

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ I

Курс математического анализа является первой частью курса математики, который рассчитан на три семестра и является обязательным для студентов экономического бакалавриата. Задача курса состоит в освоении фундаментальных математических понятий и овладении техникой математического доказательства, закреплении основных навыков математических вычислений и обработки данных. Курс математики в бакалавриате включает в себя основные сведения из математического анализа и линейной алгебры и должен заложить теоретическую основу для современных методов экономического анализа, преподаваемых в других курсах. Кроме того, задачами курса является формирование навыка анализа практических ситуаций с точки зрения изученных понятий и общее развитие аналитического мышления. «Математический анализ I» включает темы классического математического анализа от определения функции до условий сходимости рядов.

## Требования к студентам

- Для успешного освоения материала курса требуется владение курсом математики в объёме школьной программы и элементарными навыками работы с компьютером.

## Формы контроля

- 40 % оценки за курс - письменный экзамен в конце семестра
- 30 % - оценка за промежуточную контрольную
- 30 % - работа в течение семестра (включает работу на занятиях и выполнение текущих домашних заданий).

## Основные учебные пособия

- Зорич, В.А. Математический анализ, ч. 1 и 2., Фазис, 1997.
- Stewart, J. - Calculus - Early Transcendentals 6e 2008.

## Замечания

- Специфической особенностью курса, отличающей его от стандартных курсов математики, которые читаются в российских вузах, будет упор на более активное использование современных коммуникационно-вычислительных средств: прежде всего, программ Microsoft Excel (и аналогичных продуктов других фирм) и Mathematica (или Maple). Поскольку основной задачей этого курса является овладение базовыми понятиями и навыками математических вычислений, разбиение занятий на «лекции» и «семинары» будет менее чётким, чем это обычно делается на технических специальностях.

## **1. Функции. Первое знакомство.**

*Stewart 10-81.*

Понятие функции. Область определения, множество значений функции. Способы задания функции (словесное описание, таблица значений, графический способ, точная формула).

График функции. Четные и нечетные функции. Возрастание, убывание функции.

*Stewart 25-37.*

Элементарные функции: линейные функции, многочлены, степенные функции, рациональные функции, алгебраические функции, тригонометрические функции.

*Stewart 37-45.*

Преобразования функций: Вертикальные и горизонтальные сдвиги. Вертикальные и горизонтальные растяжения. Отражения относительно координатных осей. Сложение, умножение, взятие композиции функций.

*Stewart 52-72.*

Экспонента. Свойства перемножения и взятия композиции экспонент. Экспонента и сложные проценты. Обратные функции. Когда у функции существует обратная? Связь графиков исходной и обратной функции. Логарифм. Свойства сложения логарифмов и умножения логарифма на число. Обратные тригонометрические функции.

*Примеры задач:*

Построить график функции. Определить, является ли функция четной/нечетной. Найти обратную функцию.

## **2. Предел. Производная.**

*Stewart 82-172, Зорич 105-188.*

*Stewart 82-99.*

Вводные слова. Предел функции – понятие о пределе. Предел справа и слева. Бесконечные пределы и вертикальные асимптоты.

*Stewart 99-108.*

Операции с пределами. Предел суммы, произведения и частного.

*Stewart 109-118.*

Определение предела, пределов справа и слева, бесконечных пределов. Доказательство теоремы суммирования пределов.

*Stewart 119-130.*

Определение непрерывности функции в точке и на интервале. Непрерывность суммы, произведения и частного непрерывных функций. Теорема о пределе композиции функций; композиция непрерывных функций непрерывна.

*Stewart 130-143.*

Понятие о пределе функции на бесконечности, горизонтальная асимптота функции. Скорость роста функции. Степенной рост.

*Stewart 143-153.*

Определения касательной, угол наклона касательной. Задача о нахождении мгновенной скорости. Определение производной функции в точке.

*Stewart 154-165.*

Производная как функция. Дифференцируемость функции. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней.

*Примеры задач:*

Найти пределы:

Написать уравнение касательной к кривой в точке (2;1)

Найти асимптоты графика функции

Нарисовать эскиз графика производной по графику функции и эскиз графика функции по графику производной

Нарисовать графики функции и её производной

## **3. Правила дифференцирования**

*Stewart 172-270, Зорич 189-210*

*Stewart 173-182.*

Дифференцирование многочлена и экспоненты. Определение числа ( ). Производная суммы дифференцируемых функций.

*Stewart 183-189.*

Производная произведения и частного дифференцируемых функций.

*Stewart 189-197.*

Производные тригонометрических функций. Первый замечательный предел .

*Stewart 197-206.*

Производная композиции дифференцируемых функций.

*Stewart 207-215.*

Дифференцирование неявной функции. Производная обратных тригонометрических функций.

*Stewart 215-220.*

Производная логарифмических функций. Логарифмическое дифференцирование. Второй замечательный предел .

*Stewart 247-253.*

Линейные приближения функций и понятие дифференциала.

*Примеры задач:*

Вычислить производные :

Построить график функции и её производной.

В каких точках кривой касательная горизонтальна?

#### **4. Применение производной.**

*Stewart 270-354, Зорич 210-258.*

*Stewart 271-279.*

Абсолютный и локальный минимум (максимум) функции, локальные экстремумы функции.

Теорема Ферма. Методы нахождения минимумов и максимумов функции.

*Stewart 280-386.*

Теорема Ролля. Теорема Лагранжа.

*Stewart 287-298.*

Связь производной с возрастанием и убыванием функции. Достаточные условия максимума и минимума дифференцируемой функции. Выпуклость графика функции., связь со второй производной. Точки перегиба.

*Stewart 298-307.*

Правило Лопиталя.

*Stewart 307-315.*

Полное исследование графика функции: 1. Нахождение области определения и множества значений; 2. Нахождение точек пересечения с координатными осями; 3. Четность, нечетность, периодичность функции; 4. Указание асимптот графика; 5. Указание промежутков возрастания и убывания функции; 6. Указание локальных минимумов и максимумов функции; 7.

Нахождение точек перегиба и областей выпуклости; 8. Построение эскиза графика функции.

*Stewart 322-334.*

Некоторые задачи, связанные с оптимизацией и анализом функций.

*Stewart 334-340.*

\*Метод Ньютона.

*Stewart 340-347.*

Понятие первообразной функции и её свойства.

*Примеры задач:*

Найти абсолютный минимум и максимум функции на заданном отрезке:

Вычислите предел:

Выполните полное исследования графика функции :

#### **5. Интегрирование.**

*Stewart 354-414, Зорич 324-368*

*Stewart 355-378.*

Площадь под графиком. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции на отрезке. Некоторые простейшие свойства определенного интеграла (интеграл константы, интеграл суммы и разности функций). Неотрицательность интеграла всюду неотрицательной функции.

*Stewart 379-390.*

Связь определенного интеграла с первообразной. Формула Ньютона-Лейбница.

*Stewart 391-390.*

Неопределенный интеграл. Вычисление некоторых интегралов. Правило подстановки для неопределенного и определенного интеграла.

*Примеры задач:*

Вычислить интегралы:

Найти производную функции:

Докажите неравенства:

## **6. Применение определенного интеграла.**

*Stewart 414-452, Зорич 369-386.*

*Stewart 415-442.*

Площадь фигуры, заключенной между кривыми. Объем. Нахождение объема с помощью определенного интеграла. Формула объема тела вращения. Работа.

*Stewart 442-442.*

Среднее значение функции. Теорема о среднем.

*Примеры задач:*

Найдите площадь фигуры, заключенной между кривыми .

Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси плоской фигуры, заключенной между кривыми и .

Найдите среднее значение функции на промежутке  $[0, 10]$ .

## **7. Техника интегрирования.**

*Stewart 452-524, Зорич 386-402 (только несобственный интеграл).*

*Stewart 453-459, Зорич 357-359.*

Интегрирование по частям (для определенного и неопределенного интеграла).

*Stewart 460-473.*

Интегрирование различных тригонометрических функций

( ). Тригонометрические подстановки.

*Stewart 473-483.*

Интегрирование рациональных функций.

*Stewart 487-488.*

Некоторые интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях.

*Stewart 495-507.*

Численное интегрирование: Формула прямоугольников со средней точкой; формула трапеций; формула Симпсона. Ошибки этих численных методов.

*Stewart 508-517.*

Несобственный интеграл. Определение сходимости несобственного интеграла. Сходимость .

Теорема сравнения. Интегралы

*Зорич 586.*

Асимптотика интегралов, зависящих от параметра, метод перевала

*Примеры задач:*

Вычислить интегралы:

Вычислить несобственный интеграл или доказать, что он расходится:  
Покажите, что .

### **8. Другие приложения определенного интеграла.**

*Stewart 524-566.*

*Stewart 525-539. Зорич 371-377.*

Длина кривой. Площадь поверхности вращения.

*Stewart 539-554.*

Прикладные задачи из физики, биологии, экономики. Момент и центр масс. Теорема Паппа об объеме тела вращения.

*Stewart 555-561.*

Вероятность. Нормальное распределение.

*Примеры задач:*

Найдите длину кривой , а так же площадь поверхности, полученной вращением этой кривой вокруг оси .  
Выведите формулу объема шара с помощью теоремы Паппа.

### **9. Дифференциальные уравнения.**

*Stewart 566-620*

Примеры зависимостей между функциями и их производными, позволяющие найти функцию.  
Уравнения , , .

*Stewart 567-580.*

Дифференциальное уравнение. Некоторые модели с дифференциальными уравнениями (рост населения, *Stewart 591-600*, колебание грузика на пружине). Поле направлений и метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения.

*Stewart 580-590.*

Уравнение с разделяющимися переменными. Ортогональные траектории к семейству кривых.  
*Stewart 602-608.*

Линейные дифференциальные уравнения. Интегрирующий множитель в линейных уравнениях.

*Stewart 608-614.*

Модель «хищник-жертва». Фазовое пространство.

*Примеры задач:*

Нарисуйте поле направлений для дифференциального уравнения и постройте эскизы графиков решений, удовлетворяющих начальным условиям  $u$  .

Проверьте свои результаты, явно решив дифференциальное уравнение.

Используйте метод Эйлера с шагом в 0.2, чтобы найти приближенное значение , где это решение задачи .

Проделайте то же самое с шагом в 0.1. Проверьте свои результаты, явно решив дифференциальное уравнение.

Решите дифференциальное уравнение:

### **10. Функции, заданные параметрически. Полярные координаты.**

*Stewart 620-674.*

*Stewart 621-639.*

Параметрически заданные кривые. Циклоида. Семейства параметрических кривых. Касательные к параметрически заданным кривым. Формула длины кривой, заданной параметрически. Площадь поверхности вращения параметрически заданной кривой.  
*Stewart 639-654.*

Полярные координаты. Касательные к кривым, заданным в полярных координатах. Длина и площадь в полярных координатах.

*Stewart 654-662.*

Конические сечения. Фокус, вершина и директриса параболы. Фокусы, вершины, главные оси эллипса. Фокусы, вершины и асимптоты гиперболы.

*Stewart 662-662.*

Эксцентриситет. Уравнения конических сечений в полярных координатах.

*Примеры задач:*

Постройте эскизы кривых, заданных параметрически:

Исключите параметр из уравнения кривой.

Покажите, что параметрические уравнения  $x = at + b$  и  $y = ct + d$ , где  $a, b, c, d$  задают прямую, соединяющую точки  $(0, b)$  и  $(a, d)$ .

Найдите угол наклона касательной к кривой в точке, соответствующей указанному параметру:

Постройте эскизы графиков, заданных в полярных координатах:

Найдите длину кривой:

## **11. Бесконечные последовательности и ряды.**

*Stewart 674-764, Зорич 76-104, 215-228*

*Stewart 675-687.*

Последовательность. Числа Фибоначчи. Предел последовательности (конечный и бесконечный). Операции с пределами. Предел суммы, произведения и частного последовательностей. «Принцип двух милиционеров». Монотонные последовательности (возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие). Ограниченные последовательности.

*Stewart 687-697.*

Ряд. Частичные суммы ряда. Сходимость ряда. Сумма геометрической прогрессии со знаменателем меньше единицы. Гармонический ряд. Сумма и разность сходящихся рядов сходится.

*Stewart 604-704.*

Интегральный признак сходимости (расходимости) ряда. Сходимость ряда .

Оценка суммы ряда.

*Stewart 705-709.*

Теорема сравнения.

*Stewart 710-720.*

Ряды со знакопеременными членами. Абсолютная и условная сходимость рядов. Абсолютно сходящийся ряд сходится. Признак Даламбера сходимости ряда. Признак Коши сходимости ряда.

*Stewart 723-734.*

Степенные ряды. Радиус сходимости. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

*Stewart 734-748.*

Ряд Тейлора. Многочлены Тейлора. Оценка остаточного члена в разложении в ряд Тейлора.

Ряды Тейлора для функций . Операции со степенными рядами: сложение, умножение и деление.

*Примеры задач:*

Найдите сумму ряда:

Определите, сходится ли ряд:

Найдите радиус сходимости ряда:

Найдите разложение в ряд Тейлора функции: