет.

3.2.2 Указания к вопросам второй группы

Задача 6. а) «Да». Следует из теоремы Вейерштрасса.

б) «Нет». Пример: $K = \{0, 1\}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ (компакт не обязательно связен).

в) «Да». Непрерывный образ компакта является компактом.

г) «Да». Это утверждение теоремы Кантора.

д) «Нет». Пример: $K = [0, 1] \cup [2, 3]$, $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1$ при $x \in [2, 3]$.

Задача 7. а) «Да». Обратная к монотонной непрерывной функции всегда существует и непрерывна.

б) «Да». Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

в) «Да». Пример: $M = [-1, 1]$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

г) «Да». Воспользовавшись равномерной непрерывностью, можно разбить отрезок на конечное число отрезков, на каждом из которых колебание функции достаточно мало.

д) «Да». Пример: $M = [1, 2]$, $f(x) = 1/x$. (На самом деле, утверждение верно для любой функции, удовлетворяющей поставленным условиям.)

Задача 8. а) «Нет». Пример: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б) «Нет». Пример: B, C — любые неквадратные.

в) «Нет». Пример из пункта а.

г) «Да». Пусть B — $m \times n$, C — $n \times m$-матрицы. Так как строки матрицы C линейно независимы, то $\operatorname{Im} C = \mathbf{R}^n$. Следовательно, $\operatorname{Im} BC = \operatorname{Im} B$.

д) «Да». Если B и C неквадратные, то у одной из них число столбцов больше, чем их длина. Если квадратные, то по крайней мере одна из них вырожденная.

Задача 9. а) «Да». Если матрица $A + A^T$ не является положительно или отрицательно определенной, то найдется такой вектор $x \neq 0$, что $0 = x^T(A+A^T)x = 2x^TAx$. Противоречие.

б) «Да». $\varphi(0) = \det A = \det A^T = \varphi(1)$ и утверждение следует из теоремы Ролля.

в) «Да». Матрица $\frac{1}{2}(A - A^T)$ кососимметричная. Если она является ортогональным проектором, то она симметричная. Следовательно, $\frac{1}{2}(A - A^T) = 0$. Значит, $A = A^T$.

г) «Да». Если представить матрицу в виде суммы $A = B+C$, где B — симметричная, C — кососимметричная, то Q — матрица, такая, что Q^TBQ диагональная.

д) «Да». Если у матрицы A существует отрицательное собственное число λ, то для соответствующего собственного вектора x выполняется равенство $x^T(A + A^T)x = 2\lambda x^T x < 0$.

3.2.3 Решения задач третьей группы

Задача 10. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i}+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-1\right).$$

Дифференцируя ее по x_1, ..., x_n, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{a_i}{x_i^2}+\lambda b_i=0, \quad i=1,\dots,n,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=1. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_i^0=\frac{\sqrt{a_i/b_i}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}}, \quad i=1,\dots,n, \quad \lambda^0=\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\right)^2.$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа равна

$$\begin{pmatrix} 2a_1/x_1^3 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 2a_2/x_2^3 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 2a_n/x_n^3 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица положительно определена при всех x, таких, что x_1, ..., $x_n>0$. Следовательно, функция Лагранжа строго выпукла по x. Значит, точка x^0 является точкой строгого минимума функции Лагранжа. Следовательно, для любой точки $x\in M$ $(x\neq x^0)$ справедливо неравенство

$$f(x)=f(x)+\lambda^0\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i-1\right)=L(x,\lambda^0)>L(x^0,\lambda^0)=f(x_0)+\lambda^0\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i^0-1\right)=f(x^0),$$

и найденная стационарная точка является точкой минимума (вопросам а) и д) соответствует ответ «да»).

Так как других стационарных точек нет, то вопросам б) и г) соответствуют ответы «нет».

Производная функции $f(x)$ равна $(-a_1/x_1^2,\dots,-a_n/x_n^2)$. Она не равна нулю ни при каком $x\in M$. Значит, ответ на вопрос в) — «нет».

Задача 11. Правая часть дифференциального уравнения определена на всей плоскости (t,x) за исключением точек вида $(0,x)$. В то же время, любое максимальное решение имеет областью определения некоторый отрезок J, так что $J\subset(0,+\infty)$ (пункт а) — «нет»).

Заданное дифференциальное уравнение является однородным. Поэтому сделаем замену $x=ty$. Тогда

$$t\frac{dy}{dt}=(y-2)(y-6),$$

причем при $t_0 = 1$ должно быть $y_0 = 4$. Поэтому постоянные решения $y = 6$ или $y = 2$ при $t \in (0, +\infty)$ не удовлетворяют начальным условиям. Так как выполнены условия теоремы существования и единственности, а $y(1) = 4$, то при всех $t \in J$ должно быть $2 < y(t) < 6$. Тогда

$$\frac{dt}{t} = \frac{dy}{(y-6)(y-2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{y-6} - \frac{dy}{y-2}\right),$$

или

$$\ln t = \frac{1}{4}\ln\frac{|y-6|}{|y-2|} = \frac{1}{4}\ln\frac{6-y}{y-2},$$

так что

$$y(t) = 2 + \frac{4}{1+t^4}, \quad x = \varphi(t) = 2t\left(1 + \frac{2}{1+t^4}\right).$$

Область определения $J = (0, +\infty)$. Так как $\varphi(t)/t \to 2$ и $\varphi(t) - 2t \to 0$ при $t \to +\infty$, то имеется одна наклонная асимптота $x = 2t$ (при $t \to +\infty$) (пункт б) — «да»). При $t \to 0$ $\varphi(t) \to 0$, так что вертикальной асимптоты нет (пункт в) — «нет»).

Так как

$$\varphi'(t) = \frac{2(t^4-1)(t^4-3)}{(1+t^4)^2},$$

то стационарными точками функции $\varphi(t)$ являются точки $t = 1$ и $t = \sqrt[4]{3}$ (пункт г) — «нет»). При $t < 1$ и $t > \sqrt[4]{3}$ производная $\varphi'(t) > 0$, а при $t \in (1, \sqrt[4]{3})$ производная $\varphi'(t) < 0$. Поэтому точка $t = 1$ является точкой локального максимума, а точка $t = \sqrt[4]{3}$ — точкой локального минимума.

Точка $t = 0$ не входит в область определения решения $\varphi(t)$, так что есть только одна точка локального минимума (пункт д) — «нет»).

Найдем точки перегиба. Поскольку

$$\varphi''(t) = (3t^4 - 5)\frac{16t^3}{(1+t^4)^3},$$

то единственной точкой перегиба может служить $t = \sqrt[4]{5/3}$ (пункт е) — «нет»). Наконец, $\inf\{\varphi(t) \mid t \in (0, +\infty)\} = 0$, но он не достигается (пункт ж) — «нет»).

Задача 12. При $\alpha = 1$ столбцы матрицы $X(\alpha)$ линейно зависимые: второй является суммой первого и третьего. Так как это собственные векторы, то они соответствуют одному собственному числу λ. Вектор y также линейно выражается через столбцы матрицы $X(1)$. Поэтому он тоже является собственным вектором, соответствующим числу λ. Поэтому

$$z(1) = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = A(1)y = \lambda y = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это векторное равенство не выполняется ни при каком числе λ. Поэтому пунктам а) и б) соответствует «нет», а пункту в) — «да». Пункту г) соответствует ответ «нет», так как для тождественного $A(\alpha)$ должно было бы выполняться равенство $y = z(\alpha)$, невозможное ни при каком α.

Если $\alpha = 0$ или -1, то столбцы матрицы $X(\alpha)$ линейно независимые ($\det X(\alpha) = -\alpha^3 + 2\alpha - 1 \neq 0$) и существуют обратные матрицы

$$X(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(-1)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — собственные числа оператора $A(\alpha)$, зависимость которых от α подразумевается, и

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

По определению собственных чисел и собственных векторов $A(\alpha)X(\alpha) = X(\alpha)\Lambda$, т. е. $A(\alpha) = X(\alpha)\Lambda X(\alpha)^{-1}$, $z(\alpha) = A(\alpha)y = X(\alpha)\Lambda X(\alpha)^{-1}y$, или $\Lambda X(\alpha)^{-1}y = X(\alpha)^{-1}z(\alpha)$. Для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$, соответственно, получаем

$$z(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \cdot 1 = 1, \quad \lambda_2 \cdot 2 = 2, \quad \lambda_3 \cdot (-1) = 0;$$

$$z(-1) = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \cdot 8 = 8, \quad \lambda_2 \cdot 6 = 0, \quad \lambda_3 \cdot 2 = 2.$$

При $\alpha = 0$ собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, т. е. оператор $A(0)$ является проектором на двумерное подпространство, натянутое на первые два столбца матрицы $X(0)$. Проектирование осуществляется параллельно одномерному подпространству, натянутому на ее третий столбец, т. е. параллельно первой координатной оси. Аналогично, при $\alpha = -1$ получаем, $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ и $\lambda_2 = 0$, т. е. $A(-1)$ снова является проектором на двумерное подпространство. Таким образом, пунктам д) и ж) соответствует ответ «да», а пунктам е) и з) — «нет».

4 Вступительный экзамен 2003 г.

Экзамен по математике проводился в форме письменного теста. Продолжительность экзамена составляла 4 часа, максимальная оценка — «12».

Тест состоял из двух частей. Первая часть содержала вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом следовало выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

Вторая часть содержала вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке была вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежало ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требовал ответа «Да» или «Нет».

Правила оценивания теста следующие

Первая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-0.25»
* отсутствие ответа — «0»

Вторая часть:

* правильный ответ — «$+1$»
* неправильный ответ — «-1»
* отсутствие ответа — «0»

Максимальное количество баллов, которое можно было получить за каждую часть теста, одинаково. Оценка за экзамен определялась суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста.

4.1 Тест

4.1.1 Первая часть теста

1. Наибольшее значение функции $x^2 - y^2$ на множестве $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ достигается только в точках

A $(0, 1)$, $(-1, 0)$

B $(0, 1)$, $(0, -1)$

C $(1, 0)$, $(0, 1)$

D $(-1, 0)$, $(1, 0)$

E $(0, -1)$, $(1, 0)$

2. Дано множество $M = \left\{1 + \dfrac{n}{n+1} : n = 1, 2, \ldots\right\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M счетное множество.

II. M имеет только одну предельную точку.

III. M замкнутое множество.

A	только I
B	только I и II
C	только II и III
D	I, II и III
E	ни одно из утверждений A, B, C, D не является верным

3. Пусть M — множество на вещественной прямой, граница которого пустая. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. M открытое множество.

II. M замкнутое множество.

III. M имеет мощность континуума.

A	только I
B	только III
C	только I и II
D	только I и III
E	только II и III

4. Дана функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ и множество $M = \{(x, y) : x^2/2 + y^2 = 1\}$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. f достигает наибольшего значения на M в единственной точке.

II. f достигает наименьшего значения на M в единственной точке.

III. В точке (точках), где f достигает наибольшего значения на M, $y = 0$.

A только I

B только III

C только I и II

D только I и III

E только II и III

5. Максимальное решение задачи Коши $y' = x + \dfrac{y^2}{x^3}$, где $y(1) = 1$, равно

A $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$

B $y = x^2$, $x \in (0, +\infty)$

C $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$

D $y = x^3$, $x \in (0, +\infty)$

E решения не существует

6. Множество предельных точек множества $M = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, равно

A M

B $M \cap \{0; 1\}$

C $[0, 1]$

D $(0, 1)$

E $[0, 1] \setminus M$

7. Пересечение счетного множества открытых подмножеств вещественной прямой

A открыто

B замкнуто

C не является открытым

D не является замкнутым

E утверждения A, B, C, D ложные

8. Линейный оператор A в пространстве $\mathbf{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда число инвариантных подпространств оператора A равно

A 2

B 3

C 4

D 5

E бесконечно много

9. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ задана система из четырех векторов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, причем известно, что сумма компонент каждого из векторов системы равна нулю. Тогда

A если система X линейно независимая, то $n > 5$

B если система X линейно зависимая, то $n < 5$

C если $n > 5$, то система X линейно независимая

D если $n < 5$, система X линейно зависимая

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

10. В пространстве $\mathbf{R}^n$ при $n \geqslant 1$ заданы два подпространства L_1 и L_2 с размерностями n_1 и n_2, соответственно, причем $\mathbf{R}^n = L_1 + L_2$. Тогда

A если $n_1 = n_2$, то n четное

B если $n_1 + n_2 \geqslant n$, то сумма подпространств L_1 и L_2 прямая

C если сумма подпространств L_1 и L_2 прямая, то $n_1 + n_2 < n$

D если сумма подпространств L_1 и L_2 прямая, то их пересечение пустое

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

11. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$, $m > 1$, $n > 1$, a и b — столбцы длины m, а x — искомый столбец длины n. Тогда

A если обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ совместны, то совместна и система $(A + B)x = (a + b)$

B если обе системы $Ax = a$ и $Bx = b$ совместны, и $n \geqslant 2m$, то (объединенная) система $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ совместна

C если хотя бы одна из систем $Ax = a$ или $Bx = b$ несовместна, то система $(A + B)x = (a + b)$ несовместна

D если $n = m$ и система $Bx = b$ совместна при любой правой части b, то системы $(AB)x = a$ и $Ax = a$ одновременно совместны или одновременно несовместны

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

12. Пусть A и B — две квадратные матрицы порядка $n \geqslant 2$, а через $\det X$ обозначается определитель любой квадратной матрицы X. Тогда

A если $\det A = \det B$, то $\det(A - B) = 0$

B если A и B отличаются друг от друга лишь перестановкой столбцов, то $\det A = \det B$

C если $\det A \neq 0$, то либо $\det B = 0$, либо $\det(AB) \neq 0$

D если $\det(AB) = 0$, то $\det A = 0$ и $\det B = 0$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

13. Пусть A — линейный оператор, действующий из пространства $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ при $n > 1$. Через $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ обозначим ядро и образ оператора A, через A^2 — суперпозицию с самим собой, а через $\operatorname{Im} A^2$ — образ этой суперпозиции. Тогда

A $\operatorname{Im} A^2 = \operatorname{Im} A$

B $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Im} A$

C если $(\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Im} A) = \{0\}$, то $(\operatorname{Ker} A) + (\operatorname{Im} A) = \mathbf{R}^n$

D если $(\operatorname{Ker} A) \cap (\operatorname{Im} A) \neq \{0\}$, то сумма размерностей $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Im} A$ меньше n

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

14. Пусть A — вещественная квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда

A если λ — (вещественное) собственное число матрицы A^2, то $\lambda > 0$

B если у матрицы A имеется инвариантное подпространство, отличное от всего $\mathbf{R}^n$ и от нульмерного подпространства, то у A имеется вещественное собственное число

C существует вырожденная матрица A, не имеющая вещественных собственных чисел

D если матрица A невырожденная и определитель матрицы $(A^2 - 2A + I)$, где I — единичная матрица, равен нулю, то число 2 является собственным для матрицы $(A + A^{-1})$

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

15. Пусть в $\mathbf{R}^n$ введено стандартное скалярное произведение, и две вещественные квадратные матрицы A и B порядка n рассматриваются как операторы в $\mathbf{R}^n$. Тогда

A если $A^2 = A$, то матрица A задает оператор ортогонального проектирования

B если A ортогональная матрица, то $A^2 = A$

C если A симметричная матрица и ее характеристический многочлен имеет вид $(-1)^n\lambda^k(\lambda - 1)^{n-k}$, где k — целое и $0 \leqslant k \leqslant n$, то матрица A задает оператор ортогонального проектирования

D если матрицы A и B задают операторы ортогонального проектирования, то матрица (AB) задает оператор проектирования

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

16. Пусть A и B — вещественные квадратные матрицы порядка n, причем A — симметричная. Тогда

A если для некоторого $x \in \mathbf{R}^n$ оказалось, что $x^T A x = 0$, и A невырожденная, то $Ax = 0$

B если $x^T B x = 0$ при всех $x \in \mathbf{R}^n$, матрица B нулевая

C если матрица A положительно определенная, то и матрица $B^T A B$ положительно определенная

D если матрица B тоже симметричная и обе матрицы A и B положительно полуопределенные, то квадратичная форма $x^T A B x$ положительно полуопределена

E все четыре утверждения A, B, C, D ложные

17. Функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(0, 8)$, и $f(1) = 5$, $f(3) = -2$, $f(6) = 10$. Какие из следующих утверждений (I, II, III, IV) верны?

I. Функция $f(x)$ имеет в интервале $(0, 8)$ не более одного нуля.

II. График функции $f(x)$ имеет по крайней мере одну горизонтальную касательную.

III. Существует число b, $1 < b < 3$, такое, что $f(b) = 6$.

IV. Существует число c, $3 < c < 8$, такое, что $f(c) = 8$.

A только I и II

B только I и III

C только II и IV

D только II, III и IV

E ни одно из утверждений I—IV не является верным

18. Интеграл $\int_0^2 xe^x dx$ равен

A 8

B $e^2 + 1$

C $2e + 1$

D $\ln 2$

E $e^2 - 1$

19. Неявная функция $y = y(x)$ определяется как решение уравнения $x^2 + 2xy + 3x + y^3 = 7$. Тогда производная $\frac{dy}{dx}(1)$ равна

A $-3/7$

B $-7/5$

C $5/7$

D 0

E $2/9$

20. Предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ равен

A 1

B $1/e$

C $1/e^2$

D $1/\sqrt{e}$

E $1/2e$

21. Наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4/4 - x^3 - x^2/2 + 3x - 2$ на отрезке $[-2, 3]$ равны, соответственно

A 1 и $-13/4$

B 2 и $-17/4$

C 2 и $-1/4$

D $5/4$ и $-13/4$

E $3/4$ и $-13/4$

22. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{14x - 5}{3x - 2}$ в точке $(1, 9)$ есть

A $13x - y = 4$

B $x + 13y = 118$

C $13x + y = 22$

D $2x + 3y = 25$

E $x - 13y = 116$

23. К графику функции $y = 1/x^2$ проведена касательная в точке $(x_0, 1/x_0^2)$. Площадь треугольника, образованного касательной и осями координат, равна 3. Тогда x_0 равно

A $1/2$

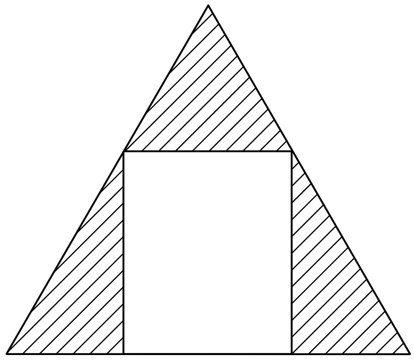
B $3/4$

C 1

D $5/4$

E $3/2$

24. Прямоугольник вписан в равносторонний треугольник со стороной 1.



Наименьшее значение площади заштрихованной фигуры равно

A $1/8$

B $\sqrt{3}/8$

C $1/4$

D $\sqrt{6}/8$

E $3\sqrt{3}/8$

25. Диаметр круга уменьшается со скоростью, равной площади этого круга в данный момент времени. Если в момент времени $t = 0$ диаметр равен 1, то в момент t диаметр $D(t)$ равен

A $e^{-\pi t/4}$

B $1/(\pi t + 1)$

C $e^{-\pi t^2/4}$

D $4/(\pi t + 4)$

E $4/(t + 4)$

26. Предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ равен

A 0

B 1

C $1/2$

D $-1/2$

E не существует

27. Функция $f(x)$ задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\cos x}$ равен

A -1

B $-1/2$

C 0

D 1

E не существует

28. Неопределенный интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ равен

A $\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + C$

B $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x} + C$

C $\dfrac{1}{3} \cos^3 x + C$

D $\dfrac{1}{2} \left(x + \dfrac{1}{2} \sin(2x) \right) + C$

E $\dfrac{1}{2}(x + \cos^2 x - \sin^2 x) + C$

29. Функция $g(x)$ задана формулой

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1 + \sin^2(1/x)}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $g(x)$ непрерывна в точке 0.

II. Функция $g(x)$ имеет непрерывную первую производную в точке 0.

III. Функция $g(x)$ имеет непрерывную вторую производную в точке 0.

A только I

B только II

C только I и II

D только I и III

E I, II, и III

30. Какова площадь фигуры, заданной неравенствами $x^2+y^2/3 \leqslant 1$ и $|x|+|y|/\sqrt{3} \geqslant 1$ на координатной плоскости?

A $3\pi - 3$

B $3\pi - 6$

C $\sqrt{3}(\pi - 1)$

D $\sqrt{3}(\pi - 2)$

E $3\pi^2 - 6$

31. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывно дифференцируема на $(0, +\infty)$, и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$ не существует. Для каких из следующих утверждений (I, II, III) можно подобрать функцию $f(x)$, такую что соответствующее утверждение верно по отношению к этой функции?

I. Функция $g(x) = |f(x)|$ ограничена сверху.

II. График функции $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту.

III. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ существует.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E нельзя ни для одного

32. Предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{\sin(x^3)}$ равен

A $1/6$

B $1/3$

C $1/2$

D $\quad 1$

E $\quad$ не существует

33. Наименьшее значение функции $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + xy - 3x + 3y - 15$ равно

A $\quad -16$

B $\quad -14$

C $\quad -10$

D $\quad -2$

E $\quad 2$

34. Пусть a, $b > 0$. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ равен

A $\quad \sqrt{ab}$

B $\quad \dfrac{a+b}{2}$

C $\quad 1$

D $\quad ab$

E $\quad (\ln a + \ln b)^2$

35. Решением уравнения

$$\ln x = \int_1^2 \ln s \, ds$$

является число

A $\quad 3/2$

B $\quad e/2$

C $\quad e^2/6$

D $\quad 4/e$

E $\quad \varnothing$

36. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ непрерывна на $[0, 1]$.

II. Функция $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ дифференцируема на $(0, 1)$.

III. Функция $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ равномерно непрерывна на $[0, 1]$.

A только I

B только II

C только I и III

D I, II и III

E ни одно из утверждений (I, II, III) не является верным

37. Интеграл $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ равен

A π

B $\pi/4$

C $1 - \pi/4$

D другому значению

E не существует

38. Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ сходится на всей вещественной прямой к функции

A e^x

B xe^x

C e^{x-1}

D к другой функции

E расходится при $|x| > 0$

39. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на вещественной прямой. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на вещественной прямой.

II. Образ $f(G)$ любого открытого множества G — открытое множество.

III. Прообраз $f^{-1}(G)$ любого открытого множества G — открытое множество.

A только I

B только II

C только III

D только I и II

E только I и III

40. Функция $f(x)$ непрерывна на множестве $[1, +\infty)$, дифференцируема на $(1, +\infty)$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Какие из следующих утверждений (I, II, III) верны?

I. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $[1, +\infty)$.

II. Если функция $f(x)$ ограничена на множестве $[1, +\infty)$, то существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

III. Если функция $f(x)$ не ограничена на множестве $[1, +\infty)$, то либо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, либо $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

A только I

B только I и II

C только II и III

D I, II и III

E ни одно из утверждений I, II, III не является верным

4.1.2 Вторая часть теста

1. Система уравнений $Bx = 0$, где $x \in \mathbf{R}^4$, имеет в качестве множества решений линейную оболочку системы векторов

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Известно также, что матрица BB^{T} единичная, где через B^{T} обозначается матрица, транспонированная к B. Положим $A = B^{\mathsf{T}}B$. Тогда

а) матрица A имеет ранг 3;

Да Нет

б) матрица A задает проектор в $\mathbf{R}^4$;

Да Нет

в) характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^3$;

Да Нет

г) сумма элементов матрицы A равна 4;

Да Нет

д) есть 8 вариантов матрицы B, в которых она имеет нулевые элементы;

Да Нет

е) если у матрицы B имеется ровно два нулевых элемента, то она квадратная;

Да Нет

ж) если у матрицы B первая строка состоит из одинаковых элементов, то все элементы матрицы B по абсолютной величине равны 1/2;

Да Нет

з) у матрицы B первый и последний столбцы ортогональны.

Да Нет

2. Интегральная кривая $y = \varphi(x)$ для дифференциального уравнения

$$y' = \frac{2y}{x \ln x} + \frac{1}{x}$$

проходит через точку $(x_0, y_0) = (e, 0)$ и служит графиком его максимального (непродолжаемого) решения. Тогда

а) область определения функции $\varphi(x)$ — интервал $(0, +\infty)$ за исключением точки $x = 1$;

Да Нет

б) интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту;

Да Нет

в) интегральная кривая имеет наклонную асимптоту;

Да Нет

г) функция $\varphi(x)$ стремится к $-\infty$ при $x \to +\infty$;

Да Нет

д) функция $\varphi(x)$ достигает наименьшего значения в точке $x = e^{1/2}$, при этом $\varphi(e^{1/2}) = -1/4$;

Да Нет

е) функция $\varphi(x)$ имеет две точки перегиба $x_1 = e^3$, $x_2 = e^{1/3}$, при этом $\varphi(e^3) = 6$, $\varphi(e^{1/3}) = -2/9$;

Да Нет

ж) уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет два решения $x_1 = 1$ и $x_2 = e$;

Да Нет

з) график функции $\varphi(x)$ замкнут в $\mathbf{R}^2$.

Да Нет

3. Функция одной вещественной переменной задана формулой

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} |x^2 - 1|^{1/n}, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1 + x^2 + \dots + x^{2n}} \right)^{1/n}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Тогда

а) областью определения функции $f(x)$ является интервал $(-\infty, +\infty)$;

Да Нет

б) областью определения функции $f(x)$ является полуинтервал $(-\infty, 1]$;

Да Нет

в) на промежутке $[-1, 1]$ функция $f(x)$ четная;

Да Нет

г) в области определения у функции $f(x)$ имеется один устранимый разрыв;

Да Нет

д) в области определения у функции $f(x)$ имеется один неустранимый разрыв первого рода;

Да Нет

е) множество значений функции $f(x)$ есть полуинтервал $(0, 1]$;

Да Нет

ж) функция $f(x)$ не достигает своего наименьшего значения;

Да Нет

з) график функции $f(x)$ имеет асимптоту.

Да Нет

4. Дана функция $f(x, y) = xy^2$ и множество $M = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1 \}$. Тогда

а) точка $(0, 1)$ является точкой локального максимума функции f на множестве M;

Да Нет

б) точка $(0, -1)$ является точкой локального минимума функции f на множестве M;

Да Нет

в) число локальных максимумов функции f на множестве M четно;

Да Нет

г) число локальных минимумов функции f на множестве M нечетно;

Да Нет

д) точка $(-1, 0)$ является точкой локального минимума функции f на множестве M;

Да Нет

е) точка $(1, 0)$ является точкой локального максимума функции f на множестве M;

Да Нет

ж) в точке $\left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt[4]{2}\right)$ функция f достигает наибольшего значения на множестве M;

Да Нет

з) в точке $\left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2}\right)$ функция f достигает наименьшего значения на множестве M.

Да Нет

5. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяется равенствами

$$f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}},\ \ldots,\ f_n(x) = \underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots\sqrt{x}}}}_{n\ \text{раз}},\ \ldots$$

Обозначим через M множество тех x, для которых существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, и пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $x \in M$. Тогда

а) функция $f(x)$ определена при любом $x \geqslant 0$;

Да Нет

б) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$;

Да Нет

в) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[3, 5]$;

Да Нет

г) последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[0, 2]$;

Да Нет

д) последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[3, 5]$;

Да Нет

е) на любом интервале $(a, b) \subset M$, $a > 0$, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно;

Да Нет

ж) значение $f(3) = \dfrac{\sqrt{10}+1}{2}$;

Да Нет

з) функция $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке множества M.

Да Нет

4.2 Ответы и решения теста

4.2.1 Ответы на вопросы первой группы

1. D. **2.** B. **3.** C. **4.** B. **5.** B. **6.** C. **7.** E. **8.** C. **9.** D. **10.** E. **11.** D. **12.** C. **13.** C. **14.** D. **15.** C. **16.** E. **17.** C. **18.** B. **19.** B. **20.** D. **21.** B. **22.** C. **23.** B. **24.** B. **25.** D. **26.** C. **27.** C. **28.** D. **29.** A. **30.** D. **31.** E. **32.** D. **33.** A. **34.** A. **35.** D. **36.** C. **37.** D. **38.** B. **39.** C. **40.** A.

4.2.2 Решения задач второй группы

Задача 1. Так как матрица BB^T единичная, то строки матрицы B ортонормированы и, кроме того, составляют базис подпространства решений системы $Bx = 0$. Иными словами, строки матрицы B являются ортонормированной фундаментальной системой решений для следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 - b_3 - b_4 = 0, \\ 2b_1 - b_2 - 2b_3 + b_4 = 0. \end{cases}$$

Одним из возможных вариантов такой системы решений является пара строк

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а все остальные получаются из этой пары путем ортогонального преобразования. Таким образом, общий вид матрицы B описывается формулой

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где Q — произвольная ортогональная матрица порядка 2. Так как при этом $Q^T Q = I$, то

$$A = B^T B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q^T Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен двум, $A^2 = A$, т. е. A — проектор. Собственное число 1 у проектора имеет кратность, равную рангу, т. е. 2, а собственное число 0 — кратность $4 - 2 = 2$. Таким образом, характеристический многочлен матрицы A имеет вид $p(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^2$. Ответы на первые четыре пункта следующие: а) нет, б) да, в) нет, г) да.

Что касается матрицы B, то она имеет вид

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q & Q \end{pmatrix},$$

где общий вид ортогональной матрицы Q второго порядка имеет два варианта:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Есть восемь различных вариантов для Q, при которых она имеет нулевые элементы: $\varphi = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. Ровно два нулевых элемента у матрицы B быть не может, так что утверждение е) формально верное. Первая строка матрицы B состоит из одинаковых элементов лишь в случае $\cos\varphi = \sin\varphi$, т. е. при $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$. При этом $|\cos\varphi| = |\sin\varphi| = 1/\sqrt{2}$. Ответы на последние четыре пункта: д) да, е) да, ж) да, з) да.

Задача 2. Правая часть дифференциального уравнения определена на всей плоскости (x, y) за исключением точек вида $(0, y)$ и $(1, y)$. В то же время, любое максимальное решение имеет областью определения некоторый отрезок J, так что $J \subset (1, +\infty)$ (пункт а) — «нет»).

Заданное дифференциальное уравнение является линейным неоднородным. Решая однородное уравнение $y' = \dfrac{2y}{x \ln x}$, получим общее решение:

$$y = C \ln^2 x, \quad C \in (-\infty, +\infty).$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем методом вариации постоянной. Имеем

$$C' \ln^2 x + C \cdot \frac{2 \ln x}{x} = \frac{2C \ln^2 x}{x \ln x} + \frac{1}{x},$$

откуда $C = -1/\ln x$ и $y = -\ln x$. Таким образом, общее решение таково:

$$y = -\ln x + C \ln^2 x.$$

Подставив начальное условие, получим $\varphi(x) = \ln^2 x - \ln x$.

Область определения $J = (1, +\infty)$. Так как $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1$, то вертикальной асимптоты у кривой $\varphi(x)$ не существует (пункт б) — «нет»). При $x \to +\infty$ функция $\varphi(x)$ стремится к $+\infty$, а $\varphi(x)/x \to 0$, следовательно, наклонной асимптоты не существует (пункт в) — «нет», (пункт г) — «нет»).

Заметим, что так как область определения $\varphi(x)$ не включает в себя точку $x = 1$, то ответ на пункт ж) — «нет», а так как $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1$, то точка $(1, 0)$, не принадлежащая графику $\varphi(x)$, является предельной. Значит график не является замкнутым (пункт е) — «нет»).

Так как

$$\varphi'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x},$$

то единственной стационарной точкой функции $\varphi(x)$ является точка $x = \sqrt{e}$, при этом $\varphi(\sqrt{e}) = \ln^2 \sqrt{e} - \ln \sqrt{e} = -1/4$. Так как $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 1$ и $\varphi(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то точка $x = \sqrt{e}$ действительно точка минимума (пункт д) — «да»).

Найдем точки перегиба. Поскольку

$$\varphi''(x) = \frac{3 - 2 \ln x}{x^2},$$

то единственной точкой перегиба может служить $x = e^{3/2}$ (ответ на вопрос пункта е) — «нет»).

Задача 3. Очевидно, что $f(-1) = 0$ и $f(0) = 1$.

Пусть $x \leqslant 0$, $x \neq -1$. Тогда $|x^2 - 1| > 0$, и $\lim\limits_{n \to \infty} = 1$.

Пусть $x > 0$. Имеем:

$$1 + x^2 + \dots + x^{2n} = \begin{cases} \dfrac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}, & \text{если } x \neq 1, \\ n = 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < -1, \\ 0, & \text{если } x = -1, \\ 1, & \text{если } -1 < x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Таким образом,

* функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$;
* функция $f(x)$ имеет единственный разрыв в точке $x = -1$, и этот разрыв является устранимым;
* функция $f(x)$ достигает наименьшего значения в точке $x = -1$;
* функция $f(x)$ не ограничена на $(-\infty, +\infty)$;
* так как $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, то функция $f(x)$ не является четной на отрезке $[-1, 1]$;
* функция $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту при $x \to -\infty$.

Задача 4. Множество M компактное, а функция $f(x, y)$ непрерывная, поэтому она достигает на M наибольшего и наименьшего значений.

Найдем критические точки функции $f(x, y)$ на множестве M. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xy^2 - \lambda(x^2 + y^4 - 1)$ и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ x^2 + y^4 = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - 2\lambda x = 0, \\ 2xy - 4\lambda y^3 = 0, \\ x^2 + y^4 = 1. \end{cases} \qquad (*)$$

1) Если $y = 0$, то из третьего уравнения следует, что $x^2 = 1$, а из первого — $\lambda = 0$.

2) Если $y \neq 0$, то из первого уравнения следует, что $\lambda \neq 0$, и из первых двух уравнений следует, что $x^2 = y^4$. Таким образом, решениями системы ($*$) могут быть следующие точки:

при $\lambda = 0$: $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (-1, 0)$;

при $\lambda = 1/2$: $A_3 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt[4]{2})$, $A_4 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2})$;

при $\lambda = -1/2$: $A_3 = (-1/\sqrt{2}, 1/-\sqrt[4]{2})$, $A_3 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt[4]{2})$.

Нетрудно проверить, что и обратно, все эти точки удовлетворяют системе ($*$).

Итак, имеем шесть критических точек. Имеем $f(A_1) = f(A_2) = 0$, $f(A_3) = f(A_4) = = 1/2$, $f(A_5) = f(A_6) = -1/2$. Отсюда следует, что

* в точках A_3, A_4 функция $f(x, y)$ достигает наибольшего значения на множестве M;

* в точках A_5, A_6 функция $f(x, y)$ достигает наименьшего значения на множестве M.

Матрица вторых производных функции Лагранжа (по x, y) есть

$$D^2L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 2y \\ 2y & 2x - 12\lambda y^3 \end{pmatrix},$$

а «разрешенные» вариации (dx, dy) в каждой точке (x, y) определяются равенством $2xdx + 4y^3dy = 0$. В точке A_1 при $\lambda = 0$ имеем

$$D^2L(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad dx = 0.$$

В этой точке квадратичная форма

$$(dx \;\; dy) D^2L(x, y, \lambda) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2dy^2 > 0 \quad \text{при} \quad dy \neq 0.$$

Следовательно, точка A_1 является точкой локального минимума.

Аналогично, точка A_2 является точкой локального максимума.

Заметим, что два последних утверждения можно установить без использования матрицы вторых производных, рассматривая непосредственно поведение функции $f(x, y)$ в малых окрестностях точек A_1, A_2.

Ответы: а) нет, б) нет, в) нет, г) да, д) нет, е) нет, ж) да, з) да.

Задача 5. Представим последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в рекурсивном виде:

$$f_1(x) = \sqrt{x}, f_n(x) = \sqrt{x + f_{n-1}(x)}.$$

При любом n область определения $f_n(x)$ — полуинтервал $[0, +\infty)$. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то можно перейти к пределу в равенстве $f_n(x) =$

$= \sqrt{x + f_{n-1}(x)}$. При этом получим равенство $f(x) = \sqrt{x + f(x)}$, откуда получим, что $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$ при $x > 0$, и $f(0) = 0$.

Докажем, что при любом $x \in [0, +\infty)$ предел существует. Для этого проверим, что

* последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонная;

* последовательность $\{f_n(x)\}$ ограниченная.

Монотонность докажем по индукции:

1) ясно, что $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x} = f_1(x)$;

2) пусть $f_n(x) \geqslant f_{n-1}(x)$, тогда

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)} \geqslant \sqrt{x + f_{n-1}(x)} = f_n(x).$$

Ограниченность тоже докажем по индукции:

1) ясно, что $f_1(x) = \sqrt{x} < \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + x}$;

2) пусть $f_n(x) < \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$, тогда

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sqrt{x + f_n(x)} < \\ &< \sqrt{x + \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{1+4x} + (1+4x)}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1+\sqrt{1+4x})^2}{4}} = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, предел существует при всех $x \geqslant 0$, т. е. $M = [0, +\infty)$, и равен

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{1+4x}}{2}, & \text{при } x > 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тем самым, ответ на вопрос а) — «да», в) — «да». Так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0$, то $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$, и ответ на вопрос б) — «нет». Значение $f(3) = \dfrac{1+\sqrt{1+4\cdot 3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$. Следовательно, ответ на вопрос ж) — «нет». Так как множество внутренних точек M — интервал $(0, +\infty)$, и $f(x)$ дифференцируема при любом $x > 0$, то ответ на вопрос з) — «да».

Так как $f(x)$ является разрывной на $[0, 2]$, а все $f_n(x)$ непрерывны на M, то сходимость на $[0, 2]$ неравномерная, и ответ на вопрос г) — «нет».

Последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ монотонно. На любом отрезке $[a, b]$, где $a > 0$, функция $f(x)$ непрерывна. Следовательно, сходимость на $[a, b]$ является равномерной, и ответы на вопрос д) — «да» и е) — «да».

Докажем непосредственно, что $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке $[a, b]$, где $a > 0$.

Справедливо следующее равенство:

$$(f_{n+1}(x) - f_n(x))(f_{n+1}(x) + f_n(x)) = f_{n+1}^2(x) - f_n^2(x) =$$
$$= x + f_n(x) - x - f_{n-1}(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Откуда следует, что

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{f_{n+1}(x) + f_n(x)} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

При $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(a) \geqslant r > 1$. Значит, найдется такое натуральное N, что при любом $n > N$ выполняется неравенство $f_n(x) \geqslant f_n(a) > 1$, и

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$

Отсюда следует, что для любых $n > N$ и $k > 0$ (и $x \in [a, b]$)

$$|f_{n+k}(x) - f_{n+k-1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^k} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k+n-N}} |f_{N+1}(x) - f_N(x)|.$$

Так как $f_N(x)$ и $f_{N+1}(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то

$$|f_{n+k}(x) - f_{n+k-1}(x)| \leqslant \frac{K_N}{2^{n+k}},$$

где $K_N = \max\limits_{x \in [a,b]} 2^N |f_{N+1}(x) - f_N(x)|$.

Поэтому

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+k}(x) - f_{n+k-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant K_N \left(\frac{1}{2^{n+k}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \leqslant \frac{K_N}{2^n}.$$

Это означает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ является равномерно фундаментальной на отрезке $[a, b]$. Согласно критерию Коши, она сходится равномерно на отрезке $[a, b]$.

5 Формат вступительного экзамена 2004 г.

1. Экзамен по математике проводится в форме письменного теста. Продолжительность экзамена 4 часа, максимальная оценка — «12».

2. Тест состоит из двух частей.

   Первая часть содержит вопросы и задачи по математическому анализу и линейной алгебре, в каждом из которых надо выбрать один правильный ответ из пяти предложенных вариантов.

   Цель этой части экзамена — проверить умение абитуриента решать стандартные задачи (вычислять производные и интегралы, исследовать функции, находить минимальные и максимальные значения функций, умножать и обращать матрицы и т. п.).

   Продолжительность первой части — 2 часа.

   Вторая часть содержит вопросы, объединенные в блоки. В каждом блоке есть вводная часть, описывающая условия, в рамках которых надлежит ответить на вопросы данного блока. Каждый вопрос требует ответа «Да» или «Нет». Число вопросов в пределах каждого блока может быть различным.

   Цель этой части — проверить степень усвоения абитуриентами основных математических понятий, определений, теорем, а также умение применять теорию для решения задач из разных разделов программы экзамена.

   Продолжительность второй части — 2 часа.

3. Правила оценивания теста следующие

   Первая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-0.25»
   * отсутствие ответа — «0»

   Вторая часть:

   * правильный ответ — «$+1$»
   * неправильный ответ — «-1»
   * отсутствие ответа — «0»

4. Максимальное количество баллов, которое можно получить за каждую часть теста, одинаково.

5. Оценка за экзамен определяется суммой баллов, полученных за первую и за вторую части теста. Максимальная оценка — «12».

6. Оценка «2» и ниже считается неудовлетворительной. Абитуриент, получивший неудовлетворительную оценку, к дальнейшим экзаменам не допускается.

7. В день объявления оценок за экзамен по математике абитуриенту предоставляется право ознакомиться со своей работой. При обнаружении технической ошибки в подсчете набранных очков абитуриент имеет право на апелляцию, которая подается в день объявления результатов экзамена и в тот же день рассматривается комиссией.

6 Подготовительные курсы по математике

В Российской Экономической Школе работают платные подготовительные курсы. Программы подготовительных курсов ориентированы на подготовку слушателей к сдаче вступительных экзаменов в РЭШ. Занятия на курсах ведут опытные преподаватели РЭШ. Подготовительные курсы завершаются письменными экзаменами, результаты которых могут быть засчитаны в качестве вступительных экзаменов.

Цель курсов:

* напомнить абитуриентам основные понятия математического анализа и линейной алгебры;
* прояснить те разделы теории, которым уделяется недостаточно внимания в традиционных курсах, читаемых в вузах;
* разобрать решения типовых задач вступительных экзаменов в РЭШ;
* повысить общий математический уровень слушателей.

Подготовительные курсы работают по двум программам:

* **Полный курс: февраль—июнь 2004 г.**
  Курс предусматривает систематическое рассмотрение всех разделов математического анализа и линейной алгебры в объеме программы вступительного экзамена в РЭШ. Занятия 2 раза в неделю (среда с 18:30 и суббота с 10:00) — 3 ак. часа лекция, 2 ак. часа семинар. **Начало занятий — 11 февраля 2004 г.**
* **Интенсивный курс: апрель—июнь 2004 г.**
  В интенсивном курсе рассматриваются наиболее сложные разделы программы. Занятия: 2 лекции по 3 ак. часа в неделю (вторник и пятница с 18:30). **Начало занятий — 19 апреля 2004 г.**

Запись на курсы: Координатор подготовительных курсов — Кулагина Ольга Ивановна (332-4423, okulagin@nes.ru)

Адрес РЭШ

117418, Москва, Нахимовский проспект, 47 (здание ЦЭМИ РАН), 17 этаж, офис 1721, проезд до ст. метро «Профсоюзная».