НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И ИГРОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ [1]

С.Г.Коковин, А.В.Савватеев

С.Г.Коковин: Институт математики СО РАН; Новосибирский Государственный Университет; А.В.Савватеев: ЦЭМИ РАН; Российская Экономическая Школа; Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва; and CORE, Catholic University of Louvain-La-Neuve, Belgium.
e-mail: kokovin@math.nsc.ru (С.Г.Коковин); hibiny@mail.ru (А.В.Савватеев).

Аннотация. Предлагается единый способ введения нескольких сужений равновесия Нэша для игр в нормальной форме — на языке нестандартного анализа (этот способ приложим также и к развернутой форме). В том числе, определяются нестандартные варианты "равновесия дрожащей руки" и *"правильного равновесия"*, удобные для переноса решений на игры в развернутой форме. Приведена схема доказательства существования решений. Предлагается их интерпретация как различных требований рациональности над полем нестандартных чисел.

Ключевые слова: сужение равновесия Нэша, правильное равновесие, нестандартный анализ, лексикографическое вероятностное распределение, упорядоченное разбиение, нестандартная оптимизация.

Введение и постановка задачи

Одно из удачных сужений множества равновесий Нэша (NE) — "равновесие дрожащей руки" из [1] (THNE). Это такое равновесие Нэша, что существует сходящаяся к нему последовательность вполне смешанных стратегий (где нет неиспользуемых стратегий), наилучшим ответом на все члены которой для всех игроков являются их стратегии, входящие в это равновесие. Все же, эта концепция имеет недостаток, который и мотивирует дальнейшее ее сужение. Действительно, одно из возможных содержательных обоснований идеи THNE, как и NE, — эволюционное, или, лучше, "популяционное" (чтобы не путать с "эволюционными играми"). Подразумевается, что перед данным розыгрышем была *предыстория* таких же игр, неоднократно разыгранных целой популяцией таких же участников. И *ожидания* (веры) теперешних игроков о намечаемых стратегиях их партнеров взяты именно из предыстории — иначе трудно обосновать знание текущих стратегий партнеров. Концепция THNE адекватно снимает проблемы концепции Нэша в отношении ожиданий о неприменяемых обычно стратегиях (вне пути игры), и заодно отбрасывает слабо-доминируемые стратегии. Можно понимать ее так: в предыстории у каждого игрока бывали изредка "затмения", то есть моменты (не-рационального) применения *каждой* из его стратегий, а его партнеры рационально реагировали на это. Понемногу иррациональность сошла на нет, и образовалось THNE. Но произвольность этой предыстории (вполне-смешанной последовательности, сходящейся к THNE) вызывает неудовлетворенность. Вместо

[1]Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке, а также гранта государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект # НШ-1939.2003.6) и Российского Гуманитарного Научного Фонда. Авторы благодарны В.И.Данилову и В.М.Маракулину за идеи применения лексикографии и нестандартного анализа к играм, и Новосибирскому Государственному Университету за гостеприимство в период работы.

этого, можно предполагать, что в силу каких-то причин каждый игрок (тип игрока) время от времени "не замечал" части своих возможностей, и пользовался только оставшимися стратегиями, но пользовался ими рационально! Эта центральная идея создает естественное "квантование" или *упорядоченное разбиение* множества доступных стратегий произвольного игрока на "хорошие" (которыми выгодно пользоваться при полноте возможностей), "посредственные" (которыми выгодно пользоваться при отсутствии хороших), "плохие" (используемые при отсутствии хороших и посредственных), "совсем плохие", и т.д. То есть, **вместо взятия максимума, как представления о рациональном поведении, можно использовать операцию упорядоченного разбиения**. Все равно как если бы в бюллетене для голосования вместо выделения только наилучшего кандидата, требовалось упорядочить всех кандидатов, возможно, создавая классы эквивалентности. Высказанные соображения обосновывают понятие «правильного» равновесия (PrE, proper equilibrium), введённое Р.Маерсоном [2] в терминах последовательностей, и обсуждаемое в [3, 8]. PrE усиливает понятие THNE, с учётом «осмысленной» предыстории (PrE $\subset$ THNE), и к тому же, обслуживает определённый аспект связи между игрой в развёрнутой форме и её нормальным представлением. В ряде работ [3, 4, 5, 6, 7] различные оптимизационные и игровые решения, включая THNE и PrE, формулируются на языке "лексикографических вероятностных распределений". Как ни странно, в этих работах не используется явным образом язык нестандартного анализа, разработанный А.Робинсоном (см. [9]) и естественный для этих целей. Зачастую авторы проводят типичные "нестандартные" рассуждения в более громоздких, стандартных, терминах. Отталкиваясь в основном от работ [4, 6], мы в данной статье "нестандартно" переопределяем указанную цепочку основных концепций игровых равновесий (NE $\subset$ THNE $\subset$ PrE). Это позволяет яснее увидеть их взаимосвязи, удобнее строить по ним решения в развернутой форме, и интерпретировать их различия не только через предысторию, а и как особенности разных типов рациональности.

1. Нестандартные смешанные стратегии

Позабудем теперь о всех предысториях, последовательностях и эволюциях. Зато разрешим игрокам пользоваться полем нестандартных чисел ${}^*\mathbf{R}$. И примем гипотезу: любая доступная игроку чистая стратегия должна им иногда использоваться. То есть, чисто-нулевых вероятностей нет, можно только придавать стратегиям бесконечно-малые значения разных порядков малости. Формализуя сказанное, рассмотрим смешанное расширение конечной игры в нормальной форме (возможно, отражающей какую-либо динамическую игру), с множеством игроков $N = \{1, ..., n\}$, множествами S_i чистых стратегий каждого из игроков, и функциями выигрыша каждого игрока $u_i(s)$, где $s = (s_1, \ldots, s_n)$ — набор чистых стратегий игроков. Как обычно, чистую стратегию s_i можно представлять себе ортом в (m_i)-мерном пространстве (считая, что у игрока i есть m_i стратегий), а «список» (конечное множество) чистых стратегий каждого игрока $S_i = \{e_1, ..., e_{m_i}\}$ — базисом в R^{m_i}. Стандартно, $\Delta[S_i]$ обозначает симплекс, натянутый на этот базис, а $\Delta^o[S_i]$ — его внутренность. Смысл этих объектов таков: $\Delta[S_i]$ — множество всех смешанных стратегий i-го игрока, а $\Delta^o[S_i]$ — множество вполне смешанных стратегий, то есть таких, в которых нет неиспользуемых чистых стратегий. Перенесём теперь эти понятия на поле нестандартных чисел. Стандартную часть числа x будем обозначать ${}^o(x) \equiv \mathrm{st}(x)$ (как в [9]).

Определение 1. Нестандартной смешанной стратегией игрока i назовем любой положительный вектор ${}^*\sigma_i \in {}^*\mathbf{R}^{m_i}_{++}$, стандартная часть которого ${}^o({}^*\sigma_i) \in \Delta[S_i] \subset \mathbf{R}^{m_i}_+$ принадлежит симплексу смешанных стратегий.

Чтобы переформулировать это определение лексикографически, мы примем следующую точку зрения на рациональное поведение в нестандартных числах. Задавая свою нестандартную смешанную стратегию σ_i, каждый игрок ранжирует все свои чистые стратегии на использующиеся время от времени, использующиеся очень редко, использующиеся крайне редко и т.п., разбивая список чистых стратегий на несколько слоев с разными порядками малости (чтобы описать это, достаточно пользоваться одним, любым, нестандартным бесконечно малым числом $\hat{\varepsilon}$ из ${}^*\mathbf{R}_{++}$, не используя всего богатства нестандартных чисел, и зафиксировать это число раз и навсегда для всех игроков и всех последующих рассуждений). В рамках каждого порядка малости возможно обычное смешивание стратегий. Это дает следующее определение, более удобное при анализе, чем предыдущее (здесь и далее $\Upsilon[S]$ — множество всех упорядоченных разбиений множества S.)

Определение 1'. «Развернутая» нестандартная смешанная стратегия $\sigma_i \in \mathbf{R}^{m_i \times m_i}_+$ игрока i есть неотрицательная матрица $m_i \times m_i$, у которой ненулевыми являются первые $\hat{l}$ столбцов, где $0 \leq \hat{l} \leq m_i - 1$, такая, что множества строчных номеров ненулевых элементов первых $\hat{l}$ столбцов задают упорядоченное разбиение $\upsilon_i = \{S_i^0, S_i^1, \ldots, S_i^{\hat{l}}\} \in \Upsilon[S_i]$:

$$S_i = S_i^0 \sqcup S_i^1 \sqcup \ldots \sqcup S_i^{\hat{l}} \qquad (1)$$

списка S_i чистых стратегий. Сумма элементов в каждом ненулевом столбце равна 1. Таким образом, в каждой строке один и только один элемент ненулевой, и этот элемент задаёт “амплитуду” вероятности использования данной стратегии, а номер столбца, в котором этот элемент расположен, отвечает порядку малости. Иначе говоря, каждый ненулевой столбец $\sigma_i^j \in \Delta[S_i^j] \subset \Delta[S_i] \subset \mathbf{R}^{m_i}_+$ при $j \leq \hat{l}$ задает вероятностное распределение “частот использования” стратегий, вполне смешанное в рамках j-го слоя-носителя, в смысле $(k \in S_i^j \Rightarrow \sigma_{ik}^j > 0, \quad k \notin S_i^j \Rightarrow \sigma_{ik}^j = 0)$, а столбцы с номерами выше $\hat{l}$ нулевые. «Свернутая» же нестандартная смешанная стратегия ${}^*\sigma_i$ игрока i, для заданного бесконечно-малого $\hat{\varepsilon} > 0$, есть полином от $\hat{\varepsilon}$, включающий компоненты-столбцы развернутой стратегии σ_i (возведение в степень — в скобках):

$${}^*\sigma_i = \sigma_i^0 + \hat{\varepsilon}\sigma_i^1 + \hat{\varepsilon}^{(2)}\sigma_i^2 + \ldots + \varepsilon^{(\hat{l})}\sigma_i^{\hat{l}} \in {}^*\mathbf{R}^{m_i}_{++}. \qquad (2)$$

Разбиение типа (1), соответствующее нестандартной смешанной стратегии ${}^*\sigma_i$, обозначим за $\upsilon[{}^*\sigma_i]$, а главную компоненту S_i^0 разбиения назовём *(основным) носителем* нестандартной смешанной стратегии, и обозначим его за $supp({}^*\sigma_i) \subset S_i$.

Это определение работоспособнее предыдущего, поскольку сводит нестандартную оптимизацию к выбору стандартных матриц, что обеспечивает существование экстремумов и их ясный смысл. Стратегию ${}^*\sigma_i$, можно объяснить так. “Если ничто не мешает”, то игрок обычно использует чистые стратегии из основного носителя этой смешанной стратегии. Если же почему-то использовать стратегий из множества S_i^0 он не может, то использует стратегии из носителя следующего уровня S_i^1; происходит такое, впрочем, с “очень малой” вероятностью $\hat{\varepsilon}$, и т.д.. При $m_i = 3$, достаточно наметить не более 3-х уровней малости своего поведения, то есть оптимизировать выбор в компактном подмножестве 9-мерного пространства матриц 3x3.

2. Нестандартная максимизация

Пусть игрок (опуская далее его индекс i во всех обозначениях и формулах до конца раздела) со множеством чистых стратегий S максимизирует по нестандартным смешанным стратегиям функцию выигрыша $u : S \to {}^*\mathbf{R}$, принимающую, возможно, нестандартные значения ($u(s)$ означает выигрыш $u_{^*\sigma_{-i}}(s) \equiv u(s, {}^*\sigma_{-i})$ при заданных нестандартных смешанных стратегиях партнеров ${}^*\sigma_{-i}$). Как описать оптимальные стратегии среди всех нестандартных смешанных? Можно либо указать просто наилучшие стратегии, либо «наилучшие», или правильные, разбиения из множества $\Upsilon[S]$ всевозможных упорядоченных разбиений списка S типа (1). В обоих случаях можно исходить либо из самой функции u, либо из её стандартной части. Соответственно, возникают четыре понятия оптимальности чистых (а тем самым и смешанных) стратегий, соответствующих, как потом станет ясно, глубине «продуманности поведения» в концепции равновесия:

Определение 2.

1. $Arg\max_s {}^o\!u \subset S$ — список (конечное множество) чистых стратегий игрока, на которых достигает максимума функция ${}^o\!(u(\cdot))$, то есть стандартная часть функции выигрыша. (Это означает, что игрок игнорирует бесконечно малые добавки к выигрышам, что приводит к равновесию Нэша, NE.)

2. $Arg\max_s u \subset S$ — список чистых стратегий игрока, на которых достигает максимума сама функция u, включая стандартную и нестандартную части, то есть все бесконечно-малые принимаются в расчёт. (Соответствует равновесию THNE.)

3. $Arg\,\mathrm{segm}_s {}^o\!u \in \Upsilon[S]$ — (однозначно определяемое) упорядоченное разбиение (1) списка S, являющееся упорядоченным прообразом стандартной части функции выигрыша ${}^o\!(u)$, то есть $[{}^o\!(u)|_{S^j} \equiv const \quad \forall S^j, \quad {}^o\!(u)|_{S^j} > {}^o\!(u)|_{S^h} \iff j < h]$. (Соответствует некоторым равновесиям из итерационно сильно недоминируемых).

4. $Arg\,\mathrm{segm}_s u \in \Upsilon[S]$ — (однозначно определяемое) упорядоченное разбиение (1) списка S, являющееся упорядоченным прообразом функции выигрыша u, то есть $[u|_{S^j} = const \in {}^*\mathbf{R}, \quad u|_{S^j} > u|_{S^h} \iff j < h]$. (Соответствует правильному равновесию PrE.)

Например, семь стратегий (a, b, c, d, e, f, g) могут приносить вектор выигрышей
$(u(a), u(b), u(c), u(d), u(e), u(f), u(g)) = (5 + \varepsilon,\ 5 + \varepsilon,\ 5 + \varepsilon^2,\ 5,\ 4 + \varepsilon\ , 4\ , 3)$,
то есть семь значений функции полезности. Тогда $Arg\max_s {}^o\!u = S^0 = \{a, b, c, d\}$; $Arg\max_s u = S^0 = \{a, b\}$; $Arg\,\mathrm{segm}_s {}^o\!u = S^0 \sqcup S^1 \sqcup S^2 = \{a, b, c, d\} \sqcup \{e, f\} \sqcup \{g\}$; $Arg\,\mathrm{segm}_s u = S^0 \sqcup S^1 \sqcup S^2 \sqcup S^3 \sqcup S^4 \sqcup S^5 = \{a, b\} \sqcup \{c\} \sqcup \{d\} \sqcup \{e\} \sqcup \{f\} \sqcup \{g\}$.

3. Игры в нормальной форме: от Нэша к правильному равновесию

А теперь кульминация наших построений — четыре концепции равновесия в одном абзаце. Мы пользуемся ниже естественным порядком «тонкости» на множестве всех упорядоченных разбиений. А именно, *упорядоченное разбиение υ' считается тоньше, чем υ'' (пишем: $\upsilon' \preceq \upsilon''$), если первое получается из второго измельчением.*

Определение 3. В игре в нормальной форме профиль $\{{}^*\sigma_i\}_{(i\in N)}$ свернутых нестандартных смешанных стратегий игроков называется:

1. Нестандартным равновесием Нэша (NNE), если
$$\forall i \quad supp(^*\sigma_i) \subset Arg \max_{s_i \in S_i} {}^o u_i(s_i, {}^*\sigma_{-i});$$

2. Нестандартным равновесием дрожащей руки (NTHNE), если
$$\forall i \quad supp(^*\sigma_i) \subset Arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, {}^*\sigma_{-i});$$

3. Равновесием сегментации SegmE, если $\forall i \quad v[^*\sigma_i] \preceq Arg\, segm_{s_i \in S_i} {}^o u_i(s_i, {}^*\sigma_{-i});$

4. Нестандартным правильным равновесием (NPrE), если
$$\forall i \quad v[^*\sigma_i] \preceq Arg\, segm_{s_i \in S_i} u_i(s_i, {}^*\sigma_{-i}).$$

Вторая и третья концепции несравнимы, но сильнее первой, а четвертая — NPrE — сильнейшая из всех концепций. Она соответствует концепции правильного равновесия Майерсона (proper equilibrium PrE, см. [2]), заодно указывая в нестандартном пространстве *направление* приближений к PrE, что позволяет формировать «веры» для секвенциальных равновесий (подробности см. в [10]).

Теорема существования. Можно проверить, что доказательство существования NPrE проходит по той же схеме, что и PrE (см. напр. [10] стр. 357).

Список литературы

[1] Selten, R. *Reexamination of the perfection concept for equilibrium points in extensive games.* - International Journal of Game Theory, 1975, vol. 4, 25-55.

[2] Myerson, R. *Refinements of the Nash equilibrium concept.* - International Journal of Game Theory, 1978, vol. 7, 73-80.

[3] Pearce, D.G. *Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection.* - Econometrica, 1984, vol. 52 (4), 1029-1050.

[4] Blume L., A. Brandenburger and E. Dekel. *Lexicographic probabilities and equilibrium refinements.* - Econometrica, 1991, vol. 59 (1), 81-98.

[5] Mailath, G.I., L. Samualson and J.M. Swinkels. *Extensive form reasoning in normal form games.* - Econometrica, 1993, vol. 61 (2), 273-302.

[6] Hammond, P.J. *Non-Archimedean subjective probabilities in decision theory and games.* - Mathematical Social Sciences, 1999, vol. 38 (2), 139-156.

[7] Govindan, S. and T. Klumpp. *Perfect equilibrium and lexicographic beliefs.* - mimeo, 2000.

[8] Mertens, J-F. *Stable equilibria — a reformulation.* - Mathematics of operations research, 1989, vol. 14 (4), 575-625.

[9] Дэвис, М. *Прикладной нестандартный анализ.* Москва: Мир, 1980, 236 с.

[10] Fudenberg, D. and Tirole, J. *Game Theory.* - Cambridge: The MIT Press, 1995, 579 pp.

Nonstandard analysis and game equilibriua

Serguei Kokovin and Alexei Savvateev

Serguei Kokovin: Institute for Mathematics of the Syberian Branch of the Russian Academy of Sciences in Novosibirsk, and Economic departament of Novosibirsk State University, Russia; Alexei Savvateev: Central Economics and Mathematics Institute, Moscow; Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow; New Economic School, Moscow; CORE, Catholic University of Louvain-la-Neuve, Belgium. *Financial support through grants # NSh-1939.2003.6 School Support, Russian Science Support Foundation and Fund for Promotion of Russian Humanitarian Sciences is gratefully acknowledged, as well as ideological influence of V.Danilov and V.Marakulin.*
e-mail: kokovin@math.nsc.ru (S. Kokovin); hibiny@mail.ru (A. Savvateev)

Abstract. A new method of defining refinements of normal-form Nash equilibrium is suggested, in terms of non-standard analysis (the method being suitable for extensive form as well). As a result, trembling hand equilibria and proper equilibria of a normal representation of a game can be more easily transformed into corresponding equilibria of its extensive form. Existence of a newly defined refinements is explained and its interpretation in non-standard rationality terms is given.

Key words: Nash refinements, proper equilibrium, non-standard analysis, lexicographic probabilities, segmentation, non-standard optimization