Безарбитражное ценообразование

$(\omega_1, \ldots, \omega_N)$ — N состояний природы (реализуются в $t = 1$; при $t = 0$ — неопределенность). Для любого актива $a = (a_1, \ldots, a_N)'$ (этот актив приносит a_j в состоянии ω_j) обозначим $P(a)$ — цена этого актива в момент времени $t = 0$. e_j — j-ый актив Эрроу-Дебре (приносит 1, если реализовалось ω_j, и 0 — иначе); везде далее $S_j = P(e_j)$.

Для каждого $a = (a_1, \ldots, a_N)'$ выполнено

$$P(a) = a_1 S_1 + \ldots + a_N s_N$$

В частности,

$$\frac{1}{1 + r_f} \equiv P(1) = S_1 + \ldots + S_N$$

Отсюда следует представление с помощью риск-нейтральных вероятностей: если $q_j = \frac{S_j}{S_1 + \ldots + S_N}$ для каждого j, то

$$P(a) = \frac{1}{1 + r_f} \sum_{j=1}^{N} a_j q_j \quad \forall a$$

Даны цены активов $d_1, \ldots, d_m$ и требуется найти цену актива c.

1) Пусть $rank(d_1, \ldots, d_m) = m$ (если $rank(d_1, \ldots, d_m) < m$, то выбросим лишние активы). Если $m = N$, то уже имеется полный рынок, и можно однозначно определить цены Эрроу-Дебре. Если $m < N$, то нужно добавить $(N - m)$ линейно независимых активов. Пусть $e_1, \ldots, e_{N-m}$ — линейно независимы с $(d_1, \ldots, d_m)$. Обозначим $\lambda_1 = S_1, \ldots, \lambda_{N-m} = S_{N-m}$. Имеем систему из m уравнений с m неизвестными $(S_{N-m+1}, \ldots, S_N)$:

$$P(d_1) = d_{1,1}\lambda_1 + \ldots + d_{1,N-m}\lambda_{N-m} + d_{1,N-m+1}S_{N-m+1} + \ldots + d_{1,N}S_N$$

$$\ldots$$

$$P(d_m) = d_{m,1}\lambda_1 + \ldots + d_{m,N-m}\lambda_{N-m} + d_{m,N-m+1}S_{N-m+1} + \ldots + d_{m,N}S_N$$

Отсюда находим $S_{N-m+1}, \ldots, S_N$ как линейные комбинации $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-m}$

2) Условия отсутствия арбитража (здесь и далее $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-m})$):

$$S_1 = \lambda_1 > 0$$

$$\ldots$$

$$S_{N-m} = \lambda_{N-m} > 0$$

$$S_{N-m+1}(\lambda) > 0$$

$$\ldots$$

$$S_N(\lambda) > 0$$

Получаем ограничения на $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-m}$: $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-m}) \in G$, где G — некоторая область в $\mathbb{R}^{N-m}$. Например, если $m = N - 1$ (т.е. для полного рынка нам не хватает одного актива), то $\lambda_1 \in (K_1, K_2)$ для некоторых констант K_1 и K_2.

3) $P(c) = \sum_{j=1}^{N} c_j S_j(\lambda) = f(\lambda) =$ линейная комбинация $\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-m}$. Ограничения на $P(c)$ находятся из

$$f_1 = \min_{\lambda \in G} f(\lambda)$$

$$f_2 = \max_{\lambda \in G} f(\lambda)$$

Отсюда $f_1 < P(c) < f_2$.