Жук С.Н.

Стратегическое Голосование

Препринт # BSP/007/89 R

Эта работа была написана на основе магистерских тезисов в РЭШ в 2007 году в рамках исследовательского проекта "Политический Риск: Приложения для корпоративного управления и структуры рынка" под руководством С.М. Гуриева (РЭШ, ЦЭФИР) и К.И. Сонина (РЭШ, ЦЭФИР).

Автор благодарен научным руководителям и другим участникам исследовательского семинара за полезные комментарии.

Москва
2007

Жук С.Н. Стратегическое голосование / Препринт # BSP/007/89 R - М.: Российская Экономическая Школа, 2007. – 38 с. (Рус.)

Можно заметить, что в голосованиях единогласные результаты могут наблюдаться не только, когда все агенты точно знают, что одно решение лучше, чем другое, но и когда у них имеется достаточно мало информации, о том, какое решение было бы правильным. В данной работе предложена модель стратегического голосования, объясняющая подобное поведение. Предполагается, что у агентов при выборе своего решения могут присутствовать стимулов двух типов: во-первых, они хотят, чтобы было выбрано правильное решение; во-вторых, у них может возникать определенное желание подражать большинству. Даже незначительные стимулы второго типа могут существенно изменить ситуацию.

Ключевые слова: голосование, стратегическое поведение, агрегирование информации

Sergey Zhuk. Strategic Voting / Working Paper # BSP/007/89 R – Moscow, New Economic School, 2007. – 38 p. (Rus.)

It can be noticed that almost unanimous results in voting can be observed not only when all voters know that one decision is better than the other, but also when all agents have relatively little information about what decision would be the right one. In the work the model of strategic voting is proposed explaining such behavior. It is assumed that agents while choosing their vote may have two different kinds of incentives: first, they want the right decision to be chosen; second, they may have some desire to conform with majority. Even very slight incentives of the second kind can change the situation quite significantly.

Key words: voting, strategic behavior, information aggregation

ISBN

Содержание

1 Введение

Многие очень важные решения принимаются с помощью голосования (суды присяжных, выборы CEO или совета директоров компаний, изменение законодательства страны). Обычно предполагается, что при голосовании агенты принимают во внимание только свои собственные предпочтения. Однако, могут возникать ситуации, в которых у агентов могут появляться стимулы вести себя стратегически.

Рассмотрим, например, ситуацию из статьи Feddersen и Pesendorfer (1998). Предположим, у нас есть 12 судей присяжных, которые определяют с помощью голосования является ли подсудимый виновным. Для принятия решения обычно используется так называемое правило единогласия (требуется 12 голосов, чтобы обвинить подсудимого). После слушаний дела как судья формирует некоторое свое собственное мнения о виновности обвиняемого.

Теперь предположим, что все судьи придерживаются правдивых стратегий, то есть, они голосуют учитывая только свою частную информацию. Можно заметить, что голос какого-то судьи может повлиять на исход голосования только, если все остальные судьи голосуют следующим образом:

$$\begin{aligned} &11 \text{ голосов} && \rightarrow && \text{обвинить} \\ &0 \text{ голосов} && \rightarrow && \text{оправдать} \end{aligned}$$

Какой-нибудь судья в данной ситуации может решить отклониться от правдивой стратегии. Так как его голос будет решающим, только если все остальные судьи считают, что подсудимый виновен, он может найти выгодным проигнорировать свою частную информацию и проголосовать "обвинить". Таким образом, правдивые стратегии не будут являться равновесными в данной ситуации и голосование будет стратегическим.

Перейдем теперь к вопросу данной работы. Можно заметить, что единогласные результаты достаточно часто встречаются в голосованиях. Можно предположить, что это происходит не только, когда все агенты точно знают, что одно решение точно лучше чем другое, но и в том случае, когда у них достаточно мало информации. В работе предложена модель стратегического голосования, объясняющая данное поведение. Мы будет рассматривать в основном только голосования по правилу большинства.

Предполагается, что у агентов при выборе решения, могут возникать стимулы двух типов: во-первых они хотят, чтобы было выбрано правильное решение; во-вторых они хотят голосовать за победившее решение. В работе мы явным образом не моделируем откуда такое желание может появляться, для нас достаточно того, что он просто присутствует в определенном (возможно достаточно малом) количестве.

Желание голосовать за победившее решение может иметь чисто поведенческую природу. Психологи показали, что люди имеют склонность присоединяться к групповым решениям, даже когда они в действительности не считают данное решение правильным (Aronson, Wilson, и Akert (1997)). Но, кроме того, голосование за победившее решение может приносить и определенные реальные выгоды. Например, победивший на некоторых выборах кандидат может знать, кто за него голосовал, и затем некоторым образом вознаградить своих сторонников.

Основной целью работы было посмотреть как данное желание голосовать за победившее решение может влиять на результаты голосований. Показано, что даже незначительные стимулы такого типа могут существенно увеличить вероятность того, что в голосовании будут реализовываться единогласные результаты в случае, когда агенты имеют не очень точную информацию.

Понятие стратегического голосования не является новым в литературе. Например, оно обсуждалось уже в упомянутой выше статье Timothy Feddersen и Wolfgang Pesendorfer (1998). Они изучали, как различные правила голосования могут влиять на результаты голосований. Было показано, что правило единогласия (то что обсуждалось выше) хуже чем практически любое другое правило (правило большинства, правило 2/3 голосов) в терминах вероятности обвинить невиновного и вероятности оправдать виновного. Модель рассмотренная в данной работе является некоторым расширением их модели. Это расширение однако значительно усложнило задачу и модель не может уже быть решена полностью аналитически. Есть также ряд других статей, которые обсуждают стратегическое поведение судей (Austen-Smith и Banks (1996), Feddersen и Pesendorfer (1994, 1996), Myerson (1994), Wit (1996)).

Еще одна статья, которую стоит упомянуть – это статья Steven Callander'a. Он рассматривает модель последовательного голосования (хороший пример это выборы Primaries в Соединенных штатах). В своей работе он вводит желание агентов голосовать за победившее решение. Показано, что это желание может приводить к образованию эффекта подражания в последовательности голосования, то есть, начиная с некоторого момента агенты начинают игнорировать свою частную информацию и голосуют за то решение, которое имеет большинство голосов.

Ситуация рассмотренная в данной работе отличается от описанной выше тем, что рассматривается одновременное, а не последовательное голосование, и агенты не могут наблюдать решения остальных. Подражание большинству в данном случае может влиять только на равновесные стратегии.

Далее статья организована следующим образом. В разделе 2 мы обсудим модель и равновесия, которые мы будем рассматривать. В разделе 3 доказано, что, если агенты имеют информацию достаточно плохого качества, то мы будем наблюдать единогласные результаты в голосовании для любых значений параметров модели. Затем, в разделе 4 как иллюстрация к доказанным предложениям мы рассмотрим один конкретный пример, для которого модель решается численно. Затем, в разделе 5, обсуждается, как конкретно рассматриваемое желание голосовать за победившее решение может влиять на единогласность в результатах голосования.

2 Модель

2.1 Описание модели

Предположим, что n агентов принимают решение (W=0 or W=1) с помощью одновременного голосования. $v_i \in \{0, 1\}$ – это голос i-го агента. Решение $W = 1$ принимается, если у нас будет по крайней мере s голосов поддерживающих это решение ($v_i = 1$). Например, если $s = (n+1)/2$, то мы получим правило большинства, если $s = n$ – правило единогласия.

Мы предположим, что могут реализоваться два состояния мира $A = 0$ и $A = 1$; и каждое решение будет правильным для соответствующего состояния мира.

Полезность каждого агента в зависимости от его решения и результата голосования может быть записаны следующим образом:

$$u_i = \theta \cdot 1_{\{W=1|A=1\}} + (1-\theta) \cdot 1_{\{W=0|A=0\}} + k \cdot 1_{\{v_i=W\}}$$

where $\theta \in (0, 1)$, $k > 0$

Первые два слагаемых в выражении соответствуют полезности от принятия правильно решения. Последнее слагаемое отвечает за желание голосовать за победившее решение ($k > 0$). Параметр $\theta \in (0, 1)$ был добавлен, чтобы ввести в модель определенную асимметрию между двумя состояниями (что часто и бывает в реальности).

Каждый агент получает частный независимый сигнал $r_i \in \{0, 1\}$ о состоянии мира. Вероятность того, что сигнал является правильным равна $p > \frac{1}{2}$ в каждом из состояний, то есть,

$$\begin{array}{ll} Pr\{r_i = 1|A = 1\} = p & Pr\{r_i = 1|A = 0\} = 1-p \\ Pr\{r_i = 0|A = 1\} = 1-p & Pr\{r_i = 0|A = 0\} = p \end{array}$$

Предполагается, что изначально агенты считают, что состояния равновероятны. Это предположение существенно не ограничивает ситуации, так как не имеет большого значения, как вводить несимметриность в модель: с помощью начальных вер или с помощью параметра θ.

Если мы установим параметр k равным 0, мы в точности получим модель Feddersen и Pesendorfer [1]. Добавление некоторой константы к полезности обоих исходов в каком-нибудь из состояний мира не влияет на поведение агентов; поэтому не имеет используем ли мы выражение, описанное выше (с k равным 0) или выражение

$$u_i = -\theta \cdot 1_{\{W=0|A=1\}} - (1-\theta) \cdot 1_{\{W=1|A=0\}}$$

как в Feddersen и Pesendorfer (1998).

2.2 Стратегии и равновесия

Мы будем рассматривать только симметричные равновесия Нэша в смешанных стратегиях. Стратегия i-го агента может быть описана двумя числами

$$s_i = (\alpha_0, \alpha_1), \quad \alpha_0, \alpha_1 \in [0,1],$$

где α_j – это вероятность того, что агент выберет $v_i = 1$ если он получил сигнал $r_i = j$.

	$v_i = 0$	$v_i = 1$
$r_i = 0$	$1 - \alpha_0$	α_0
$r_i = 1$	$1 - \alpha_1$	α_1

Определение 1 *Обозначим,*

$$\Delta u_1 = E[u_i | r_i = 1, v_i = 1] - E[u_i | r_i = 1, v_i = 0]$$
$$\Delta u_0 = E[u_i | r_i = 0, v_i = 1] - E[u_i | r_i = 0, v_i = 0]$$

– разности в полезности для двух различных решений i-го агента в голосовании в зависимости от частного сигнала r_i.

В равновесии получим

$$\begin{array}{lll} \Delta u_1 < 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 0 & \quad & \Delta u_0 < 0 \;\Rightarrow\; \alpha_0 = 0 \\ \Delta u_1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \in [0,1] & & \Delta u_0 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_0 \in [0,1] \\ \Delta u_1 > 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = 1 & & \Delta u_0 > 0 \;\Rightarrow\; \alpha_0 = 1 \end{array}$$

Также, для того чтобы исключить равновесия, которые вряд ли могут реализоваться на практике нам понадобиться следующее определение

Определение 2 *Равновесие (α_0, α_1) будем называть устойчивым если существует такое $\varepsilon > 0$, для которого:*

1. *для любого $\Delta\alpha_0$ такого что $\alpha_0 + \Delta\alpha_0 \in [0,1]$ и $|\Delta\alpha_0| < \varepsilon$ имеем*

$$\Delta\alpha_0 > 0 \;\Rightarrow\; \Delta u_0(\alpha_0 + \Delta\alpha_0, \alpha_1) < 0$$
$$\Delta\alpha_0 < 0 \;\Rightarrow\; \Delta u_0(\alpha_0 + \Delta\alpha_0, \alpha_1) > 0$$

2. *для любого $\Delta\alpha_1$ такого что $\alpha_1 + \Delta\alpha_1 \in [0,1]$ и $|\Delta\alpha_1| < \varepsilon$ имеем*

$$\Delta\alpha_1 > 0 \;\Rightarrow\; \Delta u_1(\alpha_0, \alpha_1 + \Delta\alpha_1) < 0$$
$$\Delta\alpha_1 < 0 \;\Rightarrow\; \Delta u_1(\alpha_0, \alpha_1 + \Delta\alpha_1) > 0$$

Другими словами, равновесие называется устойчивым, если для любого достаточно малого изменения в стратегиях, агенты посчитают выгодным вернуться к исходному равновесию. Мы будем предполагать, что неустойчивые равновесия вряд ли могут реализоваться на практике.

3 Анализ модели

3.1 Вспомогательные утверждения

Далее, будем рассмотривать только правило большинства, то есть что $n = 2s-1$; и также будем предполагать, что $\theta > \frac{1}{2}$. Это не сильно не ограничивает ситуацию, так как правило отличное от правила большинства будет только вносить некоторую несимметричность в модель, которая уже моделируется с помощью параметра θ. Однако, данное предположения позволяет существенно упростить анализ.

Определение 3 *Обозначим*

$$\pi_0 = p\,\alpha_0 + (1-p)\,\alpha_1$$
$$\pi_1 = p\,\alpha_1 + (1-p)\,\alpha_0$$

π_0 – *вероятность того, что агент выберет* $v_i = 1$ *для состояния мира* $A = 0$*;*

π_1 – *вероятность того, что агент выберет* $v_i = 1$ *для состояние мира* $A = 1$*.*

Δu_1 и Δu_0 могут быть явным образом выражены как функции π_0 и π_1. Вычисления достаточно просты и представлены в приложении.

Предложение 1

$$\Delta u_1 = p\left[\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{n-s} + k\psi(\pi_1)\right] - \\ -(1-p)\left[(1-\theta)\,C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s} - k\psi(\pi_0)\right]$$

$$\Delta u_0 = (1-p)\left[\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} + k\psi(\pi_1)\right] - \\ -p\left[(1-\theta)\,C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1} - k\psi(\pi_0)\right]$$

где

$$\psi(\pi) = \sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^{i}\left(\pi^{n-1-i}(1-\pi)^{i} - \pi^{i}(1-\pi)^{n-1-i}\right)$$

Обозначим также

$$\varphi(\pi) = \frac{\psi(\pi)}{C_{n-1}^{s-1}\pi^{s-1}(1-\pi)^{s-1}} = \sum_{i=0}^{s-1}\frac{C_{n-1}^{s-1-i}}{C_{n-1}^{s-1}}\left(\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^{i} - \left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)^{i}\right)$$

Функция $\varphi(\pi)$ удовлетворяет следующим свойствам (они нам понадобятся в дальнейшем).

Предложение 2

1. *$\varphi(\pi)$ – возрастающая функция π.*

2. *$\varphi(1-\pi) = -\varphi(\pi)$. Следовательно, $\varphi(\frac{1}{2}) = 0$.*

3. *$\lim\limits_{\pi\to 1}\varphi(\pi) = +\infty$, $\lim\limits_{\pi\to 0}\varphi(\pi) = -\infty$.*

4. *Для $\pi \neq \frac{1}{2}$ имеем: $|\varphi(\pi)|$ – возрастающая функция n (при условии, что s изменяется соответствующим образом, то есть $s = 2n-1$).*

3.2 Равновесия в чистых стратегиях

Могут существовать четыре различных равновесия в чистых стратегиях:

- $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0$ and $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1$

  В этом случая агенты игнорируют свою частную информацию при голосовании. Несложно понять, что если используется не правило единогласия, то данные стратегии всегда составляют равновесие (голос одного агента не может повлиять на исход голосования). Мы будем называть такие равновесия неинформативными.

- $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$

  Стратегии такого типа мы будем называть правдивыми. В этом случае если агент получает сигнал, что одно решение лучше чем второе, он голосует согласно этому сигналу. К сожаление данные стратегии не всегда составляют равновесие. Может быть доказано следующее предложение.

  Предложение 3

  1. *Существует $\tilde{p}_s < \theta$, такое, что для любого $p > \tilde{p}_s$ правдивые стратегии составляют устойчивое равновесие и для любого $p < \tilde{p}_s$ они не составляют равновесие.*

2. *Критическое значение* $\tilde{p}_s$ *определяется из уравнения*

$$\theta = \tilde{p}_s + k(2\tilde{p}_s - 1)\varphi(\tilde{p}_s)$$

3. $\tilde{p}_s$ *убывающая функция* k *и* n *и возрастающая функция* θ.

Интересно, что $\tilde{p}_s$ является убывающей фунцией k, что означает, что тот факт, что люди получают полезность от того, что голосуют за победившее решение, может помочь поддерживать правдивое равновесие. Это происходит из-за того, что люди начинают использовать сигнал, не только как предсказание того какое состояние реализуется, но и как предсказание того, как будет голосовать большинство.

- $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$

Эти стратегии выглядят нелогичными; однако, они могут поддерживать в равновесии при достаточно большом k. В этом случае агенты использует сигнал только как предсказание того, как будет голосовать большинство. Следующее предложение может быть доказано.

Предложение 4

1. *Существует* $\tilde{p}_i$, *такое что для любого* $p > \tilde{p}_i$ *стратегии* $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$ *составляют устойчивое равновесие и для любого* $p < \tilde{p}_i$ *они не составляют равновесие.*

2. *Критическое значение* $\tilde{p}_i$ *определяется из уравнения*

$$\theta = 1 - \tilde{p}_i + k(2\tilde{p}_i - 1)\varphi(\tilde{p}_i) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta - \frac{1}{2} = (2\tilde{p}_i - 1)(k\varphi(\tilde{p}_i) - \frac{1}{2})$$

3. $\tilde{p}_i$ *– всегда больше чем* $\tilde{p}_s$.

4. $\tilde{p}_s$ *– убывающая функция* k *и* n *и возрастающая функция* θ.

3.3 Равновесия в смешанных стратегиях

Могут существовать несколько типов равновесий в смешанных стратегиях. Мы рассмотрим их по очереди.

- $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 \in (0,1)$ and $\alpha_0 \in (0,1),\ \alpha_1 = 0$

  Данные равновесия также являются в некотором смысле нелогичными, так как если агент получает сигнал $r_i = 1$ то он с большей вероятностью проголосует $v_i = 0$ по сравнению со случаем когда он бы получил сигнал $r_i = 1$. Можно доказать следующее предложение.

  Предложение 5 *Равновесия со стратегиями* $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 \in (0,1)$ *и* $\alpha_0 \in (0,1),\ \alpha_1 = 0$ *– всегда неустойчивы.*

- $\alpha_0 \in (0,1),\ \alpha_1 \in (0,1)$ (*равновесия в полностью смешанных стратегиях*)

  Предложение 6 *Равновесие в полностью смешанных стратегиях всегда неустойчиво.*

- $\alpha_0 \in (0,1),\ \alpha_1 = 1$

  Предложение 7 *Существует* $\bar{p}_1 < \tilde{p}_s$, *такое что для любого* $p < \bar{p}_1$ *Стратегии данного типа не могут составлять равновесие.*

- $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 \in (0,1)$

  Предложение 8 *Существует* $\bar{p}_2$, *такое что для любого* $p < \bar{p}_2$ *существует единственное равновесие со стратегиями данного типа, которое является неустойчивым.*

3.4 Существование информативного равновесия

Обобщая теперь все предшествующие предложения мы можем получить следующий важный результат

Предложение 9 *Предположим, что правило большинства используется для определения результатов голосования. Для любого n, $\theta > \frac{1}{2}$ и $k \geq 0$ существует $\bar{p}$, такое что для любого $p < \bar{p}$ единственными устойчивыми равновесиями будут неинформативные равновесия* $(0,0)$ *и* $(1,1)$.

Таким образом, мы получили, что когда информация у агентов достаточно низкого качества единственными возможными результатами могут быть единогласные результаты.

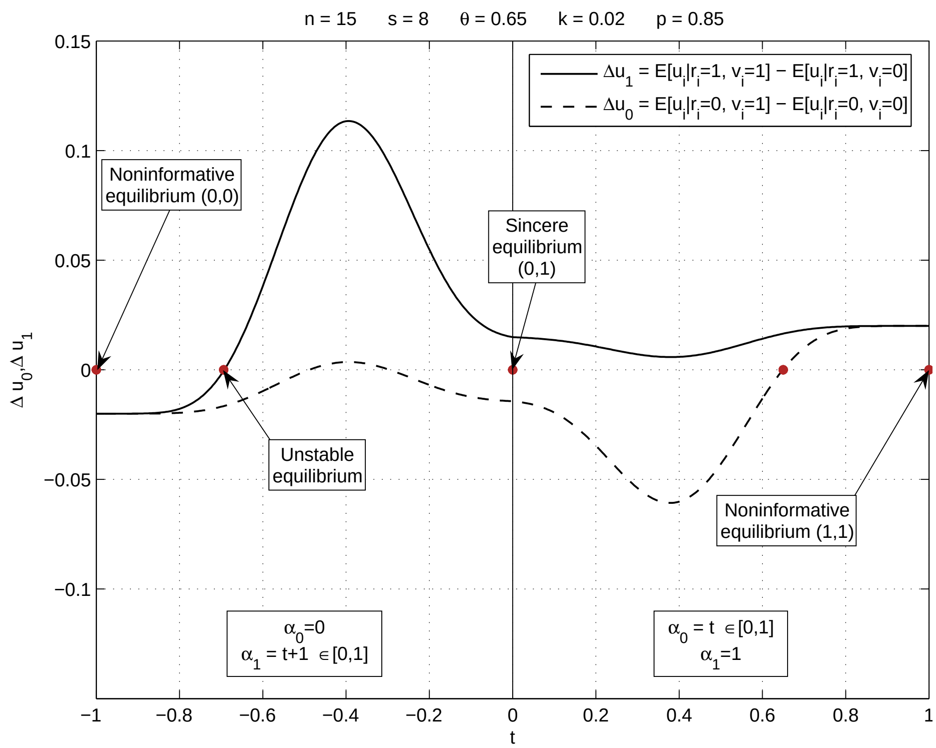
4 Численное моделирование

В данном разделе рассмотрим один конкретный пример голосования. Для каких-нибудь конкретных значений параметров модель может быть решена численно и мы можем непосредственно посмотреть насколько существенными являются рассматриваемые эффекты. Для проведения вычислений в работе использовался пакет MATLAB.

Предположим, что $\theta = 0.65$, то есть, правильное решение в одном из состояний приблизительно вдвое лучше правильного решения во втором. Также, будем считать, что $n = 15, s = 8$ (правило большинства используется для голосования) и $k = 0.02$ (полезность от подражания большинству значительно меньше полезности получаемой при принятии правильного решения). Рассмотренный пример не является каким-то особенным, для других значений получаются приблизительно такие же результаты.

Для любого фиксированного значения p мы будем предполагать, что агенты выбирают наилучшее устойчивое равновесие. Как было показано выше единственные случаи, которые нам нужно рассмотреть – это $\alpha_0 = 0, \alpha_1 \in [0,1]$ и $\alpha_0 \in [0,1], \alpha_1 = 1$ (во всех остальных случаях мы получим или нелогичное равновесие в чистых стратегиях или какое-нибудь неустойчивое равновесие).

Мы можем изобразить равновесия для какой-нибудь конкретной ситуации с помощью следующей диаграммы.



На диаграмме изображены функции Δu_1 и Δu_0 в зависимости от параметров α_0 и α_1.

Левая часть картинки соответствует случаю, когда $\alpha_0 = 0$. Здесь α_1 изменяется от 0 (точка с левого края картинки) до 1 (средняя точка на картинке). Правая часть картинки соответствует случаю, когда $\alpha_1 = 1$. Здесь, α_0 изменяется от 0 до 1.

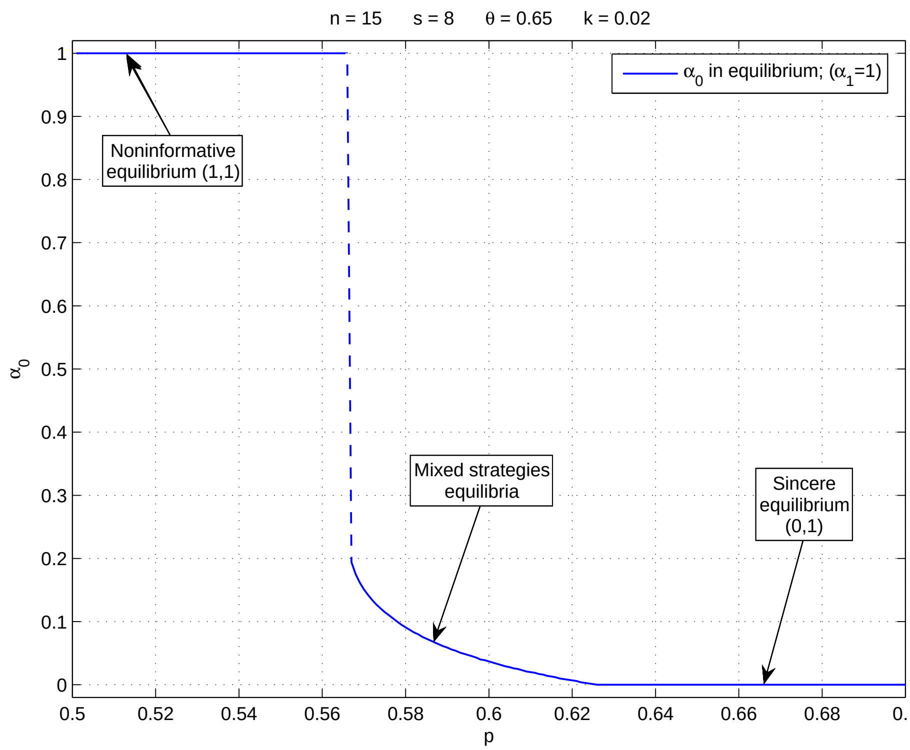
Жирными точками на картинке изображены равновесия. Крайние точки – неинформативные равновесия (uninformative equilibria). Средняя точка – правдивое равновесие (sincere equilibrium). Также есть еще два неустойчивых равновесия (unstable equilibria):

в левой части картинки – там где кривая Δu_1 пересекает 0, в правой – там где Δu_0 пересекает 0.

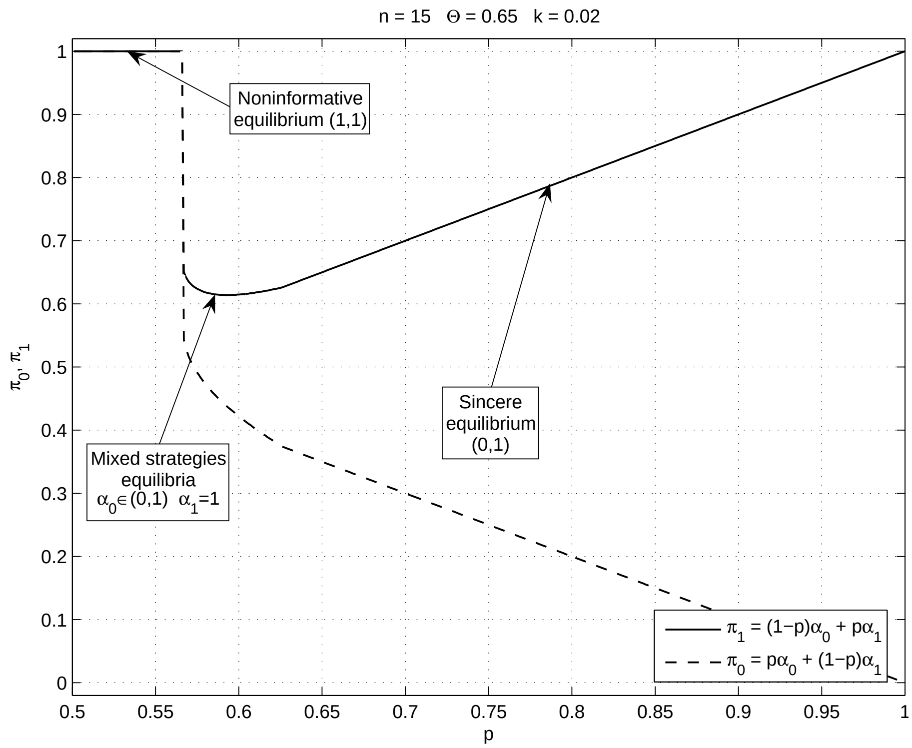
Теперь нас будет интересовать как данная картинка будет изменяться, если мы будем уменьшать качество информации получаемой агентами (параметр p).

На рисунках 1 и 2 как раз представлено данное изменение. Мы видим, что где значение параметра p является достаточно большим, правдивые стратегии составляют равновесие. Затем, после определенного значения ($p \approx 0.65$) правдивые стратегии больше не составляют равновесие, но у нас будет одно устойчивое равновесие в смешанных стратегиях. И, наконец, когда $p \approx 0.57$ это устойчивое равновесие пропадает и мы получаем ситуацию, в которой единственными устойчивыми равновесиями являются неинформативные равновесия.

Мы видим, что в каждом рассматриваемом равновесии параметр α_1был равен 1, в то время как параметр α_0 изменялся при уменьшении p. На следующей диаграмме изображена зависимость α_0 от p.



Более интересным будет посмотреть на зависимость π_0 и π_1 в устойчивом равновесии от p. Так как среднее количество голосов за решение $W = 1$ в состояниях 0 и 1 – это $\pi_0 n$ и $\pi_1 n$ соответственно, то эти параметры как раз характеризуют степень единогласности голосования. Когда π_0 или π_1 близки к 0 или 1 мы будем получать практически единогласные результаты. На следующей диаграмме изображены интересующие нас зависимости.



Таким образом, мы как раз и получили тот результат, который хотели получить. Мы видим, что единогласные результаты будут наблюдаться в двух случаях: когда p – достаточно большое (информация – очень надежная) и когда p – достаточно маленькое (информация – не очень точная).

Рис. 1: Равновесия для $p = 0.6 - 0.8$

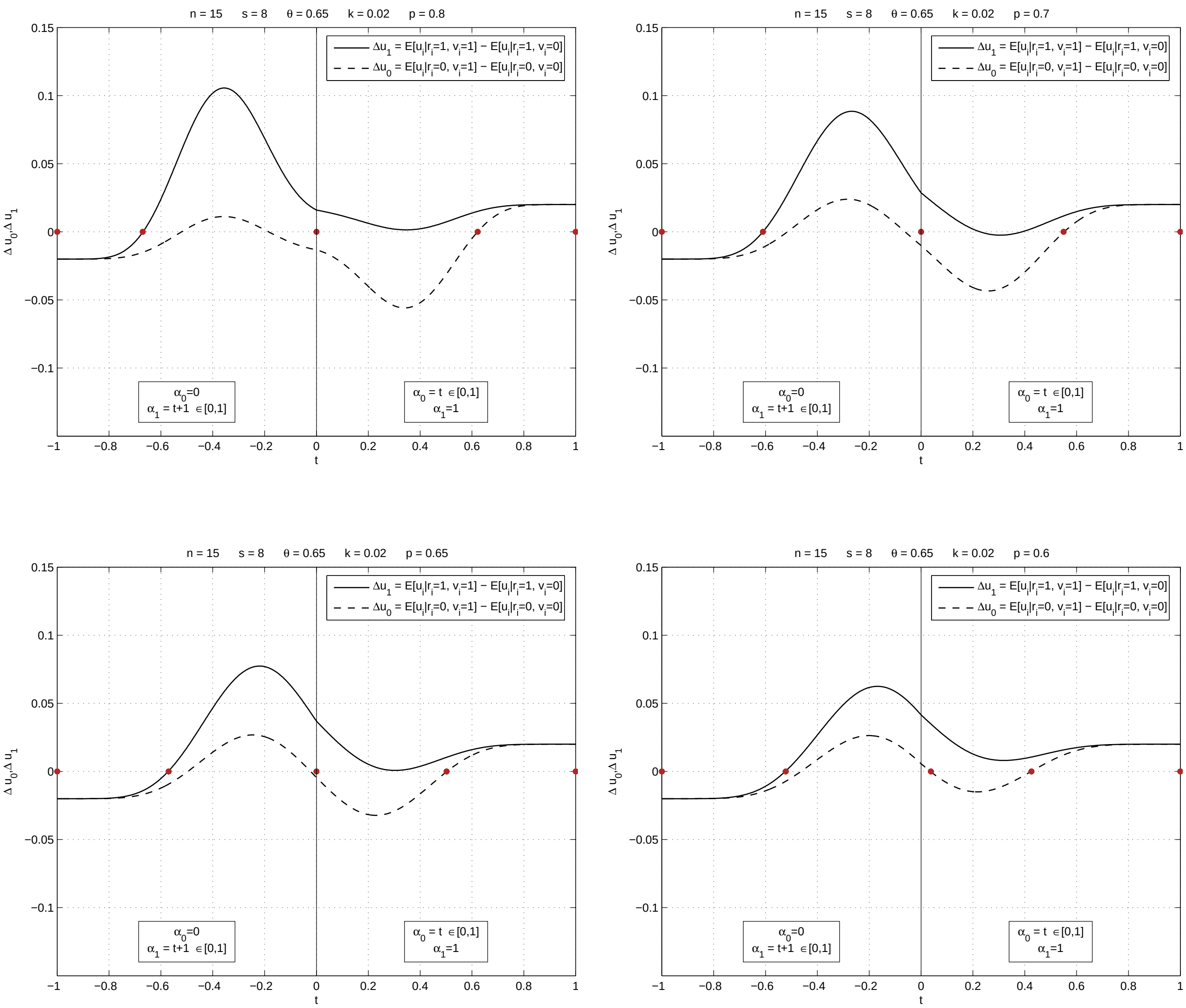
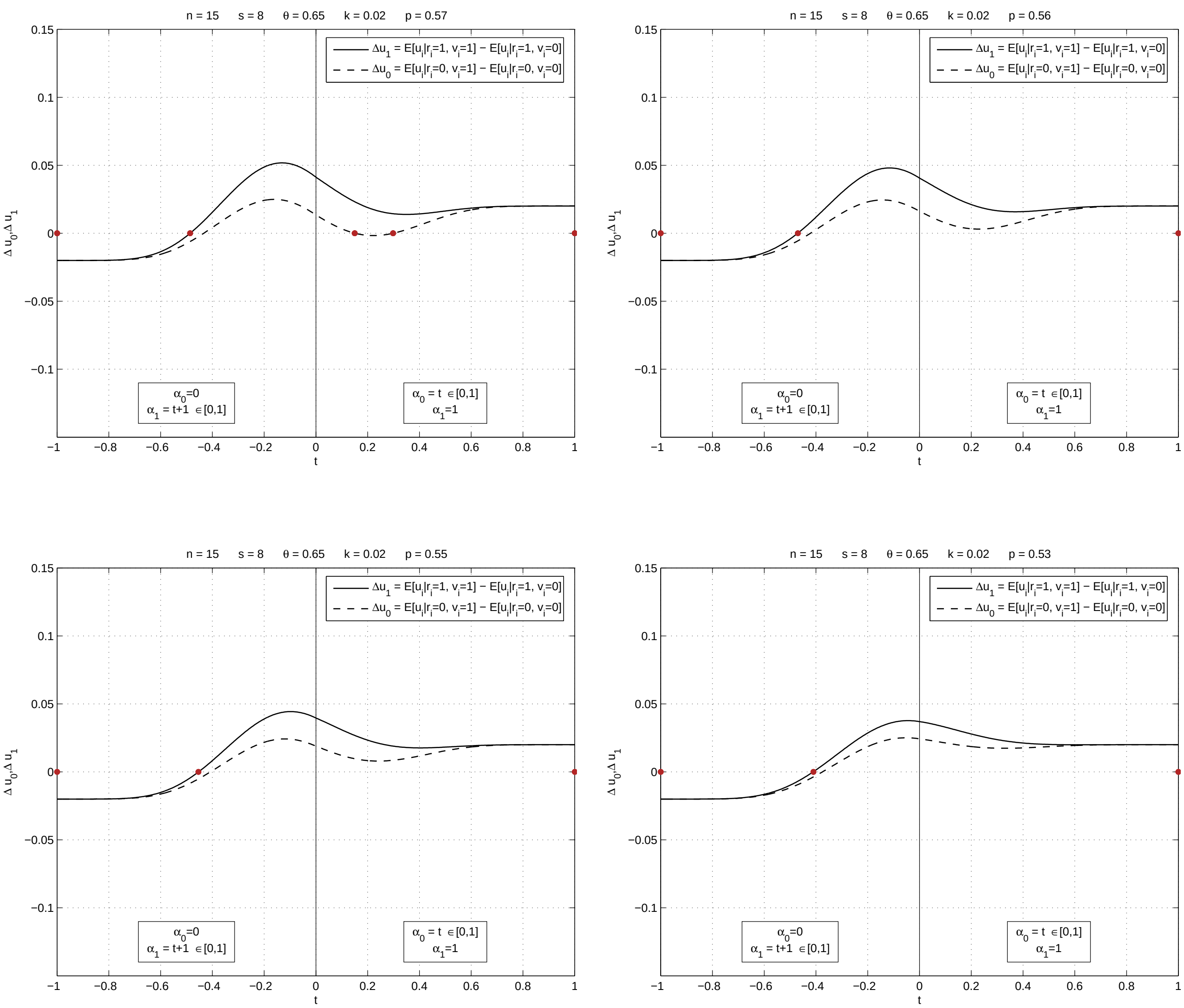


Рис. 2: Равновесия для $p = 0.53 - 0.57$



5 Сравнительная статика

Теперь попытаемся определить как желание голосовать за победившее решение влияет на частоту единогласных результатов в голосованиях. Мы будем смотреть как параметр k влияет на критическое значение $\bar{p}$ (если $p < \bar{p}$ то единственные устойчивые равновесия – это неинформативные равновесия). Оказывается, что эта зависимость неоднородна и может доказано следующее предложение

Предложение 10 *Предположим, что правило большинства используется для определения результатов голосования. Для любого n, $\theta > \frac{1}{2}$ существует k^* такое что*

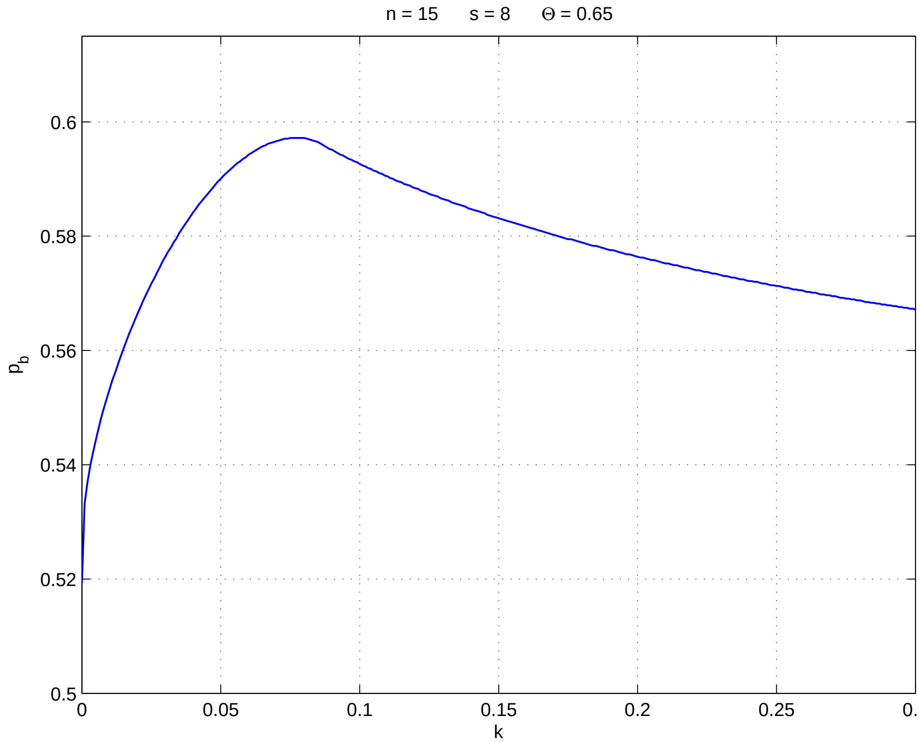
$$k < k^* \quad \Rightarrow \quad \bar{p}(k) \text{ – возрастающая фунция } k$$

$$k > k^* \quad \Rightarrow \quad \bar{p}(k) \text{ – убывающая фунция } k$$

Данное предложение показывает, что желание голосовать за победившее решение может оказывать неоднозначное влияние на частоту единогласных исходов в голосовании.

Можно предложить некоторую интуицию стоящую за эти фактом. Во-первых, желание голосовать за победившее решение смещает стимулы агентов голосовать голосовать за правильное решение, то есть может помешать им голосовать информативно. Однако, даже неточный сигнал может использоваться агентами как предсказание того, как будет голосовать большинство. Для маленьких k смещение стимулов играет более важную роль, а для больших k агентов интересуют практически только то как большинство будет голосовать и поэтому снова информативное равновесие может легко поддерживаться.

Для того, чтобы посмотреть как конкретно рассматриваемое желание голосовать за победившее решение может влиять на критическое значение $\bar{p}$ мы можем снова вернуться к численному моделированию. На следующем графике изображена зависимость $\bar{p}(k)$ для примера рассмотренного выше в разделе 4.



Мы видим, что когда k увеличивается от 0 до 0.07 (все еще достаточно маленькое значение) критическое значение $\bar{p}$ увеличивается с 0.52 до 0.6. То есть мы видим, что единогласные результаты в голосованиях становятся намного более вероятными.

Также мы видим из графика, что, как и предсказывалось, после того как k достигает ≈ 0.07, критическое значение $\bar{p}$ начинает уменьшаться, то есть, желание голосовать за победившее решение начинает играть положительную роль в поддержании информативного равновесия.

6 Заключение

В работе была предложена модель, объясняющая почему единогласные результаты могут наблюдаться в голосованиях, в случае когда у агентов достаточно мало информации о том, какое решение должно быть выбрано.

В модели предполагается, что агенты не только хотят принять правильное решение, но и что у них также есть некоторые стимулы голосовать за победившее решение. Показано, что данные стимулы могут значительно увеличить вероятность того, что реализуется единогласный результат, что, таким образом, объясняет почему мы их можем так часто наблюдать на практике. Также оказывает, что влияние данных стимулов не является однородным. Если агенты слишком сильно ценят голосование за правильное решение, то они начинают использовать получаемую как информацию как предсказание того, как будет голосовать большинство, что в свою очередь позволяет поддерживать информативное равновесие.

Это пока еще вопрос будущих исследований, но можно утверждать, что единогласие в результатах голосования (в случае когда у агентов не очень много информации) может быть действительно серьезной проблемой. Можно показать, что агенты теряют достаточно много в терминах ожидаемой полезности от того, что они не могут заранее согласовать свое поведение.

Список литературы

[1] Timothy Feddersen and Wolfgang Pesendorfer, "Convicting the Innocent: the Inferiority of Unanimous Jury Verdicts", American Political Science Review March 1998

[2] Steven Callander "Bandwagons and Momentum in Sequential Voting", Review of Economic Studies, forthcoming.

[3] Aronson, E., Wilson, and R.M. Akert. 1997 Social Psychology. New York, NY: Longman.

[4] Austen-Smith, David and Jeffrey S. Banks. 1996 "Information Aggregation, Rationality and the Condorcet Jury theorem", American Political Science Review, 90:1 34-45.

[5] Timothy Feddersen and Wolfgang Pesendorfer, 1994 "Voting Behavior and Information Aggregation in Elections with Private Information", Econometrica

[6] Timothy Feddersen and Wolfgang Pesendorfer, 1996 "The Swing Voter's Curse". American Economic Review, 86:3 408-24.

[7] Myerson Roger. 1994 "Extended Poisson Games adn the Condorcet Jury Theorem". mimeo

[8] Wit, Jorgen "Rational Choice and the Condorcet Jury Theorem". mimeo.

7 Приложение

Доказательство предложения 1.

Мы можем явным образом выписать выражения для $E[u_i|r_i, v_i]$:

$$E[u_i|r_i = 1, v_i = 1] =$$

$$\theta p \sum_{i=s-1}^{n-1} C_{n-1}^i \pi_1^i (1-\pi_1)^{n-1-i} + (1-\theta)(1-p) \sum_{i=0}^{s-2} C_{n-1}^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{n-1-i} +$$
$$+ kp \sum_{i=s-1}^{n-1} C_{n-1}^i \pi_1^i (1-\pi_1)^{n-1-i} + k(1-p) \sum_{i=s-1}^{n-1} \pi_0^i (1-\pi_0)^{n-1-i}$$

$$E[u_i|r_i = 1, v_i = 0] =$$

$$\theta p \sum_{i=s}^{n-1} C_{n-1}^i \pi_1^i (1-\pi_1)^{n-1-i} + (1-\theta)(1-p) \sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{n-1-i} +$$
$$+ kp \sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^i \pi_1^i (1-\pi_1)^{n-1-i} + k(1-p) \sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{n-1-i}$$

$$E[u_i|r_i = 0, v_i = 1] =$$

$$\theta(1-p) \sum_{i=s-1}^{n-1} C_{n-1}^i \pi_1^i (1-\pi_1)^{n-1-i} + (1-\theta) p \sum_{i=0}^{s-2} C_{n-1}^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{n-1-i} +$$
$$+ k(1-p) \sum_{i=s-1}^{n-1} C_{n-1}^i \pi_1^i (1-\pi_1)^{n-1-i} + kp \sum_{i=s-1}^{n-1} C_{n-1}^i \pi_0^i (1-\pi_0)^{n-1-i}$$

$$E[u_i|r_i=0,v_i=0]=$$

$$\theta(1-p)\sum_{i=s}^{n-1} C_{n-1}^i\pi_1^i(1-\pi_1)^{n-1-i}+(1-\theta)(1-p)\sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^i\pi_0^i(1-\pi_0)^{n-1-i}+$$
$$+k(1-p)\sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^i\pi_1^i(1-\pi_1)^{n-1-i}+kp\sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^i\pi_0^i(1-\pi_0)^{n-1-i}$$

Теперь взяв разности и обозначив

$$\psi(\pi)=\sum_{i=s-1}^{n-1} C_{n-1}^i\pi^i(1-\pi)^{n-1-i}-\sum_{i=0}^{s-1} C_{n-1}^i\pi^i(1-\pi)^{n-1-i}$$

мы получим

$$\Delta u_1=p\left[\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{n-s}+k\psi(\pi_1)\right]-$$
$$-(1-p)\left[(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s}-k\psi(\pi_0)\right]$$

$$\Delta u_0=(1-p)\left[\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{n-s}+k\psi(\pi_1)\right]-$$
$$-p\left[(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s}-k\psi(\pi_0)\right]$$

Принимая во внимание то, что мы используем правило большинства ($n-s=s-1$), мы получим требуемый результат.

■

Доказательство предложения 2.

Единственный факт, который требует доказательства – это то что $|\varphi(\pi)|$ возрастает по n. Предположим, что $\pi>\frac{1}{2}$, что означает, что $\frac{\pi}{1-\pi}>1$.

Мы можем записать $\varphi(\pi)$ следующим образом

$$\varphi(\pi)=\sum_{i=0}^{s-1}\frac{C_{n-1}^{s-1-i}}{C_{n-1}^{s-1}}\left(\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)^i-\left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)^i\right)$$

Предположим, что n изменяется на $n' = n{+}2$ (s изменяется на $s' = s{+}1$). Рассмотрим

$$\left(\frac{C_{n'-1}^{s'-1-i}}{C_{n'-1}^{s'-1}}\right) / \left(\frac{C_{n-1}^{s-1-i}}{C_{n-1}^{s-1}}\right) = \frac{C_{n+1}^{s-i}}{C_{n+1}^{s}}\frac{C_{n-1}^{s-1}}{C_{n-1}^{s-1-i}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(s-i)!(n+1-s+i)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(s-1)!(n-s)!}}{\frac{(n+1)!}{s!(n+1-s)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(s-1-i)!(n-s+i)!}} =$$

$$= \frac{s(n+1-s)}{(s-i)(n+1-s+i)} = \frac{s^2}{(s-i)(s+i)} = \frac{s^2}{s^2-i^2} \geq 1$$

Таким образом, получаем, что $\varphi(\pi, n' = n+2) > \varphi(\pi, n)$.

■

Доказательство предложения 3.

Для того, чтобы правдивые стратегии составляли равновесие необходимо, что было выполнено

$$\Delta u_0(\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1) \leq 0 \qquad \Delta u_1(\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1) \geq 0 \tag{1}$$

Когда $\alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1$ имеем $\pi_0 = 1 - p,\ \pi_1 = p$, следовательно выражения для Δu_0 и Δu_1 могут быть записаны следующим образом (из предложения 1):

$$\Delta u_1 = C_{n-1}^{s-1}(p+\theta-1)p^{s-1}(1-p)^{s-1} + k(2p-1)\psi(p)$$

$$\Delta u_0 = C_{n-1}^{s-1}(\theta-p)p^{s-1}(1-p)^{s-1} - k(2p-1)\psi(p)$$

Так как $p + \theta - 1 > p - \theta$, то из условий (1) нам нужно проверить только первое

$$C_{n-1}^{s-1}(\theta-p)p^{s-1}(1-p)^{s-1} - k(2p-1)\psi(p) \leq 0$$

что эквивалентно

$$\theta \leq p + k(2p-1)\varphi(p). \tag{2}$$

Выражение в правой части последнего неравенства строго возрастает по p и стремится к бесконечности, когда p стремится к 1; поэтому существует единственное критическое значение $\tilde{p}_s$, которое определяется из уравнения

$$\theta = \tilde{p}_s + k(2\tilde{p}_s - 1)\varphi(\tilde{p}_s),$$

такое что, для любого $p > \tilde{p}_s$ правдивые стратегии составлют равновесие, и для любого $p > \tilde{p}_s$ они не составляют равновесие

Из того что $\varphi(p)$ – возрастающая функция p и n (при условии, что s изменяется соответствующим образом), мы можем легко получить требуемые результаты для сравнительной статики.

■

Доказательство предложения 4.

Для того, чтобы нелогичные стратегии оказались равновесными необходимо, чтобы было выполнено

$$\Delta u_0(\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0) \geq 0 \qquad \Delta u_1(\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0) \leq 0 \tag{3}$$

Когда $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0$ имеем $\pi_0 = p,\ \pi_1 = 1 - p$, поэтому выражения для Δu_0 и Δu_1 могут быть записаны следующим образом (из предложения 1):

$$\Delta u_1 = C_{n-1}^{s-1}(p + \theta - 1)p^{s-1}(1 - p)^{s-1} - k(2p - 1)\psi(p)$$

$$\Delta u_0 = C_{n-1}^{s-1}(\theta - p)p^{s-1}(1 - p)^{s-1} + k(2p - 1)\psi(p)$$

Так как $p + \theta - 1 > p - \theta$, то из условий (3) нам нужно проверить только второе

$$C_{n-1}^{s-1}(p + \theta - 1)p^{s-1}(1 - p)^{s-1} - k(2p - 1)\psi(p) \leq 0$$

что эквивалентно

$$\theta \leq 1 - p + k(2p - 1)\varphi(p) \tag{4}$$

Мы можем переписать последнее выражение следующим образом

$$\theta - \frac{1}{2} \leq (2p-1)(k\varphi(p) - \frac{1}{2})$$

Выражение в правой части последнего неравенства строго возрастает по p (по крайней мере когда оно положительно) и стремиться к бесконечности, когда p стремиться к 1. следовательно, существует единственное критическое значение $\tilde{p}_i$, определяемое из уравнения

$$\theta - \frac{1}{2} = (2\tilde{p}_i - 1)(k\varphi(\tilde{p}_i) - \frac{1}{2})$$

такое что для любого $p > \tilde{p}_i$ нелогичные стратегии составляют равновесие и для любого $p < \tilde{p}_i$ они не составляют равновесие.

Сравнивая неравенства (2) и (4) мы видим, что $\tilde{p}_i$ должно быть всегда больше чем $\tilde{p}_s$.

Из то что $\varphi(p)$ – возрастающая функция p и n (при условии, что s изменяется соответствующим образом) мы получаем требуемые результаты для сравнительной статики.

■

Доказательство предложения 5.

Предположим, что (α_0^*, α_1^*) – равновесие. Мы будем рассматривать только случай, когда $\alpha_0^* = 1$ и $\alpha_1^* \in (0, 1)$. Доказательство для другого случая будет аналогичным.

1. Рассмотрим Δu_1 как функцию α_1. В равновесии будет выполнено

$$\Delta u_0(\alpha_1^*) \geq 0 \qquad \Delta u_1(\alpha_1^*) = 0$$

Для того чтобы доказать, что равновесие неустойчиво, достаточно показать, что для любого $\alpha_1 < \alpha_1^*$ будет выполнено

$$\Delta u_1(\alpha_1) < 0$$

или что эквивалентно

$$f(\alpha_1) = \frac{\Delta u_1(\alpha_1)}{\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}} < 0$$

2. Имеем

$$f(\alpha_1) = C_{n-1}^{s-1}\left(p\theta - (1-p)(1-\theta)\frac{\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s}}{\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}}\right) + k\frac{p\psi(\pi_1) + (1-p)\psi(\pi_0)}{\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}}$$

Обозначим

$$f_1(\alpha_1) = \frac{\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s}}{\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}}$$

$$f_2(\alpha_1) = \left(p\theta - (1-p)(1-\theta)\frac{\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}}{\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}}\right)$$

$$f_3(\alpha_1) = \frac{p\psi(\pi_1) + (1-p)\psi(\pi_0)}{\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}}$$

То есть, $f(\alpha_1) = C_{n-1}^{s-1} f_2(\alpha_1) + k f_3(\alpha_1)$ and $f_2(\alpha_1) = (p\theta - (1-p)(1-\theta) f_1(\alpha_1))$.

3. Так как $\pi_0 = p + \alpha_1(1-p)$ и $\pi_1 = 1 - p + \alpha_1 p$, то

$$f_2(\alpha_1) = \left(\frac{p + \alpha_1(1-p)}{1-p+\alpha_1 p} \cdot \frac{1-p}{p}\right)^{s-1}$$

– убывающая функция α_0.

В результате $f_1(\alpha_1)$ – возрастающая α_1.

4. Имеем,

$$f_1(0) = C_{n-1}^{s-1}\left(p\theta - (1-p)(1-\theta)\right) > 0$$

Следовательно $f_1(\alpha_1^*) > 0$ и, так как $\Delta u_1(\alpha_1^*) = 0$, получим, что $f_3(\alpha_1^*) < 0$.

5. Теперь рассмотрим

$$f_3(\alpha_1) = \frac{p\psi(\pi_1) + (1-p)\psi(\pi_0)}{\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}}$$

Когда $\alpha_1 \leq \alpha_1^*$ числитель выражения отрицателен и является возрастающей функцией α_1, а знаменатель положителен и является возрастающей функцией α_1. Следовательно, все выражение является возрастающей функцией α_1.

6. Таким образом, получаем, что $f(\alpha_1)$ – возрастающая α_1 для любого $\alpha_1 < \alpha_1^*$, что завершает доказательство.

■

Доказательство предложения 6. Предположим ,что (α_0, α_1) равновесие в полностью смешанных стратегиях, тогда должно быть выполнено

$$\Delta u_0(\alpha_0, \alpha_1) = 0 \qquad \Delta u_1(\alpha_0, \alpha_1) = 0$$

что эквивалентно

$$\begin{gathered} p\left[\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{n-s} + k\psi(\pi_1)\right] - \\ -(1-p)\left[(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s} - k\psi(\pi_0)\right] = 0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} (1-p)\left[\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} + k\psi(\pi_1)\right] - \\ -p\left[(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1} - k\psi(\pi_0)\right] = 0 \end{gathered}$$

or

$$\begin{aligned} &\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{n-s} + k\psi(\pi_1) = 0 \\ &(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s} - k\psi(\pi_0) = 0 \end{aligned}$$

Последнее выражение может быть представлено следующим образом

$$\begin{aligned} \varphi(\pi_1) &= -\tfrac{\theta}{k} \\ \varphi(\pi_0) &= \tfrac{1-\theta}{k} \end{aligned}$$

В результате может существовать не более одного равновесия в полностью смешанных стратегиях.

Теперь предположим, что мы увеличим α_1 на малую величину $\Delta\alpha_1$. В результате, π_0 и π_1 увеличаться. Таким образом, получим (так как φ возрастающая функция π)

$$\begin{aligned} &\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{n-s} + k\psi(\pi_1) > 0 \\ &(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{n-s} - k\psi(\pi_0) < 0 \end{aligned}$$

что означает, что Δu_1 будет больше чем 0, то есть равновесие не устойчиво.

■

Доказательство предложения 7.

Для того, чтобы доказать предложение нам нужно показать, что существует $\bar{p}_1$ такое что для любого $p < \bar{p}_1$ и для любых $\alpha_0 \in [0,1], \alpha_1 = 1$ будет выполнено $\Delta u_0 > 0$ and $\Delta u_1 > 0$.

Так как

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 = (2p-1)C_{n-1}^{s-1}\left[\theta\,\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} + (1-\theta)\,\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}\right] +$$

$$+(2p-1)(\psi(\pi_1) - \psi(\pi_0)) > 0,$$

То мы можем рассматривать только Δu_0.

Рассмотрим 2 случая

1. $\alpha_0 \geq 1 - \frac{1}{2p}$ (which is equivalent to $\pi_0 = p\alpha_0 + (1-p) \geq \frac{1}{2}$).

   Мы можем переписать Δu_0 следующим образом

$$\Delta u_0 = \left[(1-p)\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} - p(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}\right] +$$

$$+k\left[(1-p)\psi(\pi_1) + p\psi(\pi_0)\right]$$

   Последняя часть положительна, так как π_0 и π_1 больше чем $\frac{1}{2}$.

   Предположим, мы выберем p такое что

$$\frac{p}{1-p} < \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\frac{1}{s}}$$

   Затем,

$$\frac{(1-p)\theta\,\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1}}{p(1-\theta)\,\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}} = \frac{\theta}{1-\theta}\frac{1-p}{p}\left(\frac{p+(1-p)\alpha_0}{1-p+p\alpha_0}\frac{1-p}{p}\right)^{s-1} \geq$$

$$\geq \frac{\theta}{1-\theta}\frac{1-p}{p}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{s-1} > 1,$$

что означает, что первая часть выражения также положительна.

2. $\alpha_0 < 1 - \frac{1}{2p}$

   В этом случае имеем $\pi_0 < \frac{1}{2}$, $\pi_1 > \frac{1}{2}$. Так как $\alpha_0 < 1 - \frac{1}{2p}$ то $\pi_1 < \frac{3}{2} - \frac{1}{2p}$.

   Следовательно мы можем оценить Δu_0 следующим образом

$$C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} \geq (C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1})|_{\pi_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}} = A_1(p)$$

$$-C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1} \geq -C_{n-1}^{s-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -A_2$$

$$(1-p)\psi(\pi_1) + p\psi(\pi_0) \geq -(2p-1)\psi(p) = A_3(p)$$

   Имеем

$$\Delta u_0 \geq p\theta A_1(p)(1-p) - (1-\theta)A_2 + A_3(p)$$

   Также мы знаем, что

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} A_1(p) = -A_2$$
$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} A_3(p) = 0$$

   Следовательно, существует $\bar{p}_1$ такое что для любого $p < \bar{p}_1$ имеем

$$\Delta u_0 \geq p\theta A_1(p)(1-p) - (1-\theta)A_2 + A_3(p) > 0,$$

   что доказывает предложение.

■

Доказательство предложения 8.

Рассмотрим Δu_1 как функцию α_1 ($\alpha_0 = 0$). Мы знаем, что

$$\Delta u_1(0) < 0, \qquad \Delta u_1(1) > 0.$$

Таким образом, для того чтобы доказать предложение нам нужно показать, что для достаточно малых p функция $\Delta u_1(\alpha_1)$ пересекает 0 только один раз.

1. Мы можем записать Δu_1 следующим образом

$$\Delta u_1 = C_{n-1}^{s-1}\left[p\theta\, \pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} - (1-p)(1-\theta)\, \pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}\right] +$$
$$+k\left[p\psi(\pi_1) + (1-p)\psi(\pi_0)\right]$$

2. Мы можем найти такое $\bar{p} > \frac{1}{2}$, что

$$(2\theta-1)\bar{p}^{s-1}(1-\bar{p})^{s-1} + k\psi\left(\frac{1-\bar{p}}{2\bar{p}}\right) > 0.$$

(выражение выше стремится к $(2\theta-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2s-2} > 0$ когда $\bar{p}$ стремится к $\frac{1}{2}$).

3. Обозначим $\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{2\bar{p}}$. Предположим $\alpha_1 \geq \bar{\alpha}_1$ и $p \leq \bar{p}$. Мы можем оценить Δu_1 следующим образом

$$C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} \geq C_{n-1}^{s-1}\bar{p}^{s-1}(1-\bar{p})^{s-1}$$
$$p\psi(\pi_1) + (1-p)\psi(\pi_0) \geq \frac{1}{2}\psi(\pi_1) + \frac{1}{2}\psi(\pi_0) \geq \psi(\pi_0) \geq \left(\frac{1-\bar{p}}{2\bar{p}}\right)$$

Для Δu_1 будет выполнено (так как $\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} \geq \pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}$ для любого α_1)

$$\Delta u_1 > (2\theta-1)\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} + k\left[p\psi(\pi_1) + (1-p)\psi(\pi_0)\right] >$$
$$> (2\theta-1)\bar{p}^{s-1}(1-\bar{p})^{s-1} + k\left(\frac{1-\bar{p}}{2\bar{p}}\right) > 0$$

Таким образом, для любого $p \leq \bar{p}$ и для любого $\alpha_1 \geq \bar{\alpha}_1$ we have $\Delta u_1 > 0$

4. Чтобы завершить доказательство мы найдем $\bar{p}_1 < \bar{p}$, такое что для любого $p < \bar{p}_1$ функция Δu_1 будет возрастающей на $[0, \alpha_1]$.

$$\Delta u_1(\alpha_1) = f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_1),$$

где

$$f_1(\alpha_1) = C_{n-1}^{s-1}\left[p\theta\,\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} - (1-p)(1-\theta)\,\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}\right]$$

$$f_2(\alpha_1) = k\left[p\psi(\pi_1) + (1-p)\psi(\pi_0)\right]$$

5. $f_2(\alpha_1)$ очевидно возрастающая функция, следовательно рассмотрим $f_1(\alpha_1)$.

$$\frac{df_1}{d\alpha_1} = C_{n-1}^{s-1}\left(\theta p^2\pi_1^{s-2}(1-\pi_1)^{s-2}(1-2\pi_1) - (1-\theta)(1-p)^2p^2\pi_0^{s-2}(1-\pi_0)^{s-2}(1-2\pi_0)\right)$$

$$\frac{df_1}{d\alpha_1} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\theta p^2\pi_1^{s-2}(1-\pi_1)^{s-2}(1-2\pi_1)}{(1-\theta)(1-p)^2p^2\pi_0^{s-2}(1-\pi_0)^{s-2}(1-2\pi_0)} > 1$$

$$\frac{\theta p^2\pi_1^{s-2}(1-\pi_1)^{s-2}(1-2\pi_1)}{(1-\theta)(1-p)^2p^2\pi_0^{s-2}(1-\pi_0)^{s-2}(1-2\pi_0)} =$$
$$= \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{p}{1-p}\right)^s\left(\frac{1-p\alpha_1}{1-(1-p)\alpha_1}\right)^{s-1}\frac{1-2p\alpha_1}{1-2(1-p)\alpha_1} \geq$$
$$\geq \frac{\theta}{1-\theta}\left(\frac{p}{1-p}\right)^s\left(\frac{1-p\bar{\alpha}_1}{1-(1-p)\bar{\alpha}_1}\right)^{s-1}\frac{1-2p\bar{\alpha}_1}{1-2(1-p)\alpha_1}$$

Когда p стремиться к $\frac{1}{2}$ последнее выражение стремиться к $\frac{\theta}{1-\theta} > 1$. Следовательно, существует такое $\bar{p}_1$, что для любого $p < \bar{p}_1$ имеем $\frac{df_1}{d\alpha_1} > 0$ когда $\alpha_1 \in [0, \bar{\alpha}_1]$, что означает, что Δu_1 возрастает на $[0, \alpha_1]$.

■

Доказательство предложения 10.

1. Рассмотрим только случай, когда $\alpha_1 = 1, \alpha_0 \in [0,1]$. Если существует устойчивое информативное равновесие, то оно должно существовать для данных значений параметров.

   Когда $p = \bar{p}(k)$, кривая $\Delta u_0(\alpha_0)$ должна качаться 0, то есть

   $$\Delta u_0(\alpha_0) \geq 0, \text{ для любого } \alpha_0 \in [0,1]$$

   $$\text{Существует } \alpha_0 \text{ такое что } \Delta u_0(\alpha_0) = 0$$

2. Δu_0 можно записать следующим образом

   $$\Delta u_0 = \left[(1-p)\theta\, C_{n-1}^{s-1}\pi_1^{s-1}(1-\pi_1)^{s-1} - p(1-\theta)\, C_{n-1}^{s-1}\pi_0^{s-1}(1-\pi_0)^{s-1}\right] +$$

   $$+k\left[(1-p)\psi(\pi_1) + p\psi(\pi_0)\right]$$

   $f(\alpha_1) = (1-p)\psi(\pi_1) + p\psi(\pi_0)$ – возрастающая функция α_0 и кроме того

   $$f(0) = -(2p-1)\psi(p) < 0, \qquad f(1) = 1 > 0$$

   Следовательно, обозначим α_0^*: значение α_0, которое является решением уравнения

   $$(1-p)\psi(\pi_1) + p\psi(\pi_0) = 0.$$

3. **Лемма 1** *Предположим что некоторого k_1 и $p_1 = \bar{p}(k_1)$ выполнено $\Delta u_0(\alpha_0) = 0$ для $\alpha_0 \geq \alpha_0^*$; тогда p_1 не может быть критическим значением для любого $k > k_1$ и $\bar{p}(k)$ – возрастающая функция в окрестности k_1.*

   Доказательство Леммы 1. Рассмотрим сначала когда упомянутое $\alpha_0 > \alpha_0^*$. Предположим, что мы изменяем k_1 до $k > k_1$, тогда получим

   $$\Delta u_0(\alpha_0) < 0$$

что означает что должно существовать по крайней мере одно устойчивое равновесие. Таким образом, мы можем сделать вывод, что p_1 не может быть критическим значением для k и что $\bar{p}(k) < \bar{p}(k_1)$.

Рассмотрим теперь случай когда $\alpha_0 = \alpha_0^*$. Так как Δu_0 касается 0, то

$$\Delta u_0'(\alpha_0^*) = 0$$

Теперь предположим мы изменяем k_1 до $k > k_1$. Так как $f(\alpha_0)$ – возрастающая функция, то получим что

$$\Delta u_0'(\alpha_0^*) < 0$$

что означает, что существует по крайней мере одно устойчивое равновесие. Таким образом, снова мы можем сделать вывод, что p_1 не может быть критическим значением для k и что $\bar{p}(k) < \bar{p}(k_1)$. ■

4. **Лемма 2** *Предположим, что для некоторого* k_2 *и* $p_2 = \bar{p}(k_2)$ *выполнено* $\Delta u_0(\alpha_0) = 0$ *для* $\alpha_0 \leq \alpha_0^*$*; тогда* p_2 *не может быть критическим значением для любого* $k < k_2$ *и* $\bar{p}(k)$ *убывающая функция в окрестности* k_2.

   Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущей леммы.

5. Утверждение предложения непосредственно следует из двух описанных выше лемм (Для любого заданного $\bar{p}$ может быть не более двух значений k соответствующих этому $\bar{p}$ и в окрестности меньшего значения функция $\bar{p}(k)$ должна быть возрастающей, а в окрестности большего значения она должна быть убывающей).

■